Ellipszisekről részletesen

dr. Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
szalkai@almos.uni-pannon.hu

2019.01.07.

Kivonat

A mindennapi életben a kör alakú tárgyakat (is), például közlekedési táblákat, legtöbbször oldalról nézzük, aminek következményeként ellipszisekként látjuk őket. Mivel a szakirodalomban az egyenes és ferde ellipszisek egyenletei vagy csak nagyon speciális vagy csak nagyon általános esetekben találhatók meg, sőt magyar nyelven még kevesebbet, ezért nagyon sok képletet magunknak kellett levezetnünk, amiket most közreadunk.

Kutatásunk a **GINOP-2.2.1-15-2017-00058** projekt támogatásával készült.

Haladvany-Kiadvany , 2019.01.07. http://math.bme.hu/~hujter/190107.pdf

TARTALOM

A) Egyenes állású ellipszisek

Legegyszerűbb eset az, amikor az ellipszis tengelyei párhuzamosak a koordiáta-tengelyekkel (vagyis a kép éleivel), ekkor **egyenes állású ellipszisr**ől beszélünk, és az (1) egyenletet **kanonikus egyenlet**nek nevezzük.

I. Egyenes állású ellipszisek egyenlete

Közismert, hogy az (u,v) középpontú, a és b féltengelyű ellipszis egyenlete

$$\frac{(x-u)^2}{a^2}+\frac{(y-v)^2}{b^2}=1\ , \tag{1}$$

paraméteresen:

$$\begin{cases} x=a\cdot\cos(t)+u \\ y=b\cdot\sin(t)+v \end{cases} \qquad (0\le t\le 2\pi)\ , \tag{2}$$

kör esetén

$$a=b=r \quad \textit{és} \quad (x-u)^2+(y-v)^2=r^2\ . \tag{3}$$

Az ellipszis és tengelyeinek metszéspontjai nyilván az

$$A_{1,2}\,(u\pm a,v) \quad \textit{és} \quad B_{1,2}\,(u,v\pm b) \tag{4}$$

pontok, amelyeket mi "**csúcspontok**" -nak fogunk hívni.

Hasznosak lesznek még az alábbi q hányados és az e **excentricitás** jelölések is ($a\le b$ esetén):

$$q=\left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \textit{és} \quad e=\sqrt{1-q}\ . \tag{5}$$

II. Egyenes állású ellipszisek érintői

A görbe egy adott $P_0\,(x_0, y_0)$ pontjában (vagyis ha az (x_0, y_0) pontra (1) teljesül) húzott érintő egyenes egyenlete ([HGy], [HM1]):

$$\frac{(x_0-u)}{a^2}\cdot(x-u)+\frac{(y_0-v)}{b^2}\cdot(y-v)=1 \tag{6}$$

vagyis

$$y=\frac{b^2}{y_0-v}\cdot\left(\frac{1}{a^2}\,(u-x)\,(x_0-u)+\frac{v\,(y_0-v)+b^2}{b^2}\right) \tag{7}$$

vagy a szokásos alakban:

$$y=\frac{-b^2\cdot(x_0-u)}{a^2\cdot(y_0-v)}\cdot x+\frac{b^2\cdot(x_0-u)}{a^2\cdot(y_0-v)}\cdot u+\frac{b^2}{y_0-v}+v\ , \tag{8}$$

aminek meredeksége

$$m=\frac{-b^2\cdot(u-x_0)}{a^2\cdot(v-y_0)}\qquad ha\quad y_0\neq v\ , \tag{9}$$

és persze $y_0=v$ esetén az érintő függőleges, pontosabban (1) miatt $x_0=u\pm a$, ami a függőleges érintő egyenlete.

Másképpen: (6) -ból az érintő *normálvektora* és *irányvektora*:

$$\overrightarrow{n_e}=\left(\frac{x_0-u}{a^2}\ ,\ \frac{y_0-v}{b^2}\right)\ ,\qquad \overrightarrow{v_e}=\left(\frac{y_0-v}{b^2}\ ,\ \frac{u-x_0}{a^2}\right) \tag{10}$$

Megjegyzés: kör esetén $\overrightarrow{n_e}\parallel\overrightarrow{P_0O}$.

III. Egyenes állású ellipszis megadása pontjaival

III.o) Három pontra illeszkedő kör egyenlete

Három adott $P_i\,(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ **pontra** illeszkedő **kör** egyenlete ([Sz1])

$$(x - u_H)^2 + (y - v_H)^2 = r_H^2 \tag{11}$$

ahol

$$u_H = \frac{2 \cdot \det \begin{bmatrix} A_{1,2} & y_1 - y_2 \\ A_{1,3} & y_1 - y_3 \end{bmatrix}}{4 \cdot \det \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{bmatrix}} \tag{12}$$

vagyis

$$u_H = \boxed{\frac{A_{1,2}\,(y_1 - y_3) - A_{1,3}\,(y_1 - y_2)}{2 \cdot [(x_1 - x_2)\,(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)\,(y_1 - y_2)]}}\,, \tag{13}$$

$$v_H = \frac{2 \cdot \det \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & A_{1,2} \\ x_1 - x_3 & A_{1,3} \end{bmatrix}}{4 \cdot \det \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{bmatrix}} \tag{14}$$

vagyis

$$v_H = \boxed{\frac{A_{1,3}\,(x_1 - x_2) - A_{1,2}\,(x_1 - x_3)}{2 \cdot [(x_1 - x_2)\,(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)\,(y_1 - y_2)]}} \tag{15}$$

és

$$r_H = \boxed{\sqrt{(x_1 - u)^2 + (y_1 - v)^2}} \tag{16}$$

ahol

$$A_{1,2} = \left(x_1^2 - x_2^2\right) + \left(y_1^2 - y_2^2\right)\ , \qquad A_{1,3} = \left(x_1^2 - x_3^2\right) + \left(y_1^2 - y_3^2\right)\ . \tag{17}$$

Megjegyzés: (13) és (15) nevezője pontosan akkor 0 , ha a det sorai párhuzamosak, vagyis $\overrightarrow{P_1P_2} \parallel \overrightarrow{P_1P_3}$ vagyis a három pont egy egyenesen van (kollineárisak).

III.a) Három pontra illeszkedő ellipszis egyenlete

Három adott $P_i\,(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ **pontra** illeszkedő **ellipszis** egyenletét keressük. [WE] képlete (nincs [WM]-ban):

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)+q(y-y_1)(y-y_2)}{(y-y_1)(x-x_2)-(x-x_1)(y-y_2)} = \frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)+q(y_3-y_1)(y_3-y_2)}{(y_3-y_1)(x_3-x_2)-(x_3-x_1)(y_3-y_2)}\,, \tag{18}$$

determinánsokkal: (ld. [WE])

$$\frac{(\overrightarrow{z}-\overrightarrow{z_1}) *_q (\overrightarrow{z}-\overrightarrow{z_2})}{\det\left((\overrightarrow{z}-\overrightarrow{z_1}),(\overrightarrow{z}-\overrightarrow{z_2})\right)} = \frac{(\overrightarrow{z_3}-\overrightarrow{z_1}) *_q (\overrightarrow{z_3}-\overrightarrow{z_2})}{\det\left((\overrightarrow{z_3}-\overrightarrow{z_1}),(\overrightarrow{z_3}-\overrightarrow{z_2})\right)} \tag{19}$$

ahol $\overrightarrow{z_i} = (x_i, y_i)$ és

$$\overrightarrow{u} *_q \overrightarrow{v} := u_1v_1 + qu_2v_2 \tag{20}$$

a módosított skaláris szorzat ($q = 1$ esetén a szokásos skaláris szorzat).

Nyilván körnél $q = 1$.

Figyelem: A (18) bal oldali tört *nevezőjében* is van x és y , vagyis (18) egy többszörösen implicit függvény! (18) -at nyilván át kell rendeznünk, hogy (1) alakú legyen, ezt a fejezet végén (33)-(39) között adjuk meg.

A jobboldali tört nevezője pontosan akkor 0 , ha a det sorai párhuzamosak, vagyis $\overrightarrow{P_3P_1} \parallel \overrightarrow{P_3P_2}$ illetve $\overrightarrow{PP_1} \parallel \overrightarrow{PP_2}$, vagyis a három pont kollineáris.

Ha ismerjük q **értékét,** akkor három pont (18) -ban megadja az ellipszis egyenletét. Ha q értéke nem ismert, akkor négy pontra van szükségünk, és a következő alfejezetben leírt számításokat kell alkalmaznunk.

III.b) Négy pontra illeszkedő ellipszis egyenlete

Ha nem ismerjük q értékét, akkor négy pont szükséges az ellipszis megadásához: a P_4 pont rajta van a P_1, P_2, P_3 pontok által meghatározott ellipszisen, vagyis (18) -ba behelyettesítve kapjuk:

$$\frac{(x_4-x_1)(x_4-x_2)+q\cdot(y_4-y_1)(y_4-y_2)}{(y_4-y_1)(x_4-x_2)-(x_4-x_1)(y_4-y_2)}=\frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)+q\cdot(y_3-y_1)(y_3-y_2)}{(y_3-y_1)(x_3-x_2)-(x_3-x_1)(y_3-y_2)}\ , \tag{21}$$

vagy rövidebben:

$$\frac{B^x_{4142}+q\cdot B^y_{4142}}{C_{4142}}=\frac{B^x_{3132}+q\cdot B^y_{3132}}{C_{3132}} \tag{22}$$

ahol

$$B^x_{4142}=(x_4-x_1)\,(x_4-x_2)\ ,\qquad B^y_{4142}=(y_4-y_1)\,(y_4-y_2)\ , \tag{23}$$

$$B^x_{3132}=(x_3-x_1)\,(x_3-x_2)\ ,\qquad B^y_{3132}=(y_3-y_1)\,(y_3-y_2)\ , \tag{24}$$

$$C_{4142}=(y_4-y_1)\,(x_4-x_2)-(x_4-x_1)\,(y_4-y_2)=\det\begin{bmatrix}y_4-y_1 & x_4-x_1\\ y_4-y_2 & x_4-x_2\end{bmatrix}\ , \tag{25}$$

$$C_{3132}=(y_3-y_1)\,(x_3-x_2)-(x_3-x_1)\,(y_3-y_2)=\det\begin{bmatrix}y_3-y_1 & x_3-x_1\\ y_3-y_2 & x_3-x_2\end{bmatrix}\ . \tag{26}$$

A (22) -ben szereplő mennyiséget (37)-től kezdve E -vel fogjuk jelölni.

