Gyökközelítés pontosabban

dr. Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
SZALKAI@ALMOS.UNI-PANNON.HU

2019.01.30.

Kivonat

A gyökközelítő módszerek kezdőértékének megadásakor néha egy kis eltérés is végzetes lehet.

HALADVANY-KIADVANY , 2019.01.07. http://math.bme.hu/~hujter/190130.pdf

A "*Gyökközelítés intervallumfelezéssel*" módszerre kidolgozott példákat találunk [1] könyvemben és a [2] honlapomon. (A módszer közismert, itt nem ismertetjük.) Jelen cikkünkben egy fontos feltételre kívánjuk a figyelmet felhívni: a magyarázat és a tanulság a két számolás után található.

A megoldandó egyenlet:

$$\boxed{\tan(x) = x + 1} \tag{1}$$

azaz

$$f(x) := \quad x + 1 - \tan(x) = 0 \tag{2}$$

ahol

$$0 < x < 3 \ . \tag{3}$$

I. lehetséges számolás: kezdő intervallum $a_{\mathbf{I}} = 1.1$, $b_{\mathbf{I}} = 1.5$.

II. lehetséges számolás: kezdő intervallum $a_{\mathbf{II}} = 1.2$, $b_{\mathbf{II}} = 1.6$.

A számításokat a [3] programmal végeztük, 10 lépés után mindkét számolás hibája $\varepsilon < \frac{b-a}{2^n} < 0.000391$, a részletszámítások a cikk legvégén találhatók.

Most jön a **meglepetés:** az I. számolás közelítő értéke $\underline{x^*_{\mathbf{I}} \approx 1.132227}$, a II. számolás végeredménye pedig $\underline{x^*_{\mathbf{II}} \approx 1.570898}$.

Ez miért baj? Ha a módszer nagyon gyors és nagyon pontos, akkor miért baj, ha a kezdeti intervallumot kicsit (0.1 -del) megváltoztatjuk?

Mert: ha mindkét számolás hibája $\varepsilon < 0.0004$, akkor a két gyök különbsége *nem lehet* $|x^*_{\mathbf{I}} - x^*_{\mathbf{II}}| \approx 0.438\,671$, ugyanis a *tangens* függvény a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban konvex, a $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ intervallumban negatív, vagyis csak *egyetlen* metszéspontja lehet az $x+1$ egyenessel!

Magyarázat: A II. számolás számértékeit tanulmányozva feltűnhet, hogy az $f(x)$ függvény értékei $\pm\infty$ "körül" ugrándoznak! Ha még alaposabban belegondolunk a két számolás kezdő intervallumába: $a_{\mathbf{I}} = 1.1$, $b_{\mathbf{I}} = 1.5$ illetve $a_{\mathbf{II}} = 1.2$, $b_{\mathbf{II}} = 1.6$, akkor rájöhetünk a "csel" -re: $\frac{\pi}{2} \approx 1.571 \in [a_{\mathbf{II}}\ ,\ b_{\mathbf{II}}]$ míg $\frac{\pi}{2} \notin [a_{\mathbf{I}}\ ,\ b_{\mathbf{I}}]$. Ez pedig azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvény *nem folytonos* az $[a_{\mathbf{II}}\ ,\ b_{\mathbf{II}}]$ intervallumban, márpedig ez nyilván egy (nagyon) fontos szükséges feltétel! A II. számolás még alaposabb elemzése után még azt is észrevehetjük, hogy $x^*_{\mathbf{II}} \approx 1.570898 \approx \frac{\pi}{2} \approx 1.570796$, ahol pedig az $f(x)$ függvény nincs is értelmezve! A túloldali ábrák alapján már minden világos!

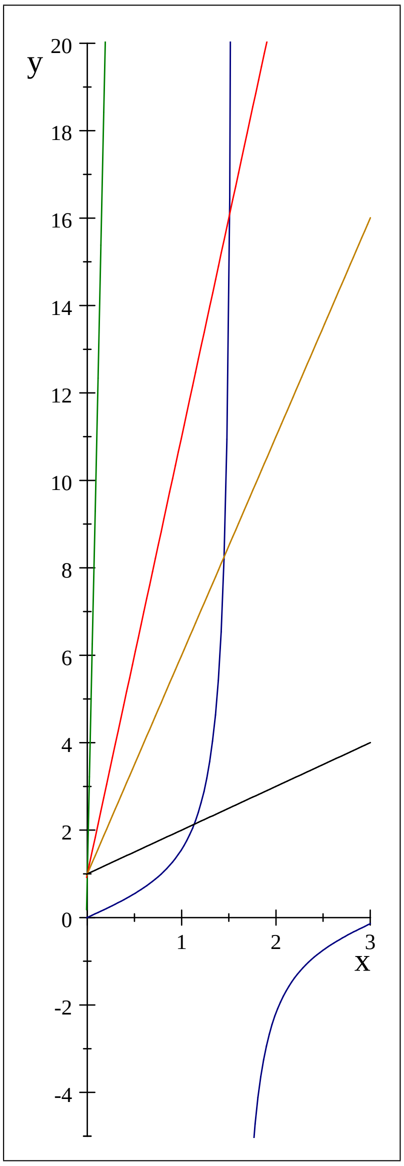
Tanulság: A kezdő $[a, b]$ *zárt* intervallumon az $f(x)$ függvénynek *végig folytonosnak* kell lennie!

