

Újabb diszkrét matematikai feladatok a matematika egyéb területeiről

Szalkai István

0) Egy n -jegyű N szám *prímtényező felbontását* keressük. Egy tanult módszer: a páratlan számokat próbáljuk ki \sqrt{N} -ig. Hány osztást kell elvégeznünk?

a) Ez mennyi idő lenne $n=20$, $n=30$, $n=40$ és $n=50$ esetén egy 5 GHz-es gépen futtatva (ha *csak* az osztásokat számítjuk egy-egy lépésnek) ?

b) Mennyire csökkenne a futásidő, ha a \sqrt{N} alatti prímszámokat egy tömbben (táblázatban) tárolnánk, és csak e prímszámokat próbálnánk ki ?

1) a) Hány szorzást kell elvégeznünk egy $n \times n$ -es mátrix *determinánsának* kiszámításához (a definíció szerint)?

Ez mennyi idő lenne $n=15$, $n=20$ és $n=25$ esetén egy 5 GHz-es gépen futtatva (ha *csak* a szorzásokat számítjuk egy-egy lépésnek) ?

Becsüljük meg a kapott eredmény nagyságrendjét $n \rightarrow \infty$ esetén!

b) Ugyanekkora mátrixok *szorzásához*, illetve n -edik *hatványának* kiszámolásához hány szorzást kell elvégeznünk? Ezeket is számoljuk át mp -re, 5 GHz-es gépet feltételezve !

2) Legyen $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ egy tetszőleges p -változós, n -szer deriválható függvény.

a) Hányféle n -edik deriváltja van? (Ne feledjük Schwarz tételét!)

b) Hány tagból áll az $f(x)$ függvény N -edrendű Taylor polinomja?

c) Hány n -edik deriváltja van az olyan $g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek, melyekre nem igaz Schwarz tétele (azaz $D_i g \neq D_j g$ ha $i \neq j$) ?

3) Tekintsünk egy n -változós f logikai függvényt.

a) Hány sorból áll igazságtáblázata? Mennyi idő alatt értékelné ki egy 5 GHz-es gép, ha *minden órajel alatt egy-egy sort* tudna kiértékelni ?

b) Ha feltesszük, hogy az f függvény értékeinek kb. 50%-a *igaz*, akkor hány karakterből áll az f függvény Diszjunktív Normál Forma (DNF) alakban?

Mennyi ideig nyomtatná a karaktereket egy 5 GHz-es gép, ha *minden órajel alatt egy-egy karaktert* nyomtatna ki?

Hány oldalon illetve hány kötetben (hány méter polcon) férne ki ez a DNF **4 pt**-os betűméretben (152 sor, soronként 225 karakter, "biblia"-papíron 1500 lap = 4 cm) ?

(Indexes változókat használjunk: $p_1 \dots p_n$, vagyis mindegyik változóra két-két karaktert számoljunk. A tagadás műveletét jelöljük felülvonással, vagyis ez nem külön karakter. Lehető legkevesebb zárójelet használjunk: $(\wedge \dots \wedge) \vee (\wedge \dots \wedge) \dots$ alakban.)

c)* *Átlagosan* milyen hosszú egy DNF, ha csak a legfeljebb 50%-ban *igaz* függvényeket tekintjük ?

12345678101234567820123456783012345678401234567850123456786012345678701234567880123456789012345679001234567910123456792012345679301234567940123456795012345679601234567970123456798012345679901234568000

4) o) Hány *egyszerű* gráf van n csúcson ?

a) Két n -elemű halmaz között hány bijekció van ?

b) Ha "favágó"-módon két n -csúcsú egyszerű gráf *izomorfiáját* úgy ellenőriznénk, hogy csúcshalmazaik között az *összes* bijekció éltartóságát ellenőriznénk, akkor ez mennyi időt venne igénybe egy 5 GHz-es gépen, ha *minden órajel alatt egy-egy él-ellenőrzést* végezne?

- 5) o) Egy n -elemű és egy k -elemű halmaz között hány *tetszőleges* függvény van?
 a) A "favágó" – módszer alkalmazásával mennyi idő alatt tudnánk eldönteni egy n -csúcsú gráfról, hogy *3-kromatikus* -e, azaz $k=3$ jó -e (5 GHz-es gép, minden órajelben ...)?
 b) Mi a helyzet a $k=2$ esetben ?

6) Hány tagból áll az $(x_1+x_2+\dots+x_p)^n$ kifejezés (a polinomiális tétel szerint kifejtve) ?
 Ez mennyi pl. $n=10$ és $p=5$ esetén?