A (22) egyenlet megoldása:

$$q = \left(\frac{B^x_{4142}}{C_{4142}} - \frac{B^x_{3132}}{C_{3132}} \right) / \left(\frac{B^y_{3132}}{C_{3132}} - \frac{B^y_{4142}}{C_{4142}} \right) \tag{27}$$

vagy másképpen:

$$q = (-1) \cdot \frac{B^x_{3132} C_{4142} - B^x_{4142} C_{3132}}{B^y_{3132} C_{4142} - B^y_{4142} C_{3132}} \tag{28}$$

vagy

$$q = \frac{-\ \det \begin{bmatrix} B^x_{3132} & C_{3132} \\ B^x_{4142} & C_{4142} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} B^y_{3132} & C_{3132} \\ B^y_{4142} & C_{4142} \end{bmatrix}} \ , \tag{29}$$

illetve, a négy pont koordinátáival közvetlenül felírva:

$$q = \frac{-\left(x_3 - x_1\right)\left(x_3 - x_2\right)\left(y_4 - y_1\right)\left(x_4 - x_2\right) + \left(x_4 - x_1\right)\left(x_4 - x_2\right)\left(y_3 - y_1\right)\left(x_3 - x_2\right)}{\left(y_3 - y_1\right)\left(y_3 - y_2\right)\left(y_4 - y_1\right)\left(x_4 - x_2\right) - \left(y_4 - y_1\right)\left(y_4 - y_2\right)\left(y_3 - y_1\right)\left(x_3 - x_2\right)} \ , \tag{30}$$

feltéve, ha a nevező nem nulla, azaz

$$B^y_{3132} C_{4142} \neq B^y_{4142} C_{3132} \ , \tag{31}$$

vagy részletesen:

$$\left(y_3 - y_1\right)\left(y_3 - y_2\right)\left(y_4 - y_1\right)\left(x_4 - x_2\right) \neq \left(y_4 - y_1\right)\left(y_4 - y_2\right)\left(y_3 - y_1\right)\left(x_3 - x_2\right) \ . \tag{32}$$

Vigyázzunk: $q > 0$, azaz q **csak pozitív lehet!**

Továbbá $q = \frac{a^2}{b^2}$ csak a és b *hányadosát* adja meg, konkrét értékét nem! A következő fejezet (33) - (39) összefüggéseiből kapjuk meg a és b pontos értékeit!

Nyilvánvalóan $q = 1$ pontosan akkor, ha a négy pont *egy körön* van.

III.c) A végeredmény

A (18) egyenletet átalakíthatjuk (1) alakúra, felhasználjuk a (18) és (22) összefüggéseket és a (23) - (26) rövidítéseket[1)].

A végeredmény a következő:

$$(x-U)^2 + q\,(y-V)^2 = F \tag{33}$$

azaz

$$\frac{(x-U)^2}{F} + \frac{(y-V)^2}{F/q} = 1 \tag{34}$$

ahol

$$U = \frac{E\,(y_2 - y_1) + x_2 + x_1}{2} \tag{35}$$

$$V = \frac{E\,(x_1 - x_2) + q\,(y_2 + y_1)}{2q} = \frac{E\,(x_1 - x_2)}{2q} + \frac{y_2 + y_1}{2} \tag{36}$$

$$E = \frac{B^x_{3132} + q \cdot B^y_{3132}}{C_{3132}}\ , \qquad F = U^2 + qV^2 - W \tag{37}$$

és

$$W = x_1x_2 + qy_1y_2 + E\,(x_1y_2 - x_2y_1) \tag{38}$$

tehát

$$u = U\ ,\quad v = V\ ,\quad a^2 = F \quad \textit{és} \quad b^2 = \frac{F}{q}\ , \tag{39}$$

q értékét pedig vagy ismerjük *de facto* vagy (28) adja meg.

Most (18) -ból levezetjük a fenti (33) - (39) végeredményt. Felhasználjuk a (18) és (22) összefüggéseket és a (23) - (26) és a (35) - (39) rövidítéseket.

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2) + q(y-y_1)(y-y_2)}{(y-y_1)(x-x_2) - (x-x_1)(y-y_2)} = \frac{B^x_{3132} + q \cdot B^y_{3132}}{C_{3132}} = E \tag{40}$$

[1)] A levezetést (40)-(43) -ban alább adjuk meg.

$$(x-x_1)(x-x_2)+q(y-y_1)(y-y_2)=E\cdot((y-y_1)(x-x_2)-(x-x_1)(y-y_2)) \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
qy^2-xx_2-xx_1+x_1x_2+x^2-qyy_1-qyy_2+xEy_1-&\\
-yEx_1-xEy_2+yEx_2+qy_1y_2+Ex_1y_2-Ex_2y_1&=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2+(Ey_1-x_2-x_1-Ey_2)\cdot x+qy^2+(Ex_2-qy_2-Ex_1-qy_1)\cdot y+&\\
+(x_1x_2+qy_1y_2+Ex_1y_2-Ex_2y_1)&=0
\end{aligned}$$

$$x^2-2U\cdot x+qy^2-2qV\cdot y+W=0 \quad (42)$$

vagyis

$$(x-U)^2+q\,(y-V)^2=U^2+qV^2-W \quad (43)$$

ahol E,U,V,W értékét (36) - (38) -ban definiáltuk, q értékét vagy ismerjük vagy (28) -ban kapjuk meg.

III.d) Összefoglalva

Ha ismerjük q értékét, akkor három adott pont elég: $P_i\,(x_i,y_i)$, $i=1,2,3$, ekkor csak a (24), (26) és (36) - (38) képleteket kell használnunk.

Ha q értékét *nem* ismerjük, akkor négy adott pontra, $P_i\,(x_i,y_i)$, $i=1,2,3,4$ van szükségünk. Ekkor ((23) - (26) kiszámítása után (28) megadja q értékét. Ezután az (36) - (38) kifejezéseket kell kiszámítanunk, és végül (39) és (1) megadja az ellipszis egyenletét.

III.e) Példa

A fenti képletek használatát a következő ellipszis közelítésével mutatjuk be:

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1 \ , \tag{44}$$

vagyis

$$a = 2 \ , \quad b = 3 \ , \quad q = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 0.44\dot{4} \ . \tag{45}$$

Az ellipszist az 1.a) ábrán láthatjuk.

Legyenek a P_i pontok a következők:

$$P_1\,(1.5\ ,\ 4.9)\,,\, P_2\,(2\ ,\ 4.6)\ \ ,\, P_3\,(-0.8\ ,\ 0.69)\ \ ,\, P_4\,(-0.5\ ,\ 4)\ \ . \tag{46}$$

A fenti pontok nem elemei a (44) ellipszisnek, hiszen kettő tizedesjegyre kerekítettünk, de nagyon közel vannak a görbéhez. A (48) - (71) számolás végén (72) - (73) -ban ellenőrizzük a hibát (amely 3% -nak adódott).

HÁROM PONT

Egyelőre csak a $P_1\,(1.5, 4.9)$, $P_2\,(2, 4.6)$, $P_3\,(-0.8, 0.69)$ pontokat tekintjük, $q = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ ismert. Most használhatjuk a (18) képletet:

$$\frac{(x-1.5)(x-2) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 (y-4.9)(y-4.6)}{(y-4.9)(x-2) - (x-1.5)(y-4.6)} = \tag{47}$$

$$= \frac{(-0.8-1.5)(-0.8-2) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot (0.69-4.9)(0.69-4.6)}{(0.69-4.9)(-0.8-2) - (-0.8-1.5)(0.69-4.6)} \ ,$$

amely (implicit) görbét az 1.b) ábrán láthatjuk.

Saját számolásaink (24) - (26) szerint a következők:

$$B_{3132}^{x} = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = (-0.8 - 1.5)(-0.8 - 2) = 6.44 \tag{48}$$

$$B_{3132}^{y} = (y_3 - y_1)(y_3 - y_2) = (0.69 - 4.9)(0.69 - 4.6) = 16.4611 \tag{49}$$

$$\begin{aligned} C_{3132} &= (y_3 - y_1)(x_3 - x_2) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_2) = \\ &= (0.69 - 4.9)(-0.8 - 2) - (-0.8 - 1.5)(0.69 - 4.6) = 2.795 \end{aligned} \tag{50}$$

$$E = \frac{B_{3132}^{x} + q \cdot B_{3132}^{y}}{C_{3132}} = \frac{6.44 + (2/3)^2 \cdot 16.4611}{2.795} \approx 4.921\,661\,697 \tag{51}$$

$$\begin{aligned} u &= U = \frac{E \cdot (y_2 - y_1) + x_1 + x_2}{2} \approx \frac{4.921\,661\,697 \cdot (4.6 - 4.9) + 1.5 + 2}{2} \\ &\approx 1.011\,750\,745 \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} v &= V = \frac{E \cdot (x_1 - x_2)}{2q} + \frac{y_1 + y_2}{2} \approx \frac{4.921\,661\,697 \cdot (1.5 - 2)}{2 \cdot (2/3)^2} + \frac{4.9 + 4.6}{2} \\ &\approx 1.981\,565\,295 \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} W &= x_1 x_2 + q \cdot y_1 y_2 + E \cdot (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &\approx 1.5 \cdot 2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \cdot 4.9 \cdot 4.6 + 4.921\,661\,697 \cdot (1.5 \cdot 4.6 - 2 \cdot 4.9) \\ &\approx -1.255\,041\,144 \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= F = U^2 + qV^2 - W \approx \\ &\approx 1.011\,750\,745^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \cdot 1.981\,565\,295^2 + 1.255\,041\,144 \\ &\approx 4.023\,836\,722 \end{aligned} \tag{55}$$

$$a \approx \sqrt{4.023\,836\,722} \approx 2.005\,950\,329 \tag{56}$$

$$b^2 = \frac{F}{q} \approx \tfrac{4.023\,836\,722}{(2/3)^2} \approx 9.053\,632\,625 \tag{57}$$

