A 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatainak megoldása

1. feladat. Legyen $S \subset \mathbb{R}$ zárt halmaz és $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Definiáljunk egy G gráfot az alábbiak szerint. A gráf csúcsai azon $x \in \mathbb{R}^n$ pontok, amelyekre $f(x,x) \notin S$. Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ csúcsokat akkor és csak akkor kötjük össze éllel, ha $f(x,y) \in S$ vagy $f(y,x) \in S$. Igazoljuk, hogy a G gráf kromatikus száma megszámlálható.

(Solymosi József)

1. megoldás (Solymosi József). Mivel S zárt, ezért a gráf minden csúcsához van olyan nyílt környezet, amelyben nincs két csúcs ami össze lenne kötve éllel (itt használtuk hogy f folytonos és $f(x,x)$ nincs S-ben). Ezek a környezetek a csúcsok halmazának egy fedését adják nyílt halmazokkal, így belőlük kiválasztható egy megszámlálható részfedés. Rendeljünk ezen megszámlálható sok környezethez egy-egy különböző színt, majd a gráf minden csúcsát az egyik fedő környezet színével színezve jó színezést kapunk.

2. megoldás. Mivel (S zártságát és f folytonosságát használva) a csúcsok V halmaza nyílt, így felírható $V = \cup_{i=1}^{\infty} K_i$ növő unióként alkalmas K_i kompakt halmazokkal. Elegendő belátni, hogy minden i-re K_i pontjai jól színezhetőek véges sok színnel, hiszen ekkor nyilván ugyanez áll $K_{i+1} \setminus K_i$ pontjaira is, és ezen színezésekben különböző i-kre diszjunkt véges színhalmazokat választva adódik V egy jó színezése megszámlálható sok színnel. A K_i csúcshalmaz jó színezését a következőképpen kapjuk. Mivel az élek E halmaza (S zártságát és f folytonosságát használva) zárt, a K_i-n belül futó élek $(K_i \times K_i) \cap E$ halmaza kompakt, és V definícióját használva diszjunkt a $\{(x,x) : x \in K_i\}$ kompakt halmaztól. Így a két halmaz távolsága pozitív, amiből következik, hogy alkalmas $\varepsilon > 0$ számra K_i-n belül nem köt össze él ε-nál közelebbi pontokat. Ekkor viszont egy ε-nál kisebb átmérőjű kis kockákból álló rács kockáiból a K_i-t metsző véges sokat mind különböző színűre színezve kapjuk K_i egy jó színezését véges sok színnel.

2. feladat. Egy $\mathcal{F}$ halmazcsaládot *igazán rendes*nek hívunk, ha tetszőleges $A, B \in \mathcal{F}$ esetén létezik olyan $C \in \mathcal{F}$ halmaz, melyre $A \cup B = A \cup C = B \cup C$. Legyen

$$f(n) = \min\left\{\max_{A \in \mathcal{F}} |A| \ : \ \mathcal{F} \text{ igazán rendes és } |\cup \mathcal{F}| = n\right\}.$$

Igazoljuk, hogy az $f(n)/n$ sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét.

(Károlyi Gyula)

Megoldás (Csikvári Péter). A következő három észrevételből következni fog, hogy a sorozat konvergens és a határérték $\frac{1}{2}$:

- $f(n_1 + n_2) \leq f(n_1) + f(n_2)$
- $f(n) \geq \frac{n}{2}$
- $f(2^k - 1) = 2^{k-1}$

Az első észrevételből és a Fekete lemmából azonnal következik, hogy a sorozat konvergens. Sőt ilyenkor azt is tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \inf_n \frac{f(n)}{n}$. A második és harmadik észrevételből pedig következik, hogy ez az infimum éppen $\frac{1}{2}$.

Az $f(n_1 + n_2) \leq f(n_1) + f(n_2)$ egyenlőtlenség abból következik, hogy ha van egy $\mathcal{F}_1$ igazán rendes halmazcsaládunk az $\{1, 2, \ldots, n_1\}$ halmazon és egy $\mathcal{F}_2$ igazán rendes halmazcsaládunk az

$\{n_1+1, n_1+2, \ldots, n_1+n_2\}$ elemeken akkor $\mathcal{F} = \{A_1 \cup A_2 \mid A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$ egy igazán rendes halmazcsalád n_1+n_2 elemen.

A második észrevételt indukcióval bizonyítjuk. A feladat feltétele úgy is megfogalmazható, hogy tetszőleges A, B esetén létezik egy C, melyre $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq C \subseteq A \cup B$. Legyen A egy legnagyobb méretű halmaz egy $\mathcal{F}$ igazán rendes halmazcsaládban. Ekkor tetszőleges $B \in \mathcal{F}$ esetén $|A \cap B| \geq |B \setminus A|$, különben az A, B halmazokhoz tartozó C halmaz mérete nagyobb lenne $|A|$-nál. Feltehető, hogy A nem egyezik meg az n elemű X alaphalmazzal, különben kész vagyunk. Tekintsük a következő $\mathcal{F}'$ családot az $X \setminus A$ halmazon:

$$\mathcal{F}' = \{B \setminus A \mid B \in \mathcal{F}\}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez is igazán rendes halmazcsalád, így az indukció szerint van olyan $B' \in \mathcal{F}'$ eleme, melyre $|B'| \geq (n - |A|)/2$. Ekkor létezik egy $B \in \mathcal{F}$, melyre $B' = B \setminus A$. Ekkor $|A \cap B| \geq |B \setminus A|$ miatt $|B| \geq 2|B'| \geq n - |A|$. Mivel $|A| \geq |B|$, ezért $|A| \geq n - |A|$ vagyis $|A| \geq n/2$.

Mivel $f(n) \geq n/2$, ezért azonnal kapjuk, hogy $f(2^k - 1) \geq 2^{k-1}$ vagyis csak egy konstrukciót kell mutatnunk, ahol ez eléretik. Legyen az alaphalmaz $X = \mathbb{F}_2^k \setminus \{\underline{0}\}$. A halmazcsalád elemei pedig legyenek a következő halmazok: $H_a = \{x \in \mathbb{F}_2^k \mid (a, x) = 1\}$, ahol $a \in X$ és az (a, x) skalárszorzat $\mathbb{F}_2$-ben van kiszámolva; ezek a halmazok éppen az 1-kodimenziós alterek komplementerei. Ekkor minden $a \in X$ esetén $|H_a| = 2^{k-1}$. Továbbá $a \neq b$ esetén $H_a \cup H_b = H_a \cup H_{a+b} = H_b \cup H_{a+b}$, hiszen $(a+b, x) = (a, x) + (b, x)$ miatt a három halmaznak ugyanaz a komplementere. Végül a halmazcsalád elemeinek uniója a teljes X alaphalmaz, hiszen egyedül a nullvektor merőleges minden nemnulla vektorra.

3. feladat. Egy $n \times n$-es mátrixot *jólfésültnek* hívunk, ha minden eleme 0 vagy 1, és nem tartalmazza az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot részmátrixként. Lássuk be, hogy van olyan $c > 0$ konstans, amelyre teljesül, hogy bármely $n \times n$-es jólfésült mátrixnak van olyan, legalább $cn \times cn$-es részmátrixa, melynek minden eleme egyforma. (Egy jólfésült mátrix tartalmazhatja a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixot részmátrixként.)

