Haladvány Kiadvány 2019-03-06

Térnyolcadokat felfűző egyenespár szögéről

Hujter M. `hujter.misi@gmail.com`

Háromdimenziós alakzatokat tekintünk. *Nyílt térnyolcad*nak nevezzük az

$$x_i R_i 0, \quad i = 1, 2, 3$$

feltételeket kielégítő (x_1, x_2, x_3) koordinátájú pontok halmazát, ahol minden egyes R_i külön-külön vagy egy $>$ vagy egy $<$ relációjel. Nyilván összesen 8 darab nyílt térnyolcad van. Tekintsük a következő 8 pontot:

$$(49, 49, 49);\ (-11, 9, 19);\ (-29, -3, 10);\ (-53, -19, -2);$$
$$(-49, 49, -49);\ (11, 9, -19);\ (29, -3, -10);\ (53, -19, 2)$$

Világos, hogy mind a nyolc pont más és más nyílt térnyolcadban van. Tekintve, hogy a következő két mátrix mindegyikének 2 a rangja, az első 4 pont is egy egyenesen van, és az utolsó négy pont is egy egyenesen van.

$$\begin{bmatrix} 49 & 49 & 49 \\ -11 & 9 & 19 \\ -29 & -3 & 10 \\ -53 & -19 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -49 & 49 & -49 \\ 11 & 9 & -19 \\ 29 & -3 & -10 \\ 53 & -19 & 2 \end{bmatrix}$$

Máskülönben a második mátrix az elsőből a

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal való szorzás révén kapható meg. Ez azt eredményezi, hogy a két egyenes egymás tükörképe az x_2-tengelyre tükrözve.

Erdély Dániel, a háromdimenziós szerkezeteiről híres grafikusművész azt sejti, hogy ha két egyenes együtt tartalmaz mind a 8 nyílt térnyolcaból pontot, akkor a két egyenes nem lehet párhuzamos. Az világos, hogy mindkét egyenes pontosan négy-négy különböző nyílt térnyolcadból tartalmazhat pontot, hiszen ha valamelyik egyenes öt darab nyílt térnyolcadot is keresztüldöfne, akkor négyszer is metszenie kellene koordinátasíkot, márpedig mindegyik koordinátasíkot legfeljebb csak egyszer metszheti egy egyenes, és összesen csak három koordinátasík van.

A továbbiakban bizonyítjuk Erdély sejtését. Nevezzük *döfi-egyenes*nek az olyan egyeneseket, melyek négy különböző nyílt térnyolcadból is tartalmaznak pontot.

Tétel. *Bármely két párhuzamos döfi-egyeneshez van olyan nyílt térnyolcad, melyet egyik döfi-egyenes sem döf.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyításban tegyük fel, hogy két párhuzamos döfi-egyenes együtt mind a nyolc nyílt térnyolcadot átdöfi. Affinitás okán az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy az első egyenes tartalmazza a $(-1,-1,-1)$ pontot. Sőt azt is feltehetjük, hogy az origóhoz a $(-1,-1,-1)$ pontnál közelebb nincs egyik döfi-egyenesen sem pont. Ezért azt is feltehetjük, hogy az $(1,1,1)$ pontot tartalmazó nyílt térnyolcadot a második döfi-egyenes döfi. Az első döfi-egyenest fixen tartva a második döfi-egyenest vegyük fel úgy, hogy párhuzamos legyen az elsővel, döfje a $(1,1,1)$ pontot tartalmazó nyílt térnyolcadot, és a lehető legközelebb legyen az $(1, 1, 1)$ ponthoz. Világos, hogy a legkisebb távolság csak nulla lehet. Tehát a két döfi-egyenes egymás tükörképe az origóra. A nyolc nyílt térnyolcad az origóra való tükrözés szempontjából 4 darab tükörszimmetrikus párba rendeződik. Minden pár egyik elemét az egyik döfi-egyenes döfi, a másik elemét a másik döfi-egyenes döfi, hiszen a két döfi-egyenes egymás tükörképe az origóra.

Tekintsük a második döfi-egyenesre felfűzött négy nyílt térnyolcadot. Ezek sorban egymás után következnek felfűzve a döfi-egyenesre. A legelső és a legutolsó között a döfi-egyenes mindhárom koordinátasíkot metszi egyszer-egyszer. Tehát a legelső és a legutolsó nyílt térnyolcad egymás tükörképe az origóra. Ellentmondásra jutottunk, tehát a tétel bizonyított. $\boxdot$

Megjegyzés. Affinitás okán látható, hogy két döfi-egyenes egymáshoz viszonyított szöge tetszőlegesen kicsi pozitív értékű lehet akkor is, ha együtt mind a nyolc nyílt térnyolcadot döfik.