$$b \approx \sqrt{9.053\,632\,625} \approx 3.008\,925\,493 \ . \tag{58}$$

NÉGY PONT

Legyenek a P_i pontok (46) szerint a következők: $P_1\,(1.5\ ,\ 4.9)$, $P_2\,(2\ ,\ 4.6)$, $P_3\,(-0.8\ ,\ 0.69)$, $P_4\,(-0.5\ ,\ 4)$. Ekkor a (48) - (50) számolások után, (23) - (28) szerint a következőket kell kiszámolnunk:

$$B^x_{4142} = (x_4 - x_1)\,(x_4 - x_2) = (-0.5 - 1.5)\,(-0.5 - 2) = 5.0 \tag{59}$$

$$B^y_{4142} = (y_4 - y_1)\,(y_4 - y_2) = (4 - 4.9)\,(4 - 4.6) = 0.54 \tag{60}$$

$$\begin{aligned} C_{4142} &= (y_4 - y_1)\,(x_4 - x_2) - (x_4 - x_1)(y_4 - y_2) \\ &= (4 - 4.9)\,(-0.5 - 2) - (-0.5 - 1.5)\,(4 - 4.6) = 1.05 \end{aligned} \tag{61}$$

$$q = (-1) \cdot \frac{B^x_{3132} C_{4142} - B^x_{4142} C_{3132}}{B^y_{3132} C_{4142} - B^y_{4142} C_{3132}} \approx (-1) \cdot \tfrac{6.44 \cdot 1.05 - 5.0 \cdot 2.795}{16.4611 \cdot 1.05 - 0.54 \cdot 2.795} \approx 0.457\,246\,6752\ , \tag{62}$$

továbbá (36) - (38) szerint:

$$E = \frac{B^x_{3132} + q \cdot B^y_{3132}}{C_{3132}} \approx \tfrac{6.44 + 0.457\,246\,6752 \cdot 16.4611}{2.795} \approx 4.997\,060\,195 \tag{63}$$

$$\begin{aligned} u &= U = \frac{E \cdot (y_2 - y_1) + x_1 + x_2}{2} \\ &\approx \tfrac{4.997\,060\,195 \cdot (4.6 - 4.9) + 1.5 + 2}{2} \approx 1.000\,440\,971 \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} v &= V = \frac{E \cdot (x_1 - x_2)}{2q} + \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &\approx \tfrac{4.997\,060\,195 \cdot (1.5 - 2)}{2 \cdot 0.457\,246\,6752} + \tfrac{4.9 + 4.6}{2} \approx 2.017\,853\,182 \end{aligned} \tag{65}$$

$$
\begin{aligned}
W &= x_1x_2 + qy_1y_2 + E\cdot(x_1y_2 - x_2y_1) \\
&\approx 1.5\cdot 2 + 0.457\,246\,6752\cdot 4.9\cdot 4.6 + 4.997\,060\,195\cdot(1.5\cdot 4.6 - 2\cdot 4.9) \quad (66)\\
&\approx -1.185\,134\,506
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a^2 &= F = U^2 + qV^2 - W \\
&\approx 1.000\,440\,971^2 + 0.457\,246\,6752\cdot 2.017\,853\,182^2 + 1.185\,134\,506 \quad (67)\\
&\approx 4.047\,802\,317
\end{aligned}
$$

$$
a \approx \sqrt{4.047\,802\,317} \approx 2.011\,915\,087 \quad (68)
$$

$$
b^2 = \frac{F}{q} \approx \tfrac{4.047\,802\,317}{0.457\,246\,6752} \approx 8.852\,557\,135 \quad (69)
$$

$$
b \approx \sqrt{8.852\,557\,135} \approx 2.975\,324\,711 \ , \quad (70)
$$

tehát az ellipszis egyenlete a fentiek és (34) alapján :

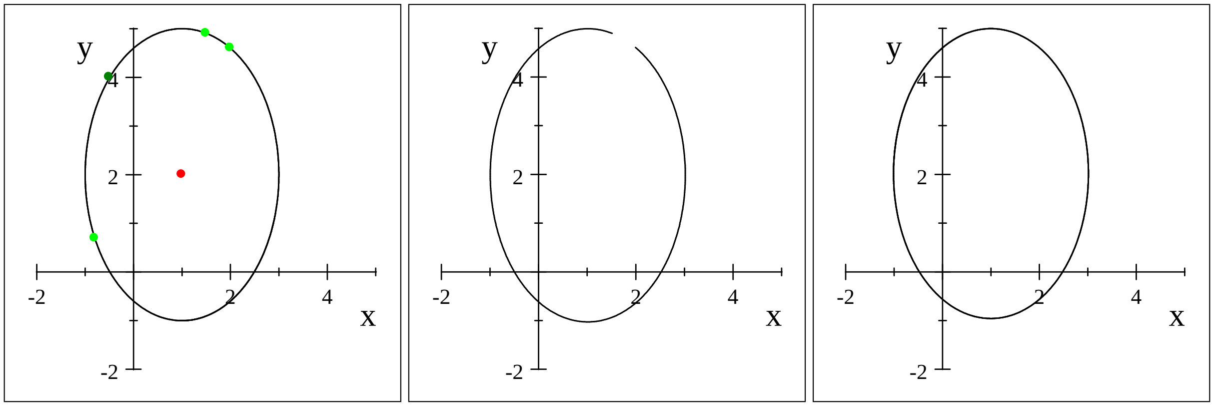
$$
\frac{(x-1.000\,440\,971)^2}{4.047\,802\,317} + \frac{(y-2.017\,853\,182)^2}{8.852\,557\,135} = 1 \ , \quad (71)
$$

ezt a görbét az 1.c) ábrán láthatjuk.

q értékének (62) -beli közelítésének abszolút és relatív hibája:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= q - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 0.457\,246\,6752 - 0.444\,444\,4444 \\
&\approx 0.012\,802\,2308 \ , \quad (72)
\end{aligned}
$$

$$
\delta = \frac{\Delta}{(2/3)^2} \approx \tfrac{0.012\,802\,2308}{0.444\,444\,4444} \approx 0.028\,805\,0193 < 3\% \ . \quad (73)
$$



1. ábra: *A vizsgált ellipszisek és a* (46) *pontok*
a) (44) - , **b)** (47) - , **c)** (71) - *szerint*

IV. Egyenes állású ellipszisek görbülete

IV.a) Pontbeli görbület

Általában egy Γ görbe g görbülete

$$y = f(x) \quad esetén \quad g(x) = \frac{y"}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}} \tag{74}$$

$$\Gamma = (x(t), y(t)) \quad esetén \quad g(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\left((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\right)^{3/2}} \ . \tag{75}$$

Tehát (a számításokat lásd [Sz2]-ben) a (2) ellipszis görbülete

$$g(t) = \frac{ab}{\sqrt{\left[a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)\right]^3}} \ . \tag{76}$$

Az (1) ellipszis görbülete ([Sz2])

$$g(x, y) = \frac{a^4 b^4}{\sqrt{\left(a^4 (y-v)^2 + b^4 (x-u)^2\right)^3}} \tag{77}$$

ahol (x, y) az ellipszis bármelyik pontja (vagyis kielégíti az (1) vagy (2) egyenletet). [WE] -ben csak az origó középpontú (azaz $(u, v) = (0, 0)$) ellipszis görbülete található:

$$g(x, y) = \frac{1}{a^2 b^2 \sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^3}} \ , \tag{78}$$

ami megegyezik (77) -tel.

A görbület az $x_0 = u$ illetve $y_0 = v$ "*csúcs*"-pontokban minimális illetve maximális. Tehát (1) és (77) alapján:

$x_0 = u$ esetén $y_u = v \pm b$, ekkor

$$g(u, y_u) = \frac{a^4 b^4}{\sqrt{\left(a^4 b^2 + 0\right)^3}} = \frac{b}{a^2} \ , \tag{79}$$

$y_0 = v$ esetén $x_v = u \pm a$, ekkor

$$g(x_v, v) = \frac{a^4 b^4}{\sqrt{(0 + a^2 b^4)^3}} = \frac{a}{b^2} \; . \tag{80}$$

IV.b) A görbület függése a távolságtól

Szemléletesen is látjuk, hogy az elllipszis középpontjától távolodva az ellipszis görbülete nő (a simulókör sugara csökken). Most ezt az összefüggést számítjuk ki részletesen.

A (2) összefüggés alapján az ellipszis P pontjának az (u, v) középponttól való $d = d(t)$ távolsága

$$d(t) = \sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} \; . \tag{81}$$

A (76) képlet *nevezőjét* ennek megfelelően alakítjuk át:

$$a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t) = a^2 \left(1 - \cos^2(t)\right) + b^2 \left(1 - \sin^2(t)\right) = a^2 + b^2 - d^2 \; , \tag{82}$$

tehát

$$g(d) = \frac{ab}{\sqrt{(\; a^2 + b^2 - d^2 \;)^3}} \tag{83}$$

B) Ferde állású ellipszisek

Cél: olyan ellipszisek vizsgálata, amelyek tengelyei φ szöget zárnak be az x és y koordinátatengelyekkel, vagyis a kép éleivel.

V. A koordinátarendszer elforgatása

Ismert, hogy egy tetszőleges $P(x,y) = [x,y]^T$ pontot az origó körül φ szöggel elforgatva az $P' = \mathbf{M}{\cdot}P$ pontot kapjuk, ahol $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ a forgatás mátrixa. A visszaforgatás mátrixa nyilván

$$\mathbf{M}_{-\boldsymbol{\varphi}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{\boldsymbol{\varphi}}^{-1} \tag{84}$$

hiszen $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ és $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$.