(Pach János, Korándi Dániel és Tomon István)

Megoldás (Pálvölgyi Dömötör). A bizonyítás során megmutatjuk, hogy ha egy jólfésült mátrix nem tartalmazna $cn \times cn$-es, egyforma elemekből álló részmátrixot, akkor a középső néhány oszlop és sor mindegyikében vagy nagyon sok 0-s vagy nagyon sok 1-es van. Viszont sok sorban és oszlopban ugyanaz kell, hogy a domináns elem legyen, ebből pedig kihozzuk, hogy mégis csak lesz nagy részmátrix egyenlő elemekkel. $c = 1/20$-ra látjuk be a feladatot.

Ha $n < 20$, akkor egy 1×1-es részmátrix megteszi, ha pedig $n \geq 20$, akkor vehetünk olyan bal oldali, középső és jobb oldali oszlopokat (B, K, J), hogy a középsők az összes legalább felét, a bal és jobb oldaliak pedig az oszlopok legalább 1/5–1/5-ét kitegyék.

Tegyük fel, hogy a középső (K-ban lévő) oszlopok közül van olyan, aminek a (felülről) első néhány eleme között legalább $n/20$ db 0-s van, a későbbi (maradék alsó) elemei között meg legalább $n/20$ db 1-es van. Vegyünk egy ilyen oszlopot, és jelöljük ezen elemeinek megfelelő sorokat A_0-val és A_1-el.

Ekkor ha az $A_0 \times B$ részmátrix valamely oszlopában szerepel 1-es, akkor az $A_1 \times B$ részmátrix ugyanezen oszlopában csupa 1-es van. Emiatt vagy $A_0 \times B$-ben van $n/20 \times n/10$ méretű csupa 0 részmátrix, vagy $A_1 \times B$-ben van $n/20 \times n/10$ méretű csupa 1 részmátrix.

Ha a K-beli oszlopvektorok között olyan van, aminek az első néhány eleme között legalább $n/20$ db 1-es van, a maradék elemei között meg legalább $n/20$ db 0-s van, akkor ugyanígy készen vagyunk ha a J-beli oszlopokat vizsgáljuk.

Ha a K-beli oszlopvektorok között olyan van, amiben legalább $n/10$ db 0-s és $n/10$ db 1-es is van, akkor arra szükségszerűen teljesül a fenti két lehetőség valamelyike. Tehát a továbbiakban tegyük fel, hogy az összes K-beli oszlopvektorban az elemek legalább 9/10-e ugyanaz. Analóg módon a sorokat is szétosztjuk három részre, fenti, középső és lenti részekre (F, K', L), és ugyanígy gondolkodva feltehetjük, hogy K'-ben minden sor elemeinek legalább 9/10-e egyforma. Újra az oszlopokat vizsgálva, az általánosság megszorítása nélkül választhatunk legalább $n/4$, de legfeljebb $n/3$ K-beli oszlopot, amiben az elemek 9/10-e 1-es, jelöljük ezen oszlopokat E-vel. A $K' \times E$ részmátrixban legfeljebb $n^2/30$ db 0-s van, használva, hogy E az oszlopok legfeljebb 1/3-át teszi ki.

Mivel minden K'-beli sor domináns elemeinek legalább $9/10-3/4 = 3/20$ része ideesik, legfeljebb $(n^2/30)/(3n/20) = 2n/9$ darab sorvektorban lehet 0-s a domináns elem, azaz legalább $n/2-2n/9 = 5n/18$-ban az 1-es lesz az.

Ha minden 1 domináns oszlop- és sorvektor metszeténél 1-es van, akkor találtunk egy homogén részmátrixot. Különben lesz kettő, amiknek a metszete 0. De ekkor a sorvektorban a korábbi 1-esek oszlopai, és az oszlopvektorban a későbbi 1-esek sorai által meghatározott részmátrix csak 1-eseket tartalmazhat.

Megjegyzés. Ha adott a síkon n pont és n egyenes, amiket sorbarakunk x-koordinátájuk, illetve meredekségük szerint, és készítünk belőlük egy mátrixot, amibe aszerint írunk 0-t illetve 1-et, hogy az adott pont az egyenes fölött van-e, akkor $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$-mentes mátrixot kapunk. Tehát a feladatból következik, hogy lesz cn pont és cn egyenes, hogy vagy az összes pont az összes egyenes fölött lesz, vagy mind alatta.

4. feladat. Legyen P egy véges ponthalmaz a síkon, melyre teljesül, hogy bármely két pontjának távolsága egész szám. Lássuk be, hogy P pontjai színezhetőek három színnel úgy, hogy bármely két azonos színű pont távolsága páros legyen.

(Damásdi Gábor)

1. megoldás (Kun Gábor). A P halmaz pontjait komplex számokkal azonosítjuk. Feltehető, hogy $0 \in P$ és $n \in P$ is teljesül egy n páratlan egész számra. Legyen $a+ib \in P$ tetszőleges. Ekkor $(a^2+b^2)+n^2-((a-n)^2+b^2) = 2an$ páratlan. Ezért minden $x+iy \in nP$ elemre teljesül, hogy $2x$ egész szám. A továbbiakban az nP halmazt vizsgáljuk és jelöljük P-vel az egyszerűség kedvéért, hiszen ennek minden jó színezése az eredeti halmaznak is egy jó színezését adja.

$2x$ egész szám minden $x+iy \in P$-re, ezért $(2y)^2$ is egész kell, hogy legyen. Azaz alkalmas m egész számra és d négyzetmentes, pozitív egész számra $y = \frac{m}{2}\sqrt{d}$ teljesül. Belátjuk, hogy d ugyanaz kell, hogy legyen minden $x+iy \in P$-re, amikre $y \neq 0$:

Legyen $x_1+iy_1, x_2+iy_2 \in P, y_1 = \frac{m_1}{2}\sqrt{d_1} \neq 0, y_2 = \frac{m_2}{2}\sqrt{d_2} \neq 0$. Ekkor $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = (x_1-x_2)^2 + m_1^2 d_1/4 + m_2^2 d_2/4 - m_1 m_2\sqrt{d_1 d_2}/2$. Ez a kifejezés négyzetszám kell, hogy legyen. Az összeg első három tagja racionális. Ezért a negyedik, utolsó tagnak is racionálisnak kell lennie, ami csak úgy teljesülhet, ha $d_1 = d_2$. Azaz létezik olyan d négyzetmentes, pozitív egész szám, hogy $P \subseteq \Lambda = \{a/2 + i\sqrt{d}b/2 : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Először Λ vagy egy P-t tartalmazó részrácsa pontjait fogjuk majd színezni kettő vagy négy színnel úgy, hogy az azonos színű pontok távolsága soha ne legyen páratlan egész szám.

Ha d páros akkor $d \equiv 2(4)$, ezért $|a/2+i\sqrt{d}b/2|^2 = a^2/4 + db^2/4$ csak úgy lehet egész szám, ha a és b is páros, ezért $P \subseteq 2\Lambda$. Továbbá, ha $a^2/4+db^2/4$ páratlan akkor $a \equiv 2(4)$. Így 2Λ pontjai már két színnel is színezhetőek $a/2$ paritásának megfelelően.

