Cyberspace Mathematical Competition

2. nap

2020. július 14., kedd

Cyberspace Mathematical Competition

Magyar (hun), 2. nap

2020. július 14., kedd

5. feladat. Egy táblára 2020 darab pozitív egész szám van felírva. Zuming minden percben letöröl két számot és helyettük az összegüket, különbségüket, szorzatukat vagy hányadosukat írja fel. Ha például Zuming a 6 és 3 számokat törli le, akkor a $\{6+3, 6-3, 3-6, 6\times 3, 6\div 3, 3\div 6\} = \{9, 3, -3, 18, 2, \frac{1}{2}\}$ halmaz egy elemével helyettesíti őket. 2019 perc után Zuming a -2020 számot írja fel egyetlenként a táblára. Mutassuk meg, hogy ugyanezen szabályokkal, ugyanabból a 2020 darab egész számból indulva az is lehetséges lett volna, hogy Zuming egyetlen számként a 2020-szal fejezze be az eljárást.

6. feladat. Határozzuk meg mindazon $n \geq 3$ egészeket, amelyekre a következő állítás igaz: Ha a $\mathcal{P}$ konvex n-szögnek $n-1$ oldala egyenlő hosszúságú és $n-1$ szöge egyenlő nagyságú, akkor $\mathcal{P}$ szabályos sokszög. (Egy sokszög *szabályos,* ha minden oldala egyenlő hosszúságú és minden szöge egyenlő nagyságú.)

7. feladat. Egy $n \times n$ méretű tábla n^2 mezejének mindegyikét feketére vagy fehérre színezzük. Jelölje a_i a fehér mezők számát az i-edik sorban, és jelölje b_i a fekete mezők számát az i-edik oszlopban. Határozzuk meg $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ maximális értékét a tábla összes kiszínezésére nézve.

8. feladat. Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív valós számok végtelen sorozata úgy, hogy minden pozitív egész n esetén

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2}{n+1}}.$$

Bizonyítandó, hogy az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat konstans.

Language: Hungarian *Munkaidő: 5 óra*

Minden feladat 7 pontot ér.