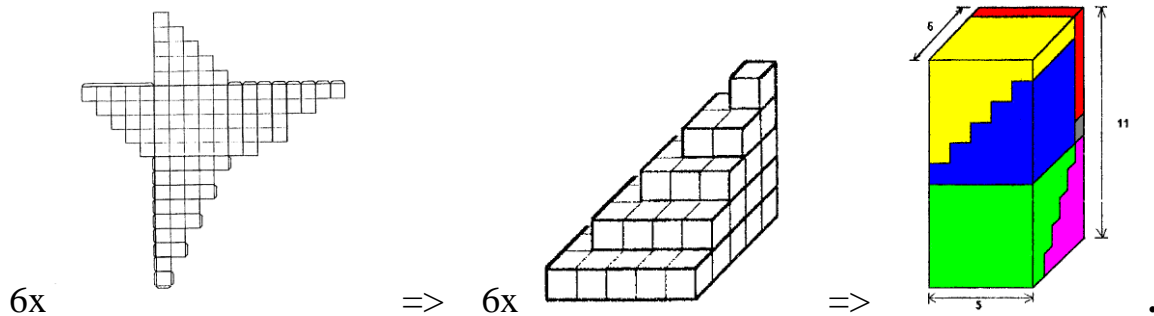
7) Hányféleképpen lehet az $x_1 - x_2 - \dots - x_n$ kifejezést zárójelezni? Mennyi ideig nyomtatná a végeredményt egy 5 GHz-es gép (minden órajelben ...) ?

8) Az $1,2,\dots,100$ számok közül hányféleképpen lehet kiválasztani hármat úgy, hogy a kiválasztott számok összege osztható legyen 3 -mal ?
 (XVII. Bátaszéki matematikaverseny, országos döntő 7.oszt., 2006.)

9) Tekintsük a természetes számokon a következő (végtelen) gráfot: $K=(N,F)$ ahol $(m,n)\in F$ ha m és n relatíve prímek. Mutassuk meg, hogy ekkor *tetszőleges* $G=(V,E)$ gráf pontosan akkor feszített részgráfja K -nak, ha G *tetszőleges* $P\in V$ csúcspontjára a $G\setminus\Gamma(P)$ gráf *kromatikus száma véges* (itt $\Gamma(P)$ jelöli P szomszédainak halmazát G -ben).
 A feladat általánosítását lásd még [1] -ben.

10) Hány tagból áll a logikai szitaformula n részhamaz esetén?

11) Befejezés helyett: az $1^2+2^2+\dots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ azonosságot szemlélteti az alábbi három ábra:



Megoldások

0) a) Ha az N szám n -jegyű, akkor értéke körülbelül $N \sim 10^n$ (pontosabban $10^{n-1} \leq N < 10^n$, de nem érdemes ezzel a számításokat bonyolítani). Ekkor az osztások száma $\sqrt{N}/2$.

Ez

$n=20$ (és 5GHz) esetén	$5 \cdot 10^9$ lépés = 1 mp ,
$n=30$ esetén	$5 \cdot 10^{14}$ lépés = 10^5 mp \sim 27 óra 46 perc,
$n=40$ esetén	$5 \cdot 10^{19}$ lépés = 10^{10} mp \sim 317 év 35 nap 18 óra,
$n=50$ esetén	$5 \cdot 10^{24}$ lépés = 10^{15} mp \sim 31.7 millió év

b) Jelöljük tetszőleges x szám esetén $\pi(x)$ -el az x -nél kisebb prímszámok számát!

A "Nagy Prímszámtétel" (Hadamard és de la Vallée Poussin, 1896) szerint $\pi(x) \sim x/\ln(x)$. Ekkor az osztások száma $\pi(\sqrt{N}) \sim \sqrt{N}/\ln(\sqrt{N})$.