Bevezetjük a

$$c_\varphi := \cos\varphi \quad \textit{és} \quad s_\varphi := \sin\varphi \tag{85}$$

rövidítéseket, ekkor $P' = (x', y') = [x', y']^T$ esetén

$$x' = x \cdot c_\varphi - y \cdot s_\varphi \ , \quad y' = x \cdot s_\varphi + y \cdot c_\varphi \tag{86}$$

és

$$x = x' \cdot c_\varphi + y' \cdot s_\varphi \ , \quad y = -x' \cdot s_\varphi + y' \cdot c_\varphi \ , \tag{87}$$

majd utána egy $\overrightarrow{w} = (u, v)$ vektorú eltolást alkalmazva

$$x' = x \cdot c_\varphi - y \cdot s_\varphi + u \ , \quad y' = x \cdot s_\varphi + y \cdot c_\varphi + v \tag{88}$$

és

$$x = (x' - u) \cdot c_\varphi + (y' - v) \cdot s_\varphi \ , \quad y = -(x' - u) \cdot s_\varphi + (y' - v) \cdot c_\varphi \ . \tag{89}$$

Görbék általános elforgatása

Ha az $\mathcal{F}(x,y) = 0$ (implicit) egyenletű Γ görbét elforgatjuk az origó körül φ szöggel és utána eltoljuk egy $\overrightarrow{w} = (u,v)$ vektorral, akkor a kapott $P' = (x',y')$ pontok által alkotott Γ' görbe pontjaira (89) alapján az

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'(x',y') &= \mathcal{F}(x,y) = \\ &= \mathcal{F}\left((x'-u)\cdot c_\varphi + (y'-v)\cdot s_\varphi\ ,\ -(x'-u)\cdot s_\varphi + (y'-v)\cdot c_\varphi\right) = 0\end{aligned} \tag{90}$$

(implicit) egyenlet teljesül.

Ha pedig a Γ görbe pontjait az

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad (t_1 \le t \le t_2) \tag{91}$$

paraméteres alakban adtuk meg, akkor az elforgatott és eltolt Γ' görbe pontjait az

$$\begin{cases} x' = f(t)\cdot c_\varphi - g(t)\cdot s_\varphi + u \\ y' = f(t)\cdot s_\varphi + g(t)\cdot c_\varphi + v \end{cases} \qquad (t_1 \le t \le t_2) \tag{92}$$

paraméteres egyenletrendszer adja meg.

VI. Ferde ellipszisek egyenlete

(1), (2), (90) és (92) alapján az (u,v) középpontú és φ tengelyállású ellipszis egyenlete:

$$\frac{\left[(x'-u)\cdot c_\varphi + (y'-v)\cdot s_\varphi\right]^2}{a^2} + \frac{\left[-(x'-u)\cdot s_\varphi + (y'-v)\cdot c_\varphi\right]^2}{b^2} = 1 \tag{93}$$

illetve

$$\begin{cases} x' = a\cdot\cos(t)\cdot c_\varphi - b\cdot\sin(t)\cdot s_\varphi + u \\ y' = a\cdot\cos(t)\cdot s_\varphi + b\cdot\sin(t)\cdot c_\varphi + v \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi)\ . \tag{94}$$

Természetesen az egyenletek felírásakor egyszerűen csak x és y -t írunk x' és y' helyett.

Az ellipszis és tengelyeinek metszéspontjait az "*eredeti*" $A_{1,2}(\pm a,0)$ és $B_{1,2}(0,\pm b)$ "*csúcspontok*" elforgatásával és eltolásával kapjuk meg, vagyis (88) alapján

$$A_{1,2}^{\varphi} = (\pm a\cdot c_\varphi + u\ ,\ \pm a\cdot s_\varphi + v) \tag{95}$$

és
$$B_{1,2}^{\varphi} = (\mp b \cdot s_{\varphi} + u \ , \ \pm b \cdot c_{\varphi} + v) \ . \tag{96}$$

Például: $a = 1.5$, $b = 3$, $\varphi = 20^o = \dfrac{\pi}{9}$ és $\overrightarrow{w} = (u,v) = (-0.5,-1)$ esetén, (93) szerint:

$$\frac{\left[(x'+0.5)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+(y'+1)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right]^2}{1.5^2}+\frac{\left[-(x'+0.5)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)+(y'+1)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right]^2}{3^2}=1 \tag{97}$$

illetve ugyanez az ellipszis paraméteres formában:

$$\begin{cases} 1.5\cdot\cos(t)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)-3\cdot\sin(t)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)-0.5 \\ 1.5\cdot\cos(t)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)+3\cdot\sin(t)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)-1 \end{cases} \tag{98}$$

A fenti ellipszisek "csúcspontjai" (95) és (96) alapján:

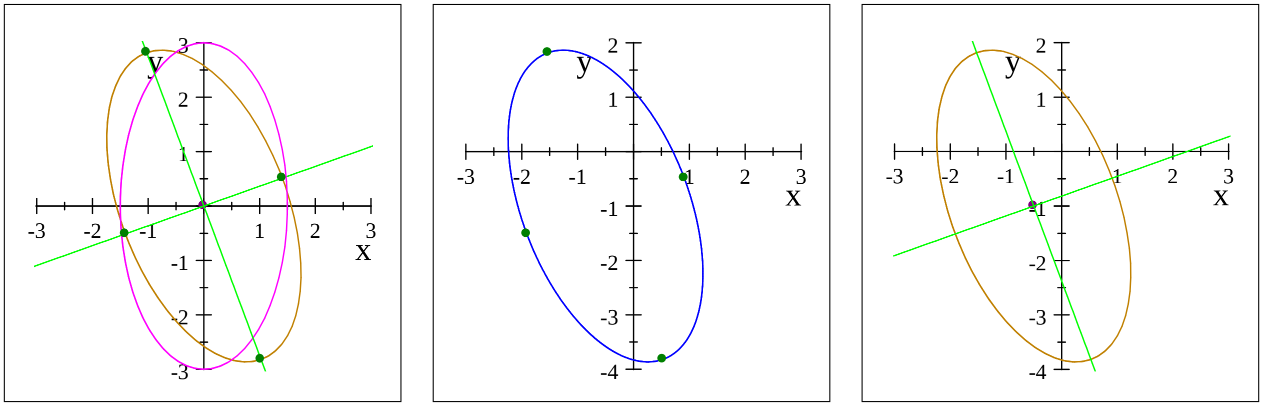
$$\begin{aligned} A_1^{20^o} &= \left(1.5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)-0.5\ ,\ 1.5\cdot\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)-1\right) \\ &\approx (0.909\,538\,9312, -0.486\,969\,785) \end{aligned} \tag{99}$$

$$\begin{aligned} A_2^{20^o} &= \left(-1.5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)-0.5\ ,\ -1.5\cdot\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)-1\right) \\ &\approx (-1.909\,538\,931, -1.513\,030\,215) \end{aligned} \tag{100}$$

$$\begin{aligned} B_{1,2}^{\varphi} &= \left(-3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)-0.5\ ,\ 3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)-1\right) \\ &\approx (-1.526\,060\,430, 1.819\,077\,862) \end{aligned} \tag{101}$$

$$\begin{aligned} B_{1,2}^{\varphi} &= \left(3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)-0.5\ ,\ -3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)-1\right) \\ &\approx (0.526\,060\,430, -3.819\,077\,862)\ . \end{aligned} \tag{102}$$

Az eredeti és az elforgatott ellipsziseket láthatjuk a 2. ábrán.



2. ábra: **a)** *az eredeti és elforgatott ellipszis,*
b) *a* (97) *implicit egyenlet* **c)** *a* (98) *paraméteres egyenletrendszer*

VII. Ferde ellipszisek érintői

A (6) és (88) - (90) eredmények alapján a (93) egyenletű ellipszis $P_0\left(x_0', y_0'\right)$ pontjához (azaz ha $P_0\left(x_0', y_0'\right)$ kielégíti a (93) egyenletet) húzott érintőjének implicit egyenlete

$$\begin{aligned} & \frac{\left[\left(x_0'-u\right)\cdot c_\varphi+\left(y_0'-v\right)\cdot s_\varphi\right]}{a^2}\cdot\left[\left(x'-u\right)\cdot c_\varphi+\left(y'-v\right)\cdot s_\varphi\right] \\ & +\frac{\left[-\left(x_0'-u\right)\cdot s_\varphi+\left(y_0'-v\right)\cdot c_\varphi\right]}{b^2}\cdot\left[-\left(x'-u\right)\cdot s_\varphi+\left(y'-v\right)\cdot c_\varphi\right] \\ = \;& 1\ , \end{aligned} \tag{103}$$

y' -re megoldva (ha a nevező nem nulla):

$$\begin{aligned} y' \;=\; & \frac{b^2\cdot\left(v s_\varphi+c_\varphi\left(u-x'\right)\right)\cdot\left(c_\varphi\left(u-x_0'\right)+s_\varphi\left(v-y_0'\right)\right)+}{a^2 c_\varphi\left(c_\varphi\left(v-y_0'\right)-s_\varphi\left(u-x_0'\right)\right)+b^2 s_\varphi\left(c_\varphi\left(u-x_0'\right)+s_\varphi\left(v-y_0'\right)\right)}+ \\ & +\frac{a^2\cdot\left(v c_\varphi-s_\varphi\left(u-x'\right)\right)\cdot\left(c_\varphi\left(v-y_0'\right)-s_\varphi\left(u-x_0'\right)\right)-1}{a^2 c_\varphi\left(c_\varphi\left(v-y_0'\right)-s_\varphi\left(u-x_0'\right)\right)+b^2 s_\varphi\left(c_\varphi\left(u-x_0'\right)+s_\varphi\left(v-y_0'\right)\right)} \end{aligned} \tag{104}$$

azaz szokásos alakban felírva

$$
\begin{aligned}
y' \;=\;& \frac{a^2 s_\varphi\cdot\left[c_\varphi\left(v-y_0'\right)-s_\varphi\left(u-x_0'\right)\right]-b^2 c_\varphi\cdot\left[c_\varphi\left(u-x_0'\right)+s_\varphi\left(v-y_0'\right)\right]}{a^2 c_\varphi\cdot\left[c_\varphi\left(v-y_0'\right)-s_\varphi\left(u-x_0'\right)\right]+b^2 s_\varphi\cdot\left[c_\varphi\left(u-x_0'\right)+s_\varphi\left(v-y_0'\right)\right]}\cdot x' + \\
&+\frac{\left(vc_\varphi-us_\varphi\right)\cdot\left(c_\varphi\left(v-y_0'\right)-s_\varphi\left(u-x_0'\right)\right)\cdot a^2+\left(uc_\varphi+vs_\varphi\right)\cdot\left(c_\varphi\left(u-x_0'\right)+s_\varphi\left(v-y_0'\right)\right)\cdot b^2-1}{a^2 c_\varphi\cdot\left[c_\varphi\left(v-y_0'\right)-s_\varphi\left(u-x_0'\right)\right]+b^2 s_\varphi\cdot\left[c_\varphi\left(u-x_0'\right)+s_\varphi\left(v-y_0'\right)\right]}
\end{aligned}
\tag{105}
$$

amelynek meredeksége láthatóan

$$
m=\frac{a^2 s_\varphi\cdot\left[c_\varphi\left(v-y_0'\right)-s_\varphi\left(u-x_0'\right)\right]-b^2 c_\varphi\cdot\left[c_\varphi\left(u-x_0'\right)+s_\varphi\left(v-y_0'\right)\right]}{a^2 c_\varphi\cdot\left[c_\varphi\left(v-y_0'\right)-s_\varphi\left(u-x_0'\right)\right]+b^2 s_\varphi\cdot\left[c_\varphi\left(u-x_0'\right)+s_\varphi\left(v-y_0'\right)\right]}\ . \tag{106}
$$