Ha d páratlan és $d \equiv 1(4)$ akkor $a^2/4+db^2/4$ csak úgy lehet egész szám, ha a és b is páros, ezért $P \subseteq 2\Lambda$. És akkor lesz páratlan, ha $\frac{a+b}{2}$ páratlan. Ezért 2Λ pontjai ismét két színnel színezhetőek, ezúttal $\frac{a+b}{2}$ paritása szerint.

Ha $d \equiv -1(4)$ akkor $a^2/4+db^2/4$ pontosan akkor egész szám, ha $a+b$ páros. Két alesetet különböztetünk meg:

Ha $d \equiv -1(8)$ és $a^2/4+db^2/4$ páratlan akkor a és b is páros, és a kettő közül pontosan egy osztható néggyel. Ez esetben is $P \subseteq 2\Lambda$, és 2Λ pontjai két színnel színezhetőek $\frac{a+b}{2}$ paritása szerint.

Ha $d \equiv 3(8)$ akkor $a^2/4 + db^2/4$ pontosan akkor páratlan, ha a és b is páratlan vagy, ha mindkettő páros és pontosan az egyik osztható néggyel. Ez alapján Λ-nak azon $a + ib$ alakú elemeit, melyekre $(a + b)$ páros, négy színnel színezhetjük - a paritása és $\frac{a+b}{2}$ paritása szerint. Az azonos színű pontok távolsága nem lehet páratlan szám. Vegyük észre, hogy a különböző színű pontok távolságának négyzete viszont mindig páratlan. Meg kell még mutatnunk, hogy P nem tartalmazhat mind a négy színosztályból pontot, így P három színnel színezhető. Elég belátnunk, hogy nincs négy pont a síkon, melyek közül bármely kettő távolsága páratlan:

Indirektül bizonyítunk. A tetraéder térfogatát az élhosszakkal kifejező Cayley-Menger determináns ebben az elfajuló esetben, amikor a tetraéder pontjai egy síkba esnek, nulla. Jelölje a pontok közti távolságot $d_{i,j}$, ahol $1 \leq i, j \leq 4, i \neq j$. Számoljuk ki a determinánst modulo 8.

$$0 \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{1,2}^2 & d_{1,3}^2 & d_{1,4}^2 \\ 1 & d_{2,1}^2 & 0 & d_{2,3}^2 & d_{2,4}^2 \\ 1 & d_{3,1}^2 & d_{3,2}^2 & 0 & d_{3,4}^2 \\ 1 & d_{4,1}^2 & d_{4,2}^2 & d_{4,3}^2 & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \equiv 4$$

A második egyenlőségnél felhasználtuk, hogy a távolságok páratlanok, a harmadik egyenlőségnél pedig az első oszlopot kivontuk a többiből. Ellentmondásra jutottunk, tehát nem létezik négy olyan pont a síkon, hogy bármely kettő távolsága páratlan. Ezzel a feladat bizonyítását befejeztük.

2. megoldás (Harangi Viktor). Tekintsük azt a G gráfot, amelynek csúcsai P pontjai, és két csúcs akkor van összekötve éllel, ha a megfelelő távolság páratlan. Azt kell belátnunk, hogy G csúcsai jól-színezhetők 3 színnel. Ez a következő állításból könnyen következik majd.

Lemma. G nem tartalmazhatja a következő gráfokat feszített részgráfként:

- K_4: teljes gráf 4 csúcson;
- P_3: 3 hosszú út (azaz 4 csúcs és 3 él);
- H: az a négy csúcsú gráf, amit egy három ágú csillagból kapunk egy további él hozzávételével.

Először tegyük fel, hogy adott egy G gráf, mely nem tartalmazza a fenti feszített részgráfokat. Megmutatjak, hogy 3-színezhető. Feltehetjük, hogy G összefüggő, hiszen elég komponensenként megadni a színezést. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: G nem tartalmaz K_3-at. Azt állítjuk, hogy ekkor semmilyen páratlan kört nem tartalmaz, azaz páros gráf, azaz két színnel is jól-színezhető. Indirekten vegyünk egy minimális hosszú páratlan kört. Vegyük észre, hogy nem lehet egyetlen „átló” sem behúzva a körben, mert akkor találnánk rövidebb páratlan kört is. Tehát ez a kör egy feszített részgráfja G-nek, ráadásul legalább öt hosszú, mert G nem tartalmaz K_3-at a feltevésünk szerint. Ekkor viszont találunk feszített P_3-at is a gráfban, ami ellentmondás.

2. eset: G tartalmaz K_3-at. Legyen $v_1v_2v_3$ egy három hosszú kör. Mivel nincs feszített K_4 és H a gráfban, ezért minden további u csúcsra igaz, hogy v_1, v_2, v_3 közül vagy eggyel se, vagy pontosan kettővel van összekötve. Ez alapján négy osztályba sorolhatjuk a többi csúcsot: $U_\emptyset$, $U_{1,2}$, $U_{1,3}$, $U_{2,3}$. Az $U_{i,j}$ osztályban lévő csúcsok össze vannak kötve v_i-vel és v_j-vel is, így az osztályon belül már nem mehet él, különben találnánk K_4-et. Egy $U_\emptyset$ osztályban lévő pont v_1, v_2, v_3 csúcsok semelyikével nincs összekötve. Ekkor viszont $U_{i,j}$ osztálybeli szomszédja sem lehet, különben könnyen találnánk feszített P_3-at. Azonban feltevésünk szerint G összefüggő, így $U_\emptyset$ valójában nem tartalmazhat csúcsot. Ekkor viszont készen vagyunk, hiszen a $\{v_1\} \cup U_{2,3}$; $\{v_2\} \cup U_{1,3}$; $\{v_3\} \cup U_{1,2}$ három független halmazra bontja G csúcsait.

Be kell még bizonyítanunk a Lemma állítását. Ez azonnal következik abból, hogy tetszőleges négy pontot választva P-ből a távolságnégyzetekből álló Cayley–Menger determináns 0 (lásd előző megoldás). Ha modulo 8 nézzük a determinánst, akkor látjuk, hogy nem lehet K_4 a gráfban:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 4 \pmod 8.$$

Ha pedig modulo 4, akkor kizárhatjuk a feszített P_3 illetve a feszített H előfordulását:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 2 \pmod 4 \text{ illetve } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 2 \pmod 4.$$

5. feladat. Tetszőleges n természetes számra legyen

$$f(n) = \sum_{p|n} p^{k_p},$$

ahol p végigfut n prímosztóin, és k_p az az egész szám, amelyre

$$p^{k_p} \le n < p^{k_p+1}.$$

Mekkora

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)\log\log n}{n\log n}?$$

(Ruzsa Imre)

Megoldás (Ruzsa Imre). A válasz 1. Mivel $f(n) \le n\omega(n)$, a felső becslés nyilvánvaló. Készítünk olyan n számot, amelyre közel éles. Evégett válasszunk egy $c > 1$ számot (kb. a cél $1/c$ -szerese lesz $f(n)$), majd k és x számokat (ezek összefüggése majd kiderül).