Ez

$n=20$ (és 5GHz) esetén	$\sim 4.3 \cdot 10^8$ lépés < 1 mp ,
$n=30$ esetén	$\sim 2.9 \cdot 10^{13}$ lépés \sim 5790 mp \sim 1 óra 36 perc,
$n=40$ esetén	$\sim 2.2 \cdot 10^{18}$ lépés \sim $4.4 \cdot 10^8$ mp \sim 13 év 281 nap 13 óra,
$n=50$ esetén	$\sim 1.4 \cdot 10^{23}$ lépés \sim $1.7 \cdot 10^{14}$ mp \sim 5.5 millió év

1) A szorzások száma $n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \dots + n!$

vagy másképpen: $n! \cdot (1 + 1/1! + 1/2! + \dots + 1/(n-1)!) .$

A Stirling -formula szerint ez aszimptotikusan:

$$\approx n^n \sqrt{2\pi n} / e^n \cdot (1 + 1/1! + 1/2! + \dots + 1/(n-1)!) \sim (n/e)^n \cdot e .$$

$n=15$ (és 5GHz) esetén ez kb.

$$\begin{aligned} 15^{15} \sqrt{30\pi} / e^{14} &\sim 3\,534\,937\,201\,323 \text{ lépés} \\ &= 706\,986 \text{ mp} \approx \mathbf{196} \text{ óra} , \end{aligned}$$

$n=20$ esetén

$$\begin{aligned} 20^{20} \sqrt{40\pi} / e^{19} &\sim 6\,585\,813\,029\,813\,853\,679 \text{ lépés} \\ &= 1\,317\,162\,605\,962 \text{ mp} \approx 365\,878\,501 \text{ óra} \approx \mathbf{41\,767} \text{ év !!!} \end{aligned}$$

$n=25$ esetén

$$\begin{aligned} 25^{25} \sqrt{50\pi} / e^{24} &\sim 3,35299 \cdot 10^{24} \text{ lépés} \\ &\sim 6,70598 \cdot 10^{14} \text{ mp} \approx \mathbf{21\,264\,542} \text{ év !!! !!!} \end{aligned}$$

2)a) Egy derivált $D_{k_1} D_{k_2} \dots D_{k_p} f$ alakú, ahol a $0 \leq k_1, k_2, \dots, k_p \leq n$ egész számokra teljesül, hogy $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$. Az ilyen k_i számok száma ismétléses kombináció

(ld.pl. [2] 8.6.b) feladatát), azaz

$$C_p^{n(\text{ism})} = \binom{p+n-1}{p-1} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)}{(p-1)!}.$$

b) A Taylor polinom tagjainak száma

$$\sum_{n=0}^N \binom{p+n-1}{p-1} = \binom{p+N}{p} = \frac{(N+1)(N+2)\dots(N+p)}{p!} > \frac{N^p}{p!}.$$

c) Ha Schwarz tétele nem teljesül, akkor a deriváltak lehetséges száma ismétléses variáció:

$$V_p^{n(\text{ism})} = p^n.$$

3) a) Az igazságtáblázat 2^n sorból áll.

- $n=10$ esetén ez $2^{10} / 5\text{GHz} = 1024/5 \cdot 10^9 \text{ mp} = 2,048 \cdot 10^{-7} \text{ mp}$,
 $n=20$ esetén ez $2^{20} / 5\text{GHz} \approx 2,097 \cdot 10^{-4} \text{ mp}$,
 $n=30$ esetén ez $2^{30} / 5\text{GHz} \approx 0,215 \text{ mp}$,
 $n=40$ esetén ez $2^{40} / 5\text{GHz} \approx 219,902 \text{ mp} \approx 3.6 \text{ perc}$,
 $n=50$ esetén ez $2^{50} / 5\text{GHz} \approx 225\,180 \text{ mp} \approx 62.5 \text{ óra} \approx 2.6 \text{ nap}$,
 $n=60$ esetén ez $2^{60} / 5\text{GHz} \approx 2,306 \cdot 10^8 \text{ mp} \approx 6\,405 \text{ óra} \approx 7 \text{ év } 3.5 \text{ hónap}$,
 $n=70$ esetén ez $2^{70} / 5\text{GHz} \approx 2,361 \cdot 10^{11} \text{ mp} \approx 6,559 \cdot 10^7 \text{ óra} \approx 7\,508 \text{ év}!$
 $n=80$ esetén ez $2^{80} / 5\text{GHz} \approx 2,418 \cdot 10^{14} \text{ mp} \approx 7\,688\,020 \text{ év}!$
 ...

b) Minden igaz sorhoz egy $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \vee$ jelsorozat tartozik (a tagadás műveletét nem számoljuk), ami $2+2n+n-1+1 = 3n+2$ hosszú. Mivel a DNF $2^n/2$ igaz sort tartalmaz, ezért a DNF hossza $2^n \cdot (3n+2)/2$.