Ha felhasználjuk a

$$
\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)} \tag{107}
$$

azonosságot, akkor (9) alapján

$$
\begin{aligned}
m \;=\;& \frac{\tan(\varphi)+\frac{-b^2\cdot\left[\left(x_0'-u\right)\cdot c_\varphi+\left(y_0'-v\right)\cdot s_\varphi\right]}{a^2\cdot\left[-\left(x_0'-u\right)\cdot s_\varphi+\left(y_0'-v\right)\cdot c_\varphi\right]}}{1-\tan(\varphi)\cdot\frac{-b^2\cdot\left[\left(x_0'-u\right)\cdot c_\varphi+\left(y_0'-v\right)\cdot s_\varphi\right]}{a^2\cdot\left[-\left(x_0'-u\right)\cdot s_\varphi+\left(y_0'-v\right)\cdot c_\varphi\right]}} = \\
=\;& \frac{a^2 s_\varphi\cdot\left[-\left(x_0'-u\right)\cdot s_\varphi+\left(y_0'-v\right)\cdot c_\varphi\right]-b^2 c_\varphi\cdot\left[\left(x_0'-u\right)\cdot c_\varphi+\left(y_0'-v\right)\cdot s_\varphi\right]}{a^2 c_\varphi\cdot\left[-\left(x_0'-u\right)\cdot s_\varphi+\left(y_0'-v\right)\cdot c_\varphi\right]+b^2 s_\varphi\cdot\left[\left(x_0'-u\right)\cdot c_\varphi+\left(y_0'-v\right)\cdot s_\varphi\right]}
\end{aligned}
\tag{108}
$$

ami megegyezik (106) -tal.

Természetesen a fenti törtek *nevezője* pontossan akkor 0 , ha az érintő függőleges. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$
a^2 c_\varphi\cdot\left[-\left(x_0'-u\right)\cdot s_\varphi+\left(y_0'-v\right)\cdot c_\varphi\right]+b^2 s_\varphi\cdot\left[\left(x_0'-u\right)\cdot c_\varphi+\left(y_0'-v\right)\cdot s_\varphi\right]=0 \tag{109}
$$

azaz

$$
\left(y_0'-v\right)\cdot\left(a^2c_\varphi^2+b^2s_\varphi^2\right)=\left(x_0'-u\right)\cdot c_\varphi s_\varphi\cdot\left(a^2-b^2\right) \tag{110}
$$

vagyis

$$
\frac{y_0'-v}{x_0'-u}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\cdot s_\varphi c_\varphi}{a^2c_\varphi^2+b^2s_\varphi^2}=\frac{\left(q^2-1\right)\cdot s_\varphi c_\varphi}{q^2c_\varphi^2+s_\varphi^2} \tag{111}
$$

ahol $\dfrac{y_0'-v}{x_0'-u}$ a $\overrightarrow{P_0K}$ vektor *iránytangense* és $K(u,v)$ az ellipszis középpontja,

$q = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

Mivel a $P_0\left(x_0', y_0'\right)$ pont rajta van a (93) -al ekvivalens (94) egyenletű ellipszisen, ezért (111) így írható:

$$\frac{as_\varphi \cos(t) + bc_\varphi \sin(t)}{ac_\varphi \cos(t) - bs_\varphi \sin(t)} = \frac{\left(a^2 - b^2\right) s_\varphi c_\varphi}{a^2 c_\varphi^2 + b^2 s_\varphi^2} \tag{112}$$

azaz

$$\left(as_\varphi \cos(t) + bc_\varphi \sin(t)\right) \cdot \left(a^2 c_\varphi^2 + b^2 s_\varphi^2\right) = \left(\left(a^2 - b^2\right) s_\varphi c_\varphi\right) \cdot \left(ac_\varphi \cos(t) - bs_\varphi \sin(t)\right) \tag{113}$$

$$ab \cdot \left(bs_\varphi \cos t + ac_\varphi \sin t\right) \cdot \left(c_\varphi^2 + s_\varphi^2\right) = 0 \tag{114}$$

$$bs_\varphi \cos t + ac_\varphi \sin t = 0 \tag{115}$$

tehát

$$\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-bs_\varphi}{ac_\varphi} \quad azaz \quad \tan(t) = \frac{-b}{a} \cdot \tan(\varphi)\ , \tag{116}$$

vagyis a $\overrightarrow{P_0 K}$ vektor iránytangensét a fenti (116) képlet adja meg.

A következő tétel segítségével a görbe kis darabjáról eldönthetjük, hogy milyen kúpszelet (ellipszis, parabola, hiperbola vagy egyenes) részlete:

7.1. Tétel [HGy] *Ha a közönséges másodrendű görbe AB húrjának felezőpontja H, az A, B pontokban vont érintők metszéspontja a közönséges E pont és az EH szakasz a görbét C pontban metszi, akkor a görbe pontosan akkor elliptikus, ha C az E, H pontok közül E -től van messzebb.* $\square$

VIII. Ferde ellipszisek megadása pontjaival

Már a III. fejezet bevezetésében említettük, hogy az egyenes állású ellipszisek (1) -beli kanonikus egyenletét sem sikerült egyenletrendszerrel közvetlenül meghatároznunk (lásd az [Sz1] kéziratot), ezért reménytelen a (93) egyenletben szereplő paramétereket egyenletrendszerrel meghatározni az adott $P_i\,(x_i, y_i)$ pontokból.

Meglepő módon a másodfokú görbék általános elmélete alapján kapjuk meg a $P_i\,(x_i, y_i)$ pontokra illeszkedő ellipszis egyenletét, amit először röviden ismertetünk a következő alfejezetben, elsősorban [HGy] alapján.

VIII.a) Másodfokú görbék

A másodfokú görbék általános egyenlete

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ , \tag{117}$$

vagy a mátrix alakhoz megfelelően

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \ , \tag{118}$$

vagyis a mátrix alak:

$$[x, y, 1] \cdot \mathbf{A} \cdot [x, y, 1]^T = 0 \quad \mathit{ahol} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{119}$$

a következő feltétellel:

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{23} = a_{32} \ . \tag{120}$$

Többször fogunk hivatkozni az a_{33} -hoz tartozó $\mathbf{A}_{33}$ *részmátrix aldeterminánsára*:

$$A_{33} := \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - (a_{12})^2 = AC - \frac{B^2}{4} \ , \tag{121}$$

(120) alapján.

8.1. Észrevétel: Ha néhány $P_i(x_i, y_i)$, $(i \leq n)$ ponttal akarunk meghatározni egy másodfokú görbét, akkor a következő egyenletrendszernek teljesülnie kell ($n = 6$ esetén):

$$\begin{cases} Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0 \\ Ax_2^2 + Bx_2y_2 + Cy_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0 \\ Ax_3^2 + Bx_3y_3 + Cy_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0 \\ Ax_4^2 + Bx_4y_4 + Cy_4^2 + Dx_4 + Ey_4 + F = 0 \\ Ax_5^2 + Bx_5y_5 + Cy_5^2 + Dx_5 + Ey_5 + F = 0 \\ Ax_6^2 + Bx_6y_6 + Cy_6^2 + Dx_6 + Ey_6 + F = 0 \end{cases}, \tag{122}$$

és mivel ez az egyenletrendszer homogén lineáris az $A, B, ..., F$ ismeretlenekre, ezért a rendszer determinánsa szükségszerűen 0 :

$$\det \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \\ x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 & x_6 & y_6 & 1 \end{bmatrix} = 0 \ . \tag{123}$$

Azonban ellipszisek meghatározásához kihasználhatjuk az ellipszisek és a kúpszeletek speciális tulajdonságait.

8.2. Tétel: ([HGy]) *Ha* öt *pont között nincs* három *egy egyenesen, akkor egyetlenegy olyan kúpszelet van, amely ezt az öt pontot tartalmazza.* □

Könnyen látható, hogy három pont $Z_1(x_1, y_1)$, $Z_2(x_2, y_2)$, $Z_3(x_3, y_3)$ pontosan akkor van egy egyenesen, ha $\overrightarrow{Z_1Z_2} \parallel \overrightarrow{Z_1Z_3}$ azaz

$$\det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0 \tag{124}$$

azaz

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \ . \tag{125}$$

(123) -ból azonnal következik:

8.3. Tétel: A $P_i\,(x_i, y_i)$, $(i \leq 5)$ pontok által meghatározott kúpszelet egyenlete (x és y az utolsó sorban van):

$$\det \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \\ x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \end{bmatrix} = 0\ . \qquad \square \tag{126}$$

Ne feledjük, hogy a 8.3. Tétel kúpszeletről szól, tehát akár (122) akár (126) megoldása előtt ellenőriznünk kell, hogy az öt pont valóban ellipszist ad-e meg. Ezzel a kérdéssel a következő alfejezetben foglalkozunk.

(126) tehát azt jelenti, hogy a (122) 6 -ismeretlenes egyenletrendszer megoldása helyett választhatjuk (126) -t, ami azonnal megadja a görbe (117) egyenletét. Azonban a gyakorlatban 6×6 méretű determinánsok számolása már időigényes, ezért célszerűbb az $A, B, ..., F$ együtthatók értékeit előre (egyszer) kiszámolnunk a rajzolás előtt. A végeredményt a *Függelékben* adjuk meg.