Tekintsük a (p^j, cp^j) intervallumokat, ahol p az első k prímszám valamelyike és j-t pedig az $x \le p^j < px$ feltétel definiálja. Ezen intervallumok logaritmusának a hossza $\log c$, és mind részei az $[x, cp_k x]$ intervallumnak, amely logaritmusának hossza $\log(cp_k)$, ahol p_k a k-ik prím. Így van olyan szám, amely közülük legalábbis

$$r = \left\lceil \frac{k\log c}{\log(cp_k)} \right\rceil$$

darabban benne van. Legyen m ilyen szám, és legyenek $q_1, \ldots, q_r$ az intervallumokat meghatározó prímek (ha $> r$ van, csak r-et tartunk meg). Legyen n olyan szám, hogy

$$q_1 \ldots q_r | n, \ m \le n \le m + q_1 \ldots q_r.$$

Ekkor

$$f(n) \ge \frac{rm}{c} \ge \frac{r(n - q_1 \ldots q_r)}{c} > \frac{r(n - p_k^r)}{c}.$$

Az x-et úgy érdemes választani, hogy p_k^r-nél némileg nagyobb legyen, mondjuk $x = kp_k^r$. Ekkor

$$\frac{f(n)}{n} > \frac{r}{c}\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Megbecsüljük a szereplő számokat:

$$\log n \sim \log x = \log k + r \log p_k \sim r \log k \sim k \log c,$$

$$k \sim \frac{\log n}{\log c}, \ r \sim \frac{\log n}{\log k} \sim \frac{\log n}{\log \log n},$$

$$f(n) \sim \frac{n \log n}{c \log \log n}.$$

6. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha a egész szám, és d pozitív osztója az $a^4 + a^3 + 2a^2 - 4a + 3$ számnak, akkor d negyedik hatvány modulo 13.

(Kós Géza)

Megoldás (Seress Dániel megoldása alapján). Mivel d pozitív, előáll prímszámok szorzataként; ezért az állítást elég a d (pozitív) prímosztóira igazolni. Legyen $d = p$ prím.

Legyen ε primitív 13-adik egységgyök $\mathbb{F}_p$ fölött. (A $p = 13$ esetben $x^{13} - 1 = (x-1)^{13}$ miatt az 1 az egyetlen 13-adik egységgyök; ha viszont $p \neq 13$, akkor a $x^{13} - 1$ polinomnak nincsenek többszörös gyökei, így 13 különböző 13-adik egységgyök létezik.)

A kalapból nyuszi: legyen

$$A = \varepsilon + \varepsilon^3 + \varepsilon^9, \quad B = \varepsilon^2 + \varepsilon^6 + \varepsilon^5, \quad C = \varepsilon^4 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{10} \quad \text{és} \quad D = \varepsilon^8 + \varepsilon^{11} + \varepsilon^7$$

($\mathbb{Q}(\varepsilon)$-ban az $\varepsilon \mapsto \varepsilon^2$ automorfizmus hatása $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$ lenne), és vegyük észre, hogy

$$X^4 + X^3 + 2X^2 - 4X + 3 = (X - A)(X - B)(X - C)(X - D).$$

Feltehető, hogy $A = a \in \mathbb{F}_p$. Ekkor minden nemnegatív egész k-ra — a kis Fermat-tételt k-szor alkalmazva —

$$A = A^{p^k} = \varepsilon^{p^k} + \varepsilon^{3p^k} + \varepsilon^{9p^k}.$$

Ha p nem negyedik hatvány modulo 13, akkor $k = 1$ vagy $k = 2$ választással $A = C$ adódik.

Ekkor az ε, ε^3 és ε^9 elemek a következő, $\mathbb{F}_p$ fölötti polinom gyökei:

$$(X - \varepsilon)(X - \varepsilon^3)(X - \varepsilon^9) = X^3 - AX^2 + CX - 1, \tag{$*$}$$

amely $C = A$ miatt szorzattá bomlik: $(X-1)(X^2+X+1-AX)$. Így az ε, ε^3 és ε^9 elemek valamelyike 1, ahonnan $p = 13$, ami negyedik hatvány modulo 13, ellentmondás.

1. megjegyzés. Más módon, indirekt feltevés nélkül is belátható, hogy ha $A \in \mathbb{F}_p$, akkor $C \in \mathbb{F}_p$. Ha $p \neq 3$, akkor ez a $3C = 3 - 2A - A^3$ azonosságból következik, ha pedig $p = 3$, akkor az

$$\begin{aligned}(X - A)(X - B)(X - C)(X - D) &= X^4 + X^3 + 2X^2 - 4X + 3 = \\ &= X^4 + X^3 - X^2 - X = X(X-1)(X+1)^2\end{aligned}$$

azonosságból. Sőt, $B = A^2 - 2C$ és $D = C^2 - 2A$ is $\mathbb{F}_p$-beli.

A megoldás egy másik lehetséges befejezése a következő. Az ε, ε^3 és ε^9 elemek ciklikusan egymás köbei, így ha valamelyikük $\mathbb{F}_p$-beli, akkor a másik kettő is. Ellenkező esetben ($*$) irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött, és a gyökök $\mathbb{F}_{p^3}$-ben vannak. Mindegyik esetben igaz, hogy $\varepsilon \in \mathbb{F}_{p^3}$, így ε rendje osztja az $\mathbb{F}_{p^3}$ test multiplikatív csoportjának rendjét: $13 \big| p^3 - 1$, más szóval $p^3 \equiv 1 \pmod{13}$, avagy p negyedik hatvány modulo 13.

2. megjegyzés. A $p \equiv 0,1,3,9 \pmod{13}$ esetek mind lehetségesek. Például a $(p=13, a=3)$, $(p=521=13\cdot 20+1, a=7)$, $(p=3, a=0)$, $(p=113=13\cdot 8+9, a=4)$ párok mind teljesítik a feltételt.

Ezeket a példákat egy közös esetbe is belesűríthetjük: például $a=250$ esetén $a^4+a^3+2a^2-4a+3=3921999003=3^2\cdot 13\cdot 79\cdot 211\cdot 2011$; itt $13\equiv 0 \pmod{13}$, $79\equiv 1 \pmod{13}$, $211\equiv 3 \pmod{13}$ és $2011\equiv 9 \pmod{13}$.

Kicsit általánosabban, minden olyan p prímhez, amelyre $p\equiv 0,1,3,9 \pmod{13}$, létezik olyan a, amire $p\big|a^4+a^3+2a^2-4a+3$. Ha $p\neq 13$, tehát $13\big|p^3-1$, akkor a $\mathbb{F}_{p^3}{}^*$ ciklikus csoport rendje osztható 13-mal, ezért a 13-adik egységgyökök $\mathbb{F}_{p^3}$-beliek, az A,B,C,D elemek pedig $\mathbb{F}_p$-beliek.

7. feladat. Határozzuk meg azokat az $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ függvényeket, amelyek teljesítik az

$$f(f(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n}),f(a_{21},a_{22},\dots,a_{2n}),\dots,f(a_{n1},a_{n2},\dots,a_{nn}))$$
$$=f(f(a_{11},a_{21},\dots,a_{n1}),f(a_{12},a_{22},\dots,a_{n2}),\dots,f(a_{1n},a_{2n},\dots,a_{nn}))$$

egyenlőséget az $a_{ij}\in\{0,1\}$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ elemek tetszőleges választása mellett.