- $n=20$ esetén ez $2^{19} \cdot 62 / 5\text{GHz} \approx 0,006 \text{ mp}$,
 $n=30$ esetén ez $2^{29} \cdot 92 / 5\text{GHz} \approx 9,89 \text{ mp}$,
 $n=40$ esetén ez $2^{39} \cdot 122 / 5\text{GHz} \approx 13\,414 \text{ mp} \approx 3 \text{ óra } 43,5 \text{ perc}$,
 $n=50$ esetén ez $2^{49} \cdot 152 / 5\text{GHz} \approx 1,711 \cdot 10^7 \text{ mp} \approx 6.5 \text{ hónap}$,
 $n=60$ esetén ez $2^{59} \cdot 182 / 5\text{GHz} \approx 2,098 \cdot 10^{10} \text{ mp} \approx 667 \text{ év } 2.5 \text{ hónap}$,
 $n=70$ esetén ez $2^{69} \cdot 212 / 5\text{GHz} \approx 2,503 \cdot 10^{13} \text{ mp} \approx 795\,830 \text{ év}!$
 $n=80$ esetén ez $2^{79} \cdot 242 / 5\text{GHz} \approx 2,926 \cdot 10^{16} \text{ mp} \approx 930\,250\,459 \text{ év}!$

a karakterek száma:

- $n=20$ esetén ez $2^{19} \cdot 62 / (152 \cdot 225) \approx 15,3 \text{ oldal}$,
 $n=30$ esetén ez $2^{29} \cdot 92 / (152 \cdot 225) \approx 1\,444\,214 \text{ oldal} \approx 38,5 \text{ m -nyi könyv}$,
 $n=40$ esetén ez $2^{39} \cdot 122 / (152 \cdot 225) \approx 1,96 \cdot 10^9 \text{ oldal} \approx 52,26 \text{ km}! \text{ -nyi könyv}$,
 $n=50$ esetén ez $2^{49} \cdot 152 / (152 \cdot 225) \approx 2,5 \cdot 10^{12} \text{ oldal} \approx 16\,680 \text{ km}! \text{ -nyi könyv}$,
 $n=60$ esetén ez $2^{59} \cdot 182 / (152 \cdot 225) \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ oldal} \approx 81\,805\,736 \text{ km}! \text{ -nyi könyv}$,
 $n=70$ esetén ez $2^{69} \cdot 212 / (152 \cdot 225) \approx 3,66 \cdot 10^{18} \text{ oldal} \approx 97\,577\,163\,194 \text{ km}$,
 $n=80$ esetén ez $2^{79} \cdot 242 / (152 \cdot 225) \approx 4,28 \cdot 10^{18} \text{ oldal} \approx 1,14 \cdot 10^{14} \text{ km}$
 $\approx 0,012 \text{ fényév}!!! \text{ -nyi könyv.}$

6) A 2/a) feladat alapján a kifejezés $C_p^n \text{ (ism)} = \binom{n+p}{p-1}$ tagból áll.

7) A lehetőségek száma éppen az n -edik Catalan szám ([3], 137.old.) :

$$\frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \approx 2^{n-1} / \sqrt{(2\pi n)} ,$$

a közelítés a *Stirling* -formulával történt.

$n=3$ esetén ez = 2 lehetőség,
 $n=5$ esetén ez = 42 lehetőség,
 $n=8$ esetén ez = 1430 lehetőség,
 $n=10$ esetén ez = 16 796 lehetőség,
 $n=20$ esetén ez \approx kb. $6,56 \cdot 10^9$ lehetőség.

8) A felsorolt számokat 3-mal való osztási maradékaik szerint csoportosítjuk: 33 szám maradéka 0, 34 maradéka 1 és 33 maradéka 2. A kiválasztott számok összege akkor osztható 3-mal, ha három azonos maradékú, vagy egy 1-es, egy 2-es és egy 0-ás maradékú számot választottunk ki. Így a lehetőségek száma

$$2 \cdot \binom{33}{3} + \binom{34}{3} + \binom{33}{1} \cdot \binom{33}{1} \cdot \binom{34}{1} = 53\,922 .$$

Hivatkozások

- [1] Szalkai István: *An Open Problem Concerning Spanned Subgraphs of Infinite Graphs*, VE Preprint 1991.
<http://www.szt.vein.hu/~szalkai/Cno13-.jpg>, <http://www.szt.vein.hu/~szalkai/CNo13.pdf>
- [2] ----- : *Diszkrét matematika feladatgyűjtemény*, Veszprémi Egyetemi Kiadó, 1997.
- [3] ----- : *Diszkrét matematika és algoritmuselmélet alapjai*, Veszprémi Egyetemi Kiadó, 2001.

eof