VIII.b) Általános ellipszisek

8.4. Tétel: ([HGy]) *A* (118) *görbe pontosan akkor ellipszis, ha*

$$A_{33} = a_{11} \cdot a_{22} - (a_{12})^2 = AC - \frac{B^2}{4} > 0\ . \qquad \square \tag{127}$$

Következő feladatunk a (117) alakban megtalált görbe egyenletéből a, b, u, v, φ megtalálása, amiket a (117) és (93) egyenletek összehasonlítása alapján tudunk kiszámolni.

A (93) egyenletet 0 -ra rendezzük és kifejtjük:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{a^2}c_\varphi^2+\frac{1}{b^2}s_\varphi^2\right)x^2+\left(\frac{2}{a^2}c_\varphi s_\varphi-\frac{2}{b^2}c_\varphi s_\varphi\right)xy+\left(\frac{1}{b^2}c_\varphi^2+\frac{1}{a^2}s_\varphi^2\right)y^2 \\
& +\left(\frac{2}{b^2}vc_\varphi s_\varphi-\frac{2}{b^2}us_\varphi^2-\frac{2}{a^2}vc_\varphi s_\varphi-\frac{2}{a^2}uc_\varphi^2\right)x \\
& +\left(\frac{2}{b^2}uc_\varphi s_\varphi-\frac{2}{a^2}vs_\varphi^2-\frac{2}{a^2}uc_\varphi s_\varphi-\frac{2}{b^2}vc_\varphi^2\right)y \qquad (128)\\
& +\left(\frac{1}{a^2}u^2c_\varphi^2+\frac{1}{b^2}v^2c_\varphi^2+\frac{1}{a^2}v^2s_\varphi^2+\frac{1}{b^2}u^2s_\varphi^2+\frac{2}{a^2}uvc_\varphi s_\varphi-\frac{2}{b^2}uvc_\varphi s_\varphi-1\right) \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

tehát

$$A = \frac{c_\varphi^2}{a^2}+\frac{s_\varphi^2}{b^2} \qquad (129)$$

$$B = 2c_\varphi s_\varphi\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right) \qquad (130)$$

$$C = \frac{c_\varphi^2}{b^2}+\frac{s_\varphi^2}{a^2} \qquad (131)$$

$$D = \frac{2}{b^2}vc_\varphi s_\varphi-\frac{2}{b^2}us_\varphi^2-\frac{2}{a^2}vc_\varphi s_\varphi-\frac{2}{a^2}uc_\varphi^2 \qquad (132)$$

$$E = \frac{2}{b^2}uc_\varphi s_\varphi-\frac{2}{a^2}vs_\varphi^2-\frac{2}{a^2}uc_\varphi s_\varphi-\frac{2}{b^2}vc_\varphi^2 \qquad (133)$$

$$F = \frac{1}{a^2}u^2c_\varphi^2+\frac{1}{b^2}v^2c_\varphi^2+\frac{1}{a^2}v^2s_\varphi^2+\frac{1}{b^2}u^2s_\varphi^2+\frac{2}{a^2}uvc_\varphi s_\varphi-\frac{2}{b^2}uvc_\varphi s_\varphi-1 \qquad (134)$$

Ez NEM egy reménytelen, bár nemlineáris egyenletrendszer, mert (129) - (131) -ben csak a, b és φ szerepel, (132) - (134) -ben pedig u és v csak első hatványon szerepelnek.

A (129) - (134) **egyenletrendszer megoldása:**

$$B=\sin(2\varphi)\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right) \qquad (135)$$

$$\begin{aligned}
A-C &= \frac{c_\varphi^2}{a^2}+\frac{s_\varphi^2}{b^2}-\frac{c_\varphi^2}{b^2}-\frac{s_\varphi^2}{a^2} \qquad (136)\\
&= \left(c_\varphi^2-s_\varphi^2\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\cos(2\varphi)\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)
\end{aligned}$$

tehát

$$\cos(2\varphi) \neq 0 \quad azaz \quad \varphi \neq \pm\frac{\pi}{4} \tag{137}$$

esetén

$$\frac{B}{A-C} = \tan(2\varphi) \tag{138}$$

vagyis

$$\varphi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{B}{A-C}\right) \quad \text{vagy} \quad \varphi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{B}{A-C}\right) + \frac{\pi}{2}\ . \tag{139}$$

Ezután A és C , azaz (129) és (131) alapján

$$\begin{cases} A = \dfrac{c_\varphi^2}{a^2} + \dfrac{s_\varphi^2}{b^2} \\ C = \dfrac{s_\varphi^2}{a^2} + \dfrac{c_\varphi^2}{b^2} \end{cases} \tag{140}$$

ahonnan

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\alpha}{\delta}\ \textit{és}\ \frac{1}{b^2} = \frac{\beta}{\delta} \quad vagyis \quad a = \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}}\ \textit{és}\ b = \sqrt{\frac{\delta}{\beta}} \tag{141}$$

ahol

$$\alpha = \det\begin{bmatrix} A & s_\varphi^2 \\ C & c_\varphi^2 \end{bmatrix}\ ,\quad \beta = \det\begin{bmatrix} c_\varphi^2 & A \\ s_\varphi^2 & C \end{bmatrix}\ ,\quad \delta = \det\begin{bmatrix} c_\varphi^2 & s_\varphi^2 \\ s_\varphi^2 & c_\varphi^2 \end{bmatrix}\ , \tag{142}$$

és ne feledjük, hogy $\delta \neq 0$ ekvivalens a (137) feltétellel.

Ezután (132), (133), (134) így írható:

$$D = -2\left(\frac{s_\varphi^2}{b^2} + \frac{c_\varphi^2}{a^2}\right)u + 2c_\varphi s_\varphi\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)v = -2A\cdot u - Bv \tag{143}$$

$$E = 2c_\varphi s_\varphi\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)u - 2\left(\frac{s_\varphi^2}{a^2} + \frac{c_\varphi^2}{b^2}\right)v = -Bu - 2Cv \tag{144}$$

ahonnan

$$u = \frac{\mu}{\Delta} \quad \textit{és} \quad v = \frac{\nu}{\Delta} \tag{145}$$

ahol

$$\mu = \det\begin{bmatrix} D & -B \\ E & -2C \end{bmatrix},\quad \nu = \det\begin{bmatrix} -2A & D \\ -B & E \end{bmatrix},\quad \Delta = \det\begin{bmatrix} -2A & -B \\ -B & -2C \end{bmatrix}, \tag{146}$$

és lényeges: a 8.4. Tétel (127) szerint elllipszisek esetében $AC - \frac{B^2}{4} > 0$, vagyis

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} -2A & -B \\ -B & -2C \end{bmatrix} = 4AC - B^2 \neq 0 \ . \tag{147}$$

A (134) egyenletet már csak ellenőrzésre tudjuk / kell felhasználni.

VIII.c) Az ellipszisek adatai

A fentieken túl, **[WP]** -ben a következőket olvashatjuk (felhasználjuk az (1), (117)-(121) és a (153)-(157) jelöléseket).

A (118) görbe akkor ellipszis, ha

$$A_{33} > 0 \ , \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0 \quad \text{és} \quad \det(\mathbf{A}) \cdot A_{33} < 0 \ , \tag{148}$$

$a_{11} = a_{22}$ esetén kör.

Az ellipszis $(u, v) = (x_0, y_0)$ középpontjának koordinátái:

$$u = \frac{\det(J_x)}{\det(A_{33})} = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{11} \cdot a_{22} - (a_{12})^2} \ , \tag{149}$$

$$v = \frac{-\det(J_y)}{\det(A_{33})} = \frac{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}{a_{11} \cdot a_{22} - (a_{12})^2} \ , \tag{150}$$

továbbá a féltengelyek

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot \Xi}{\det(A_{33}) \cdot [I - \Theta]}} \ , \tag{151}$$

$$b = \sqrt{\frac{2 \cdot \Xi}{\det(A_{33}) \cdot [I + \Theta]}} \ , \tag{152}$$

ahol

$$J_x = \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \ , \tag{153}$$

$$J_y = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} \ , \tag{154}$$

$$\Xi = a_{11} \cdot (a_{23})^2 + a_{22} \cdot (a_{13})^2 + a_{33} \cdot (a_{12})^2 - 2a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{23} - a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \ , \quad (155)$$

$$\Theta = \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} = \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2} \ , \quad (156)$$

és

$$I = a_{11} + a_{22} \ . \quad (157)$$

IX. Ferde ellipszisek görbülete

A IV.a) alfejezet *paraméteres* (76) képletében t helyett egyszerűen csak $(t+\varphi)$ -t kell írnunk.

A derékszögű koordinátáktól függés sokkal bonyolultabb: (77) és (89) alapján a (93) egyenletű ellipszis $P_0'(x_0', y_0')$ pontjában a görbület:

$$g(x_0', y_0') = \frac{a^4 b^4}{\left(\sqrt{G}\right)^3} \quad (158)$$

ahol

$$G = a^4 \cdot \left[-(x_0' - u) \cdot s_\varphi + (y_0' - v) \cdot c_\varphi - v\right]^2 + b^4 \cdot \left[(x_0' - u) \cdot c_\varphi + (y_0' - v) \cdot s_\varphi - u\right]^2 , \quad (159)$$

és $g(x_0', y_0')$ az $A_{1,2}^\varphi$ és $B_{1,2}^\varphi$ "csúcspontokban" (lásd (95), (96)) veszi fel szélsőértékeit:

$P_0' = A_{1,2}^\varphi$ esetén

$$G = a^4 \cdot \left[-((u \pm a) \cdot c_\varphi - v \cdot s_\varphi) \cdot s_\varphi + ((u \pm a) \cdot s_\varphi + v \cdot c_\varphi) \cdot c_\varphi - v\right]^2 +$$
$$+ b^4 \cdot \left[((u \pm a) \cdot c_\varphi - v \cdot s_\varphi) \cdot c_\varphi + ((u \pm a) \cdot s_\varphi + v \cdot c_\varphi) \cdot s_\varphi - u\right]^2 =$$
$$= a^4 (v - v)^2 + b^4 \cdot ((u \pm a) - u)^2 = 0 + b^4 a^2$$

tehát

$$g\left(A_{1,2}^\varphi\right) = \frac{a^4 b^4}{\left(\sqrt{b^4 a^2}\right)^3} = \frac{a}{b^2} \ , \quad (160)$$

$P_0' = B_{1,2}^\varphi$ esetén pedig

$$G = a^4 \cdot \left[-\left(u \cdot c_\varphi - (v \pm b) \cdot s_\varphi\right) \cdot s_\varphi + \left(u \cdot s_\varphi + (v \pm b) \cdot c_\varphi\right) \cdot c_\varphi - v \right]^2 +$$
$$b^4 \cdot \left[\ \left(u \cdot c_\varphi - (v \pm b) \cdot s_\varphi\right) \cdot c_\varphi + \left(u \cdot s_\varphi + (v \pm b) \cdot c_\varphi\right) \cdot s_\varphi - u \right]^2 =$$
$$= a^4 \left(v \pm b - v\right)^2 + b^4 \left(u - u\right) = a^4 b^2 + 0$$

tehát

$$g\left(B_{1,2}^{\varphi}\right) = \frac{a^4 b^4}{\left(\sqrt{a^4 b^2}\right)^3} = \frac{b}{a^2} \ . \tag{161}$$

A **távolság és görbület** IV.b) alfejezetben ismertetett (83) összefüggése *változatlan* marad, hiszen csak elforgatás történt: a távolság és a görbület "együtt fordulnek el φ szöggel".