(Pálfy Péter Pál)

Megoldás (Kun Gábor). Nevezzük az f függvény i-edik koordinátáját semlegesnek, ha tetszőleges $x_1,\dots,x_n$ elemekre $f(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_{i-1},1-x_i,x_{i+1},\dots x_n)$, lineárisnak, ha tetszőleges $x_1,\dots,x_n$ elemekre $f(x_1,\dots,x_n)\neq f(x_1,\dots,x_{i-1},1-x_i,x_{i+1},\dots x_n)$, és (a,b)-döntőnek, ahol $a,b\in\{0,1\}$, ha $f(x_1,\dots,x_n)=b$ amennyiben $x_i=a$.

Lemma. f minden koordinátája vagy semleges, vagy lineáris, vagy alkalmas (a,b) pár(ok)ra (a,b)-döntő.

Bizonyítás. Indirektül bizonyítunk: Tegyük fel, hogy az első koordináta egyik feltételt sem teljesíti. Mivel nem semleges és nem lineáris, vannak olyan elemek, $x_2,\dots,x_n$ és $y_2,\dots,y_n$, hogy $f(0,x_2,\dots,x_n)\neq f(1,x_2,\dots,x_n)$, viszont $f(0,y_2,\dots,y_n)=f(1,y_2,\dots,y_n)$. Mivel x_1 nem döntő koordináta, ezért minden $2\le k\le n$-re vannak olyan $a_{i,2},\dots,a_{i,n}$ elemek, hogy $f(y_i,a_{i,2},\dots,a_{i,n})=x_i$. Legyen $a_{i,1}=y_i$ és $a_{1,i}=x_i$ minden $2\le i\le n$ esetén. Nézzük meg az egyenlőség mindkét oldalát, mint egy változós függvényt $a_{1,1}$-ben, hogy hogyan függ $a_{1,1}$-től! A jobb oldal nem függ tőle, hiszen $f(0,a_{2,1},\dots,a_{n,1})=f(0,y_2,\dots,y_n)=f(1,y_2,\dots,y_n)=f(1,a_{2,1},\dots,a_{n,1})$. A bal oldal viszont $f(f(a_{1,1},x_2,\dots,x_n),x_2,\dots,x_n)$, ami $a_{1,1}$ választásától függően mindkét értéket felveheti. Az egyenlőség nem teljesül $a_{1,1}$ egyik választására, ami bizonyítja a lemmát.

Milyen tulajdonságú koordinátái lehetnek egyszerre f-nek a felsoroltakból?

Világos, hogy f-nek nem lehet egyszerre egy lineáris és egy másik, (a,b)-döntő koordinátája semmilyen (a,b) párra.

Tegyük fel, hogy ha van (a,b)-döntő koordinátája és $a\neq b$. Megmutatjuk, hogy a többi változó semleges, azaz f konstans vagy egy változós (affin) lineáris függvény. Az egyszerűség kedvéért legyen ez az első koordináta, továbbá legyen $a=0, b=1$. Ha $f(1,\dots,1)=0$ akkor legyen $a_{1,i}=1$ minden $1\le i\le n$ esetén. Ezek miatt az egyenlet bal oldala mindenképpen 1. A függvény többi változója semleges, különben a többi $a_{i,j}$ választható úgy, hogy a jobb oldal viszont 0 legyen. Ha pedig $f(1,\dots,1)=1$ akkor legyen ismét $a_{1,i}=0$ minden $1\le i\le n$ esetén. Ezek miatt az egyenlet bal oldala mindenképpen 1. A függvény többi változója az első kivételével pedig semleges, különben a többi $a_{i,j}$ választható úgy, hogy a jobb oldal viszont 0 legyen.

Az is egyértelmű, hogy f-nek nem lehet egyszerre $(0,0)$-döntő és $(1,1)$-döntő koordinátája. Így minden alkalmas f koordinátái - a semlegesek kivételével - vagy mind lineárisak, vagy mind $(0,0)$-döntők, vagy mind $(1,1)$-döntők. Most már karakterizálhatjuk az egyenletet teljesítő függvényeket.

Ha minden koordinátája semleges akkor f konstans.

Ha minden koordinátája lineáris vagy semleges akkor alkalmas $H\subseteq\{1,\dots,n\}$ halmazra vagy $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i\in H}x_i$, vagy $f(x_1,\dots,x_n)=1+\sum_{i\in H}x_i$, ahol modulo 2 adunk össze.

Ha minden koordináta semleges vagy $(0,0)$-döntő akkor alkalmas $H \subseteq \{1,\ldots,n\}$-re $f(x_1,\ldots,x_n) = \bigwedge_{i\in H} x_i$.

Ha pedig minden koordináta semleges vagy $(1,1)$-döntő akkor alkalmas $H \subseteq \{1,\ldots,n\}$-re $f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{i\in H} x_i$.

Ezek valóban teljesítik a feladat egyenlőségét, más függvényre pedig nem teljesül.

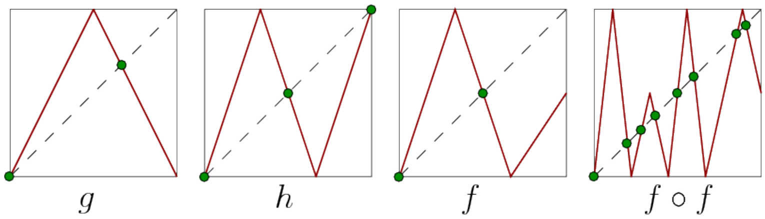
8. feladat. Létezik-e olyan szakaszonként lineáris, folytonos, szürjektív $f : [0,1] \to [0,1]$ leképezés, amelyre $f(0) = f(1) = 0$, és minden pozitív egész n-re

$$2{,}0001^{(n-10)} < P_n(f) < 2{,}9999^{(n+10)}$$

teljesül, ahol $P_n(f)$ az olyan x pontok száma, amelyekre $\underbrace{f(\ldots f}_{n}(x)\ldots) = x$?

(Buczolich Zoltán)

1. megoldás (Kós Géza). Először az $f(1) = 0$ feltételt elfelejtve egy megoldás: Az ábrán a g függvény nem jó, mert g^n-nek 2^n, vagyis túl kevés fixpontja van. A h függvény meg azért nem jó, mert h^n-nek 3^n, vagyis túl sok fixpontja van.



Próbáljunk ki valamit a kettő között, mondjuk az f-et:

$$f(0) = 0, \quad f(\tfrac{1}{3}) = 1, \quad f(\tfrac{2}{3}) = 0, \quad f(\tfrac{1}{2}) = f(1) = \tfrac{1}{2}.$$

Az $f \circ f$ függvény 8 lineáris szakaszból áll, ebből 5 "hosszú": a szakasz mentén a függvény mindent felvesz 0-tól 1-ig.