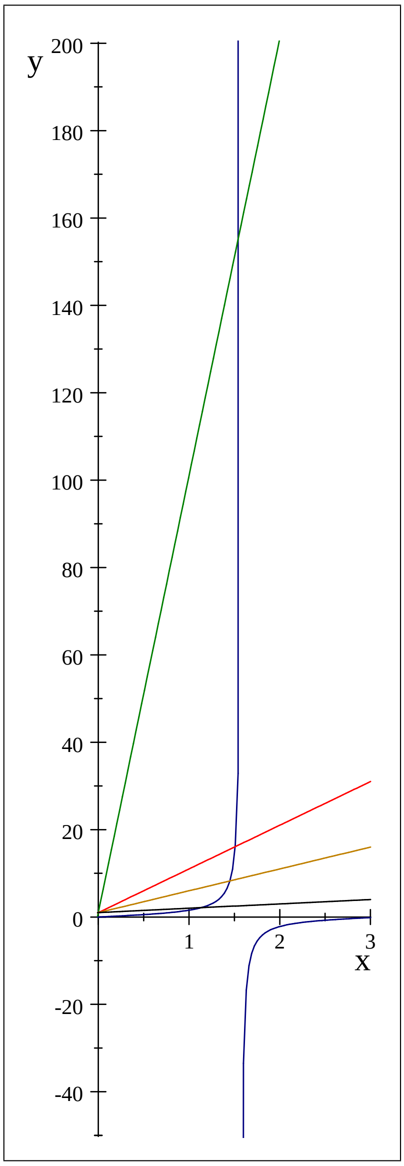
Hivatkozások

[1] **Szalkai István, Mikó Teréz:** *Matematikai analízis* I., Segédanyag a "Közgazdaságtan matematikai alapjai" tárgyhoz, 2011.
https://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Anal-Tk1B-d-180125.pdf

[2] **Szalkai István:** *Gyökközelítés intervallumfelezéssel*, előadás-diák,
https://math.uni-pannon.hu/~szalkai/P01b-oroszlan.ppt

[3] **Szalkai István:** *Intervallumfelező oktatóprogram*,
https://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Interv3.exe





$$\tan(x) = 100x + 1 = 10x + 1 = 5x + 1 = x + 1 <=> f(x) = \lambda x + 1 - \tan(x) \ .$$

Számolások

I. számítás: Kezdő intervallum végpontjai: a= 1.100000 , b= 1.500000 ,

lépésszám: k = 10 , f(a) = 0.135240 , f(b) = -11.601420

n = 1, x(1)=1.300000, f(x1) = -1.302102 => x* $\in$ [1.100000 ; 1.300000]
n = 2, x(2)=1.200000, f(x2) = -0.372152 => x* $\in$ [1.100000 ; 1.200000]
n = 3, x(3)=1.150000, f(x3) = -0.084497 => x* $\in$ [1.100000 ; 1.150000]
n = 4, x(4)=1.125000, f(x4) = 0.032429 => x* $\in$ [1.125000 ; 1.150000]
n = 5, x(5)=1.137500, f(x5) = -0.024117 => x* $\in$ [1.125000 ; 1.137500]
n = 6, x(6)=1.131250, f(x6) = 0.004615 => x* $\in$ [1.131250 ; 1.137500]
n = 7, x(7)=1.134375, f(x7) = -0.009634 => x* $\in$ [1.131250 ; 1.134375]
n = 8, x(8)=1.132813, f(x8) = -0.002480 => x* $\in$ [1.131250 ; 1.132813]
n = 9, x(9)=1.132031, f(x9) = 0.001074 => x* $\in$ [1.132031 ; 1.132813]
n=10, x(10)=1.132422, f(x10) = -0.000701 => x* $\in$ [1.132031 ; 1.132422]

=> x*$\approx$ 1.132227 , $\varepsilon < 0.000391$

II. számítás: Kezdő intervallum végpontjai: a= 1.200000 , b= 1.600000 ,

lépésszám: k = 10 , f(a) = -0.372152 ; f(b) = 36.832533

n = 1, x(1)=1.400000, f(x1) = -3.397884 => x* $\in$ [1.400000 ; 1.600000]
n = 2, x(2)=1.500000, f(x2) = -11.601420 => x* $\in$ [1.500000 ; 1.600000]
n = 3, x(3)=1.550000, f(x3) = -45.528482 => x* $\in$ [1.550000 ; 1.600000]
n = 4, x(4)=1.575000, f(x4) = 240.460787 => x* $\in$ [1.550000 ; 1.575000]
n = 5, x(5)=1.562500, f(x5) = -117.970006 => x* $\in$ [1.562500 ; 1.575000]
n = 6, x(6)=1.568750, f(x6) = - 486.111067 => x* $\in$ [1.568750 ; 1.575000]
n = 7, x(7)=1.571875, f(x7) = 929.636353 => x* $\in$ [1.568750 ; 1.571875]
n = 8, x(8)=1.570313, f(x8) = -2064.284877 => x* $\in$ [1.570313 ; 1.571875]
n = 9, x(9)=1.571094, f(x9) = 3364.783434 => x* $\in$ [1.570313 ; 1.571094]
n=10, x(10)=1.570703, f(x10) = -10726.836367 => x* $\in$ [1.570703 ; 1.571094]

=> x* $\approx$ 1.570898 , $\varepsilon < 0.000391$