X. Lineáris transzformációk

Végül megvizsgáljuk azt a kérdést, hogy egy $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció mikor eredményez ellipszist. Legyen tehát az $\mathcal{A}$ leképezés mátrixa

$$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e & f \\ c & d \end{bmatrix}\ , \tag{162}$$

ekkor az

$$(x(t)\,,y(t))=(x_0,y_0)+(\alpha\cos(t)\,,\beta\sin(t))\ ,\quad 0\le t\le 2\pi \tag{163}$$

egyenletű ellipszis képe

$$[x'(t)\,,y'(t)]=A\cdot[x_0,y_0]^T+A\cdot[\alpha\cos(t)\,,\beta\sin(t)]^T \tag{164}$$

azaz

$$\begin{cases} x'(t)=x_0'+e\alpha\cos(t)+f\beta\sin(t) \\ y'(t)=y_0'+c\alpha\cos(t)+d\beta\sin(t) \end{cases}\ ,\quad 0\le t\le 2\pi\ . \tag{165}$$

Mivel a φ szöggel elforgatott, általános helyzetű ellipszis egyenlete (94) szerint

$$\begin{cases} x'=a\cdot\cos(t)\cdot\cos(\varphi)-b\cdot\sin(t)\cdot\sin(\varphi)+u \\ y'=a\cdot\cos(t)\cdot\sin(\varphi)+b\cdot\sin(t)\cdot\cos(\varphi)+v \end{cases}\ , \tag{166}$$

ezért a (162) ellipszis képe *akkor és csak akkor* ellipszis, ha

$$\begin{cases} a_{1,1}\alpha=e\alpha=\ \ a\cos(\varphi) \\ a_{1,2}\beta=f\beta=-b\sin(\varphi) \\ a_{2,1}\alpha=c\alpha=\ \ a\sin(\varphi) \\ a_{2,2}\beta=d\beta=\ \ b\cos(\varphi) \end{cases}\ , \tag{167}$$

vagyis

$$-a_{1,1}a_{1,2}\alpha\beta=ab\sin(\varphi)\cos(\varphi)=a_{2,1}a_{2,2}\alpha\beta \tag{168}$$

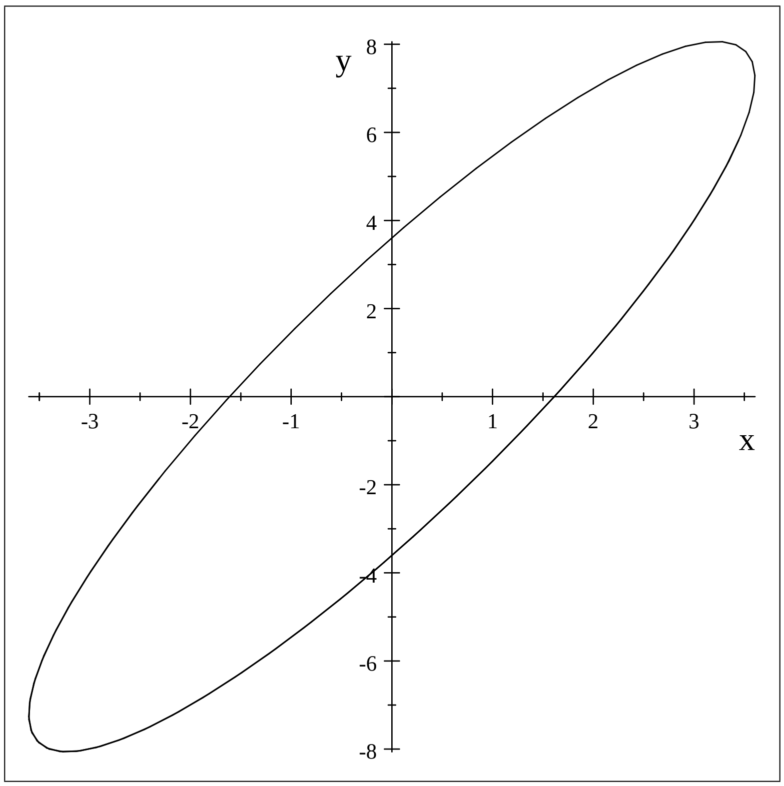
azaz

$$\boxed{(a_{1,1}a_{1,2}+a_{2,1}a_{2,2})\cdot\alpha\beta=0} \tag{169}$$

Megjegyzés: Könnyen látható, hogy a fenti (169) -ben szereplő $a_{1,1}a_{1,2}+a_{2,1}a_{2,2}$ kifejezés az A mátrisz oszlopainak skaláris szorzata, vagyis (169) *pontosan akkor* teljesül, ha az $Ae_1\perp Ae_1$, vagyis az A mátrix (leképezés) ortogonális vagyis *szögtartó.*

Tehát, annak ellenére, hogy sok esetben (mint a következő példában) a transzformált görbét ellipszisnek látjuk, az valójában nem ellipszis. **Pontosabban:** nem egymásra derékszögű, hanem *ferdeszögű tengelyekkel rendelkező ellipszis.* A ferdeszögű tengelyekkel rendelkező ellipszisek tárgyalása már nem fér bele jelen cikkünkbe.

Példa: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ vagyis $(x', y') = (2x + 3y, 7x + 4y)$, tehát (169) NEM teljesül, de az origó közepű egységkör képe:



3. ábra: $A \quad \begin{cases} x'(t) = 2\cos(t) + 3\sin(t) \\ y'(t) = 7\cos(t) + 4\sin(t) \end{cases}$ *egyenletű görbe*

Hivatkozások

[HGy] **Hajós György:** *Bevezetés a geometriába*, https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_519_04218/adatok.html

[HM1] **Hujter Mihály:** *Ellipszisek és hiperbolák érintői*, Haladvány Kiadvány, 2012.02.28. http://math.bme.hu/~hujter/120228.pdf

[Sz1] **Szalkai István:** *Négy pont ellipszise*, kézirat, 2019.

[Sz2] **Szalkai István:** *Ellipszisek görbülete*, kézirat, 2019.

[WE] **Wikipedia:** *Ellipse* (angolul), https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse

[WM] **Wikipedia:** *Ellipszis_ (görbe)*, https://hu.wikipedia.org/wiki/Ellipszis_(görbe)

[WP] **Wikipedia:** بیضی (perzsa nyelven), https://fa.wikipedia.org/wiki/%D8%A8%DB%8C%D8%B6%DB%8C

Függelék

A (122) egyenletrendszer megoldása (117) és a (126) determináns összehasonlítása alapján:

$$
A = x_1x_2y_1y_3^2y_4 - x_1x_2y_1y_3y_4^2 + x_1x_3y_1y_2y_4^2 - x_1x_3y_1y_2^2y_4 - x_1y_1x_4y_2y_3^2 + x_1y_1x_4y_2^2y_3 +
x_1x_2y_1y_3y_5^2 - x_1x_2y_1y_3^2y_5 + x_1x_2y_2y_3y_4^2 - x_1x_2y_2y_3^2y_4 - x_1x_3y_1y_2y_5^2 + x_1x_3y_1y_2^2y_5 +
x_1y_1y_2x_5y_3^2 - x_1y_1y_2^2x_5y_3 - x_2x_3y_1y_2y_4^2 + x_2x_3y_1^2y_2y_4 + x_2y_1x_4y_2y_3^2 - x_2y_1^2x_4y_2y_3 -
x_1x_2y_1y_4y_5^2 + x_1x_2y_1y_4^2y_5 - x_1x_2y_2y_3y_5^2 + x_1x_2y_2y_3^2y_5 - x_1x_3y_2y_3y_4^2 + x_1x_3y_2^2y_3y_4 +
x_1y_1x_4y_2y_5^2 - x_1y_1x_4y_2^2y_5 - x_1y_1y_2x_5y_4^2 + x_1y_1y_2^2x_5y_4 + x_2x_3y_1y_2y_5^2 + x_2x_3y_1y_3y_4^2 -
x_2x_3y_1^2y_2y_5 - x_2x_3y_1^2y_3y_4 - x_2y_1y_2x_5y_3^2 + x_2y_1^2y_2x_5y_3 - x_3y_1x_4y_2^2y_3 + x_3y_1^2x_4y_2y_3 +
x_1x_2y_2y_4y_5^2 - x_1x_2y_2y_4^2y_5 + x_1x_3y_1y_4y_5^2 - x_1x_3y_1y_4^2y_5 + x_1x_3y_2y_3y_5^2 - x_1x_3y_2^2y_3y_5 -
x_1y_1x_4y_3y_5^2 + x_1y_1x_4y_3^2y_5 + x_1y_1x_5y_3y_4^2 - x_1y_1x_5y_3^2y_4 + x_1x_4y_2y_3^2y_4 - x_1x_4y_2^2y_3y_4 -
x_2x_3y_1y_3y_5^2 + x_2x_3y_1^2y_3y_5 - x_2y_1x_4y_2y_5^2 - x_2y_1x_4y_3^2y_4 + x_2y_1y_2x_5y_4^2 + x_2y_1^2x_4y_2y_5 +
x_2y_1^2x_4y_3y_4 - x_2y_1^2y_2x_5y_4 + x_3y_1x_4y_2^2y_4 + x_3y_1y_2^2x_5y_3 - x_3y_1^2x_4y_2y_4 - x_3y_1^2y_2x_5y_3 -
x_1x_3y_3y_4y_5^2 + x_1x_3y_3y_4^2y_5 - x_1x_4y_2y_4y_5^2 + x_1x_4y_2^2y_4y_5 - x_1y_2x_5y_3^2y_5 + x_1y_2^2x_5y_3y_5 -
x_2x_3y_2y_4y_5^2 + x_2x_3y_2y_4^2y_5 + x_2y_1x_4y_4y_5^2 + x_2y_1x_5y_3^2y_5 + x_2x_4y_2y_3y_5^2 - x_2x_4y_2y_3^2y_5 -
x_2y_2x_5y_3y_4^2 + x_2y_2x_5y_3^2y_4 - x_2y_1^2x_4y_4y_5 - x_2y_1^2x_5y_3y_5 + x_3y_1x_4y_3y_5^2 - x_3y_1x_5y_3y_4^2 -
$$