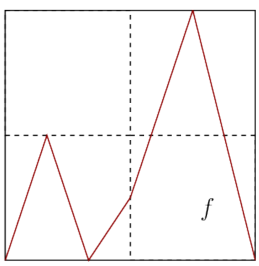
Indukcióval, az f^{2n} legfeljebb 8^n lineáris szakaszból áll, ezekből legalább 5^n hosszú. Minden lineáris szakaszon legfeljebb 1 fixpont van, mert a meredekségek csak 1-nél nagyobbak vagy (-1)-nél kisebbek lehetnek; a hosszú szakaszokon pontosan 1 fixpont van. Tehát

$$5^n \le P_{2n}(f) \le 8^n$$

Ugyanígy, az f^{2n+1} legfeljebb $3 \cdot 8^{2n}$ lineáris szakaszból áll, ebből legalább $2 \cdot 5^{2n}$ hosszú.

$$2 \cdot 5^n \le P_{2n+1}(f) \le 3 \cdot 8^n.$$

Ezek után jöjjön a konstrukció az eredeti feladatra:



$$f(0) = 0, \quad f(\tfrac{1}{6}) = \tfrac{1}{2}, \quad f(\tfrac{1}{3}) = 0, \quad f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}, \quad f(\tfrac{3}{4}) = 1, \quad f(1) = 0.$$

A bal alsó sarok a korábbi függvény, felére kicsinyítve.

A kis ($\frac{1}{2}$-nél nem nagyobb) fixpontok száma ugyanaz, mint fent. A nagy ($\frac{1}{2}$-nél nagyobb) fixpontok száma triviálisan 2^n. Tehát

$$5^n + 2^{2n} \le P_{2n}(f) \le 8^n + 2^{2n}$$

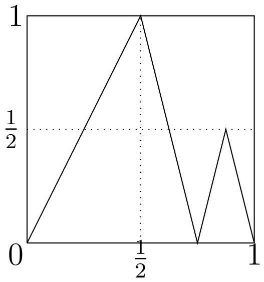
és

$$2 \cdot 5^n + 2^{2n} \le P_{2n+1}(f) \le 3 \cdot 8^n + 2^{2n}$$

amiből

$$\left(\sqrt{5}\right)^{n-1} < P_n(f) < \left(2\sqrt{2}\right)^{n+1}.$$

2. megoldás (Kiss Viktor). Legyen f a képen látható függvény, azt mutatjuk meg, hogy ez jó.



Könnyen meggondolható, hogy f^n grafikonja is néhány hosszú (azaz 0-tól 1-ig menő) illetve néhány rövid (azaz 0-tól $\frac{1}{2}$-ig menő) szakaszból áll. Sőt, $f^n(\frac{1}{2}) = 0$, ha $n > 1$, szóval ezek a szakaszok vagy a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumban, vagy az $[\frac{1}{2}, 1]$ intervallumban vannak. Jelölje h_n^b az f^n bal oldalára, $[0, \frac{1}{2}]$-be eső hosszú szakaszok számát, r_n^b a rövidekét, h_n^j a jobb oldali hosszú szakaszok hosszát, r_n^j pedig a rövidekét. Könnyen meggondolható, hogy f^{n+1} grafikonja $[0, \frac{1}{2}]$-en azt csinálja, amit f^n $[0, 1]$-en, $[\frac{1}{2}, 1]$-en pedig egyszer bejárja f^n egészét (visszafele), kétszer pedig f^n $[0, \frac{1}{2}]$-be eső részét.

Így $h_{n+1}^b = h_n^b + h_n^j$, $r_{n+1}^b = r_n^b + r_n^j$, $h_{n+1}^j = 3 \cdot h_n^b + h_n^j$, $r_{n+1}^j = 3 \cdot r_n^b + r_n^j$. Az is világos, hogy $P_n(f) = h_n^b + h_n^j + r_n^b$, tehát csak ezeket a mennyiségeket kellene becsülni.

Most belátjuk, hogy $h_{n+2}^b = 2 \cdot h_{n+1}^b + 2 \cdot h_n^b$, valamint hasonlóan h_n^j-re.

$$h_{n+2}^b = h_{n+1}^b + h_{n+1}^j = h_{n+1}^b + 3 \cdot h_n^b + h_n^j = h_{n+1}^b + (2 \cdot h_n^b + h_{n+1}^b) = 2 \cdot h_{n+1}^b + 2 \cdot h_n^b.$$

Hasonlóan,

$$h_{n+2}^j = 3 \cdot h_{n+1}^b + h_{n+1}^j = 3 \cdot h_n^b + 3 \cdot h_n^j + h_{n+1}^j = h_{n+1}^j + 2 \cdot h_n^j + h_{n+1}^j = 2 \cdot h_{n+1}^j + 2 \cdot h_n^j.$$

Világos, hogy az analóg állítások elmondhatóak az r_n^b és r_n^j sorozatokra. A szokásos módszerekkel zárt formulát adva a sorozatokra kiszámolható, hogy f^n fixpontjainak száma $\left(1 + \sqrt{3}\right)^n + \left(1 - \sqrt{3}\right)^n$.

Ha nem akarjuk ezt használni, akkor észrevehetjük, hogy $2,1^n < h_{n+1}^b, h_n^j, r_{n+1}^b, r_{n+1}^j < 2.9^n$ teljesül $n = 3, 4$ esetén, és innen könnyű indukcióval belátni, használva a rekurziót, hogy minden nagyobb n-re is fog.

9. feladat. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ egészfüggvény, és tegyük fel, hogy a deriváltakból álló $f^{(n)}$ függvénysorozat pontonként konvergens. Bizonyítsuk be, hogy ekkor alkalmas C komplex számmal $f^{(n)}(z) \to Ce^z$ pontonként.

(Lempert László)

Megoldás (Kós Géza). A feltételből csak annyit használunk fel, hogy az $\left(f^{(n)}(0)\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens. (Emellett a lenti bizonyításból valójában az is adódik, hogy a konvergencia lokálisan egyenletes.)

Legyen $C = \lim f^{(n)}(0)$ és $g(z) = f(z) - Ce^z$; ekkor $g^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) - C \to 0$. Legyen a $g(z)$ egészfüggvény 0 körüli hatványsora $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; a feltétel szerint $g^{(n)}(0) = n! \cdot a_n \to 0$.

Vegyünk egy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ számot és egy tetszőleges $\varepsilon > 0$-t. Mivel $n! \cdot a_n \to 0$, van olyan n_0, hogy $n > n_0$ esetén $n! \cdot |a_n| < e^{-|z|}\varepsilon$ teljesül. Ekkor

$$\left|f^{(n)}(z) - Ce^z\right| = \left|g^{(n)}(z)\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)\cdots(k+n)a_{k+n}z^k\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdots(k+n)\cdot\left|a_{k+n}\right|\cdot|z|^k < \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdots(k+n)\frac{e^{-|z|}\varepsilon}{(k+n)!}|z|^k =$$

$$= e^{-|z|}\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|}\cdot e^{-|z|}\varepsilon = \varepsilon.$$

Tehát minden z-hez és $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0, hogy minden $n \ge n_0$-ra $\left|f^{(n)}(z) - Ce^z\right| < \varepsilon$, vagyis $f^{(n)}(z) \to Ce^z$ pontonként.

10. feladat. Adott a 3-dimenziós hiperbolikus térben a P sík és négy különböző egyenes: az a_1 és a_2 egyenesek merőlegesek P-re, az r_1 és r_2 egyenesek pedig nem metszik P-t, és távolságuk P-től ugyanakkora. Jelölje $i = 1, 2$ esetén S_i azt a forgásfelületet, melyet úgy kaphatunk, hogy r_i-t körbeforgatjuk a_i körül. Mutassuk meg, hogy S_1 és S_2 közös pontjai lefedhetők két síkkal.

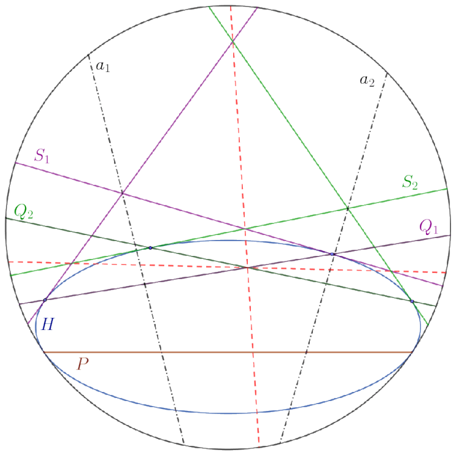
(Kós Géza)

1. megoldás (Frenkel Péter). Ha valamely i-re r_i egy a_i-re merőleges síkban van, akkor S_i is abban a síkban van, és készen vagyunk. A továbbiakban feltesszük, hogy egyik i-re sem történik ez.

A hiperbolikus tér Cayley–Klein–Beltrami-modelljében P egy $\mathbb{R}^3$-beli síknak, mindegyik a_i és r_i egy-egy $\mathbb{R}^3$-beli egyenesnek, az S_i pedig valamely másodrendű felületnek (hengernek, kúpnak vagy egyköpenyű hiperboloidnak) az egységgolyóba eső része.

I. eset: r_1 és r_2 távolsága P-től pozitív, azaz ultraparallelek P-hez.

Legyen H azon pontok mértani helye, amelyek olyan távol vannak P-től, mint r_1 és r_2 mindketteje. Ez a H egy hiperszféra, amely mindkét S_i-t egy-egy kör mentén érinti. A modellben H egy ellipszoid. Legyen Q_i annak a síknak a négyzete, amelyben S_i és H érintési pontjai vannak.



II. eset: r_1 és r_2 távolsága P-től nulla, azaz párhuzamosak P-vel.

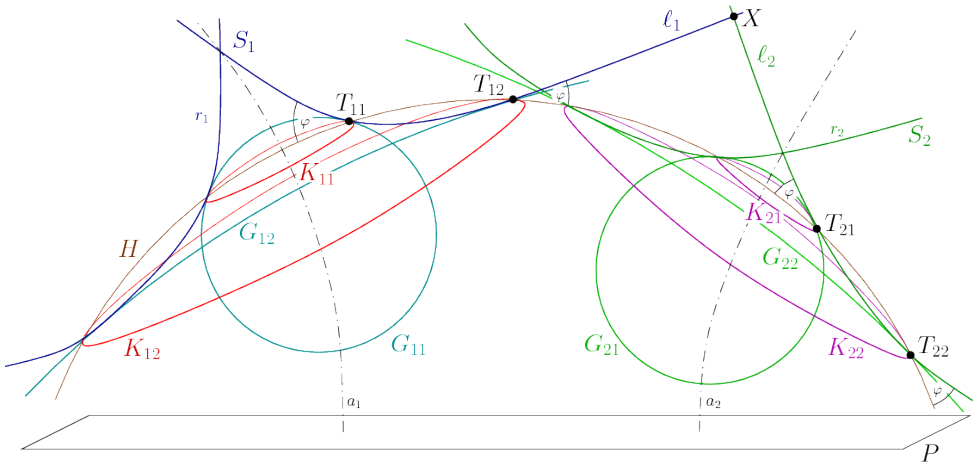
Legyen H a végtelen távoli gömb. A modellben H az egységgömb. Legyen Q_i annak a két síknak az uniója, amelyeken az S_i végtelen távoli pontjai vannak: az egyik sík P, a másik sík az r_i nem P-n lévő végtelen távoli pontjának a_i körüli elforgatottjaira illeszkedik — ha r_i párhuzamos a_i-vel is, akkor a közös végtelen távoli pontjukban vesszük H érintősíkját.

Mindkét eset: Az így definiált $Q_i \subset \mathbb{R}^3$ elfajuló másodrendű felület tagja az S_i-t H-val összekötő felületsornak. Így mindkét Q_i a H, S_1 és S_2 feszítette lineáris másodrendűfelület-sereg tagja, s emiatt a Q_1 és Q_2 által kifeszített (esetleg az egyetlen $Q_1 = Q_2$ felületből álló) felületsornak van egy Q közös tagja az S_1 és S_2 által kifeszített felületsorral. Ez a Q két (esetleg egybeeső) sík uniója, és az S_1 és S_2 összes közös pontja illeszkedik rá.

2. megoldás (Kós Géza). Feltételezzük, hogy S_1 és S_2 a P síknak ugyanazon az oldalán van (különben nem lehet közös pontjuk), és egyik sem esik bele egy síkba.

Vegyünk fel P-nek az S_i-ket tartalmazó oldalán egy H távolságfelületet, amelynek pontjai a P-től azonos távolságban vannak, és ezt a távolságot válasszuk olyan nagynak, hogy H elmesse az r_1 és r_2 egyeneseket, és velük együtt S_1-et és S_2-t is. A szimmetria miatt az r_i egyenesek ugyanakkora φ szögben, egyszer vagy kétszer döfik a H hiperszférát, ennek megfelelően mindkét S_i egy vagy két körvonalban metszi H-t; jelölje ezeket a körvonalakat K_{ij} $(i,j=1,2)$. Ha csak egy-egy körvonal van, akkor az egyszerűség kedvéért legyen $K_{i1}=K_{i2}$.

Illesszünk mindegyik K_{ij} körre egy olyan G_{ij} állandó görbületű felületet (gömböt, horoszférát vagy hiperszférát), amely a kör mentén érinti az S_i felületet.



Tekintsünk most egy tetszőleges $X \in S_1 \cap S_2$ pontot. Ezen átmegy mindkét S_i-nek egy-egy ℓ_i alkotója (az r_i egyenes egy elforgatottja), amely érinti a G_{i1}, illetve a G_{i2} szférát.

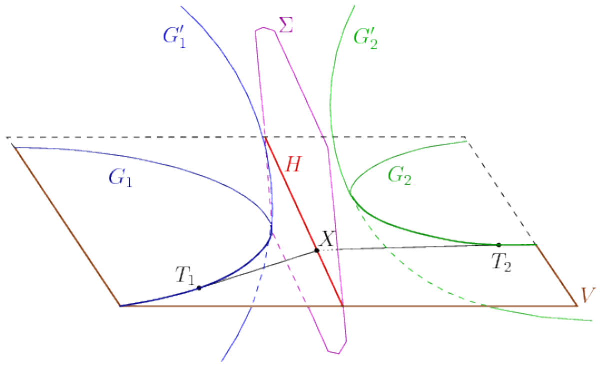
Legyen $T_{ij}=\ell_i \cap K_{ij}$ az ℓ_i alkotónak a K_{ij} körre eső pontja. Az ℓ_1 és ℓ_2 egyenesek ugyanakkora, φ szögben döfik H-t, ezért a két egyenes mentén mért XT_{11} és XT_{12} távolságok — valamilyen sorrendben — megegyeznek a XT_{11} és XT_{12} távolságokkal.

Ha $XT_{11}=XT_{21}$ (és egyúttal $XT_{12}=XT_{22}$), akkor az X pontból egyforma hosszú érintőt lehet húzni a G_{11} és G_{21} szférákhoz, ezért X illeszkedik G_{11} és G_{21} hatványsíkjára (egyben illeszkedik G_{12} és G_{22} hatványsíkjára is). Ha pedig $XT_{11}=XT_{22}$ (és egyúttal $XT_{12}=XT_{21}$), akkor az X pont illeszkedik G_{11} és G_{22} hatványsíkjára (egyben illeszkedik G_{12} és G_{21} hatványsíkjára is).

Tehát, G_{11} és G_{21} hatványsíkja, valamint G_{11} és G_{22} hatványsíkja együttesen lefedi a $S_1 \cap S_2$ halmazt.

Megjegyzés. Ismert, hogy azok az X pontok, ahonnan két adott gömbhöz, horo- vagy hiperszférához egyenlő hosszúságú érintőt lehet húzni, egy síkban vannak. Legyen G_1 és G_2 a két felület és XT_1, XT_2 ezekhez húzott egyenlő érintő szakaszok.

Az objektumainkat helyezzük el a 4-dimeziós tér egy 3-dimenziós V hipersíkjában. Illesszünk a két felületre egybevágó, 4-dimenziós G_1' és G_2' hiperszférákat. Az XT_1, XT_2 szakaszok a G_1' és G_2' hiperszférákat is érintik, ezért X benne van G_1' és G_2' (3-dimenziós) Σ szimmetriahipersíkjában. A kérdéses X pontok (ha léteznek) a 2-dimenziós $V \cap \Sigma$ síkban vannak.



11. feladat. Egy m-dimenziós sima sokaságot *parallelizálhatónak* nevezünk, ha van rajta m darab sima érintő vektormező, melyek minden pontban lineárisan függetlenek. Bizonyítsuk be, hogy ha M egy zárt, irányítható, $2n$-dimenziós, 0 Euler-karakterisztikájú sima sokaság, mely immertálható egy parallelizálható $(2n+1)$-dimenziós N sima sokaságba, akkor M maga is parallelizálható.

(Szűcs András, Terpai Tamás)

Megoldás (Szűcs András, Terpai Tamás). Rögzítsünk egy $\langle , \rangle$ Riemann-metrikát N-en és válasszunk egy $v_1, \ldots, v_{2n+1} \in \Gamma(TN)$ trivializációját N érintőnyalábjának. Ez megad egy $\kappa : TN \to \mathbb{R}^{2n+1}$, $\kappa(v) = (\langle v, v_1\rangle, \ldots, \langle v, v_{2n+1}\rangle)$ fibrumonkénti lineáris izomorfizmust TN-ből a pont feletti triviális $2n+1$ rangú nyalábba. $\mathbb{R}^{2n+1}$-en válasszunk egy irányítást, ezt κ-val visszahúzva kapunk egy irányítást TN-en.

Legyen $f : M \looparrowright N$ egy immerzió, és rögzítsük M egy irányítását. Minden $p \in M$ pontban $df(T_pM)$ egy 1 kodimenziós irányított altere $T_{f(p)}N$-nek, így a két lehetséges egységnyi normálvektorból kanonikusan kiválaszthatjuk az egyiket; jelölje ezt $\widetilde{\nu}(p)$. Ezt a vektort κ-val előretolva és ($\mathbb{R}^{2n+1}$ szokásos Riemann-metrikájában) egységnyire visszanormálva kapjuk a $\nu(p) = \frac{\kappa(\widetilde{\nu}(p))}{\|\kappa(\widetilde{\nu}(p))\|} \in T_0\mathbb{R}^{2n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+1}$ vektort minden $p \in M$ esetén. A normálás miatt ν az S^{2n} egységgömbre képez, és azt állítjuk, hogy $TM \cong \nu^* TS^{2n}$. Valóban, a $T_pM \ni v \mapsto \kappa(df(v)) + \nu(p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ leképezés egy fibrumonkénti izomorfizmus TM-ből TS^{2n}-be a $\nu : M \to S^{2n}$ leképezés felett.

Belátjuk, hogy a ν leképezés foka 0. Vegyünk ugyanis egy olyan $\uparrow \in S^{2n}$ vektort, melyre $\uparrow$ és $-\uparrow$ egyaránt reguláris értéke ν-nek (Sard tétele garantálja, hogy majdnem minden S^{2n}-beli vektor ilyen), és minden p-re vetítsük a $\uparrow$ vektort merőlegesen a $H_p = \kappa(df(T_pM))$ hipersíkra; ennek a vektornak a $\kappa \circ df_p$ leképezés inverzével vett képe legyen $w_p \in T_pM$. A w vektormező M-en izolált nullhelyekkel rendelkezik, mégpedig pontosan a $\uparrow$ és a $-\uparrow$ vektorok ν szerinti ősképei azok; most kiszámítjuk ezeknek az indexét.

Minden $p \in M$, $\nu(p) = \uparrow$ nullhely esetén azonosítsuk TM egy p körüli részének a fibrumait H_p-vel (ami a $\uparrow$-re merőleges $\mathbb{R}^{2n+1}$-beli vektorokból áll) úgy, hogy a T_qM érintőteret először a $\kappa \circ df_q$ leképezéssel azonosítjuk H_q-val, majd azt H_q-ra merőlegesen – $\nu(q)$-val párhuzamosan – vetítjük H_p-re. Ez a definíció mindaddig értelmes (és sima trivializációt ad), amíg H_q nem merőleges H_p-re, ami p kellően kicsinek választott környezetében már teljesül. Ezzel az azonosítással $\uparrow$ merőleges vetülete H_q-ra ugyanaz, mint $\uparrow$ vetülete H_p-re $\nu(q)$-val párhuzamosan, ami viszont p körül elsőrendben megegyezik $-\nu(q)$ merőleges vetületével H_p-re. Ha tehát a w vektormezőt az előbbi azonosítással T_pM-beli vektormezővé alakítjuk, akkor annak 0-beli indexe (ami w-nek a p-beli indexével egyenlő) ugyanaz, mint a vele elsőrendben megegyező $u \mapsto (\kappa \circ df_p)^{-1}(-d\nu_p(u))$, $u \in T_pM$ vektormezőé. Ez utóbbi vektormező lineáris, tehát 0-beli indexe megegyezik az őt megadó lineáris leképezés 0-beli (lokális) fokával, ami pedig a ν leképezés p-beli (lokális) fokának $(-1)^{2n} = 1$-szerese.

Ugyanezt a számolást elvégezve a $\nu^{-1}(-\uparrow)$-beli nullhelyeken, p-ben az $u \mapsto (\kappa \circ df_p)^{-1}(d\nu_p(u))$ vektormezőhöz jutunk, aminek ugyancsak megegyezik az indexe a ν leképezés p-beli (lokális) fokával. Összeadva a ν leképezés $\uparrow$ és $-\uparrow$ értékeken számolt fokszámát azt kapjuk, hogy ν fokszámának a kétszerese megegyezik a w vektormező nullhelyeinek algebrai számával, ami a Poincaré-Hopf tétel szerint $\chi(M) = 0$.

Mivel a ν leképezés foka 0, a Hopf-tétel szerint ν nullhomotóp és így az általa visszahúzott $\nu^* TS^{2n} \cong TM$ vektornyaláb triviális, azaz M parallelizálható.