$$x_3y_1y_2^2x_5y_5 - x_3y_1^2x_4y_3y_5 + x_3y_1^2y_2x_5y_5 + x_3y_1^2x_5y_3y_4 - y_1x_4y_2^2x_5y_4 + y_1^2x_4y_2x_5y_4 + x_1x_4y_3y_4y_5^2 - x_1x_4y_3^2y_4y_5 + x_1y_2x_5y_4^2y_5 - x_1y_2^2x_5y_4y_5 + x_2x_3y_3y_4y_5^2 - x_2x_3y_3y_4^2y_5 - x_2y_1x_5y_4^2y_5 + x_2y_1^2x_5y_4y_5 - x_3y_1x_4y_4y_5^2 - x_3x_4y_2y_3y_5^2 + x_3x_4y_2^2y_3y_5 + x_3y_2x_5y_3y_4^2 + x_3y_1^2x_4y_4y_5 - x_3y_2^2x_5y_3y_4 + y_1x_4x_5y_3^2y_4 + y_1x_4y_2^2x_5y_5 - y_1^2x_4y_2x_5y_5 - y_1^2x_4x_5y_3y_4 - x_1x_5y_3y_4^2y_5 + x_1x_5y_3^2y_4y_5 - x_2x_4y_3y_4y_5^2 + x_2x_4y_3^2y_4y_5 + x_3y_1x_5y_4^2y_5 + x_3x_4y_2y_4y_5^2 - x_3x_4y_2^2y_4y_5 - x_3y_1^2x_5y_4y_5 - y_1x_4x_5y_3^2y_5 - x_4y_2x_5y_3^2y_4 + x_4y_2^2x_5y_3y_4 + y_1^2x_4x_5y_3y_5 + x_2x_5y_3y_4^2y_5 - x_2x_5y_3^2y_4y_5 - x_3y_2x_5y_4^2y_5 + x_3y_2^2x_5y_4y_5 + x_4y_2x_5y_3^2y_5 - x_4y_2^2x_5y_3y_5 \ ,$$

$$B = x_1^2x_2y_3^2y_5 - x_1^2x_2y_3^2y_4 + x_1^2x_2y_3y_4^2 - x_1^2x_2y_3y_5^2 - x_1^2x_2y_4^2y_5 + x_1^2x_2y_4y_5^2 + x_1^2x_3y_2^2y_4 - x_1^2x_3y_2^2y_5 - x_1^2x_3y_2y_4^2 + x_1^2x_3y_2y_5^2 + x_1^2x_3y_4^2y_5 - x_1^2x_3y_4y_5^2 - x_1^2x_4y_2^2y_3 + x_1^2x_4y_2^2y_5 + x_1^2x_4y_2y_3^2 - x_1^2x_4y_2y_5^2 - x_1^2x_4y_3^2y_5 + x_1^2x_4y_3y_5^2 + x_1^2y_2^2x_5y_3 - x_1^2y_2^2x_5y_4 - x_1^2y_2x_5y_3^2 + x_1^2y_2x_5y_4^2 + x_1^2x_5y_3^2y_4 - x_1^2x_5y_3y_4^2 + x_1x_2^2y_3^2y_4 - x_1x_2^2y_3^2y_5 - x_1x_2^2y_3y_4^2 + x_1x_2^2y_3y_5^2 + x_1x_2^2y_4^2y_5 - x_1x_2^2y_4y_5^2 - x_1x_3^2y_2^2y_4 + x_1x_3^2y_2^2y_5 + x_1x_3^2y_2y_4^2 - x_1x_3^2y_2y_5^2 - x_1x_3^2y_4^2y_5 + x_1x_3^2y_4y_5^2 + x_1x_4^2y_2^2y_3 - x_1x_4^2y_2^2y_5 - x_1x_4^2y_2y_3^2 + x_1x_4^2y_2y_5^2 + x_1x_4^2y_3^2y_5 - x_1x_4^2y_3y_5^2 - x_1y_2^2x_5^2y_3 + x_1y_2^2x_5^2y_4 + x_1y_2x_5^2y_3^2 - x_1y_2x_5^2y_4^2 - x_1x_5^2y_3^2y_4 + x_1x_5^2y_3y_4^2 - x_2^2x_3y_1^2y_4 + x_2^2x_3y_1^2y_5 + x_2^2x_3y_1y_4^2 - x_2^2x_3y_1y_5^2 - x_2^2x_3y_4^2y_5 + x_2^2x_3y_4y_5^2 + x_2^2y_1^2x_4y_3 - x_2^2y_1^2x_4y_5 - x_2^2y_1^2x_5y_3 + x_2^2y_1^2x_5y_4 - x_2^2y_1x_4y_3^2 + x_2^2y_1x_4y_5^2 + x_2^2y_1x_5y_3^2 - x_2^2y_1x_5y_4^2 + x_2^2x_4y_3^2y_5 - x_2^2x_4y_3y_5^2 - x_2^2x_5y_3^2y_4 + x_2^2x_5y_3y_4^2 + x_2x_3^2y_1^2y_4 - x_2x_3^2y_1^2y_5 - x_2x_3^2y_1y_4^2 + x_2x_3^2y_1y_5^2 + x_2x_3^2y_4^2y_5 - x_2x_3^2y_4y_5^2 - x_2y_1^2x_4^2y_3 + x_2y_1^2x_4^2y_5 + x_2y_1^2x_5^2y_3 - x_2y_1^2x_5^2y_4 + x_2y_1x_4^2y_3^2 - x_2y_1x_4^2y_5^2 - x_2y_1x_5^2y_3^2 + x_2y_1x_5^2y_4^2 - x_2x_4^2y_3^2y_5 + x_2x_4^2y_3y_5^2 + x_2x_5^2y_3^2y_4 - x_2x_5^2y_3y_4^2 - x_3^2y_1^2x_4y_2 + x_3^2y_1^2x_4y_5 + x_3^2y_1^2y_2x_5 - x_3^2y_1^2x_5y_4 + x_3^2y_1x_4y_2^2 - x_3^2y_1x_4y_5^2 - x_3^2y_1y_2^2x_5 + x_3^2y_1x_5y_4^2 - x_3^2x_4y_2^2y_5 + x_3^2x_4y_2y_5^2 + x_3^2y_2^2x_5y_4 - x_3^2y_2x_5y_4^2 + x_3y_1^2x_4^2y_2 - x_3y_1^2x_4^2y_5 - x_3y_1^2y_2x_5^2 + x_3y_1^2x_5^2y_4 - x_3y_1x_4^2y_2^2 + x_3y_1x_4^2y_5^2 + x_3y_1y_2^2x_5^2 - x_3y_1x_5^2y_4^2 + x_3x_4^2y_2^2y_5 - x_3x_4^2y_2y_5^2 - x_3y_2^2x_5^2y_4 + x_3y_2x_5^2y_4^2 - y_1^2x_4^2y_2x_5 + y_1^2x_4^2x_5y_3 + y_1^2x_4y_2x_5^2 - y_1^2x_4x_5^2y_3 + y_1x_4^2y_2^2x_5 - y_1x_4^2x_5y_3^2 - y_1x_4y_2^2x_5^2 + y_1x_4x_5^2y_3^2 - x_4^2y_2^2x_5y_3 + x_4^2y_2x_5y_3^2 + x_4y_2^2x_5^2y_3 - x_4y_2x_5^2y_3^2 \ ,$$

$$C = x_1x_2y_1x_4^2y_3 - x_1x_2x_3^2y_1y_4 - x_1x_3y_1x_4^2y_2 + x_1x_2^2x_3y_1y_4 - x_1x_2^2y_1x_4y_3 + x_1x_3^2y_1x_4y_2 - x_1x_2y_1x_5^2y_3 + x_1x_2x_3^2y_1y_5 + x_1x_2x_3^2y_2y_4 - x_1x_2x_4^2y_2y_3 + x_1x_3y_1y_2x_5^2 - x_1x_2^2x_3y_1y_5 + x_1x_2^2y_1x_5y_3 - x_1x_3^2y_1y_2x_5 + x_2x_3y_1x_4^2y_2 - x_2x_3^2y_1x_4y_2 - x_1^2x_2x_3y_2y_4 + x_1^2x_2x_4y_2y_3 - x_1x_2y_1x_4^2y_5 + x_1x_2y_1x_5^2y_4 + x_1x_2y_2x_5^2y_3 - x_1x_2x_3^2y_2y_5 + x_1x_3x_4^2y_2y_3 - x_1y_1x_4y_2x_5^2 + x_1y_1x_4^2y_2x_5 - x_1x_2^2x_3y_3y_4 + x_1x_2^2y_1x_4y_5 - x_1x_2^2y_1x_5y_4 - x_2x_3y_1y_2x_5^2 - x_2x_3y_1x_4^2y_3 + x_2x_3^2y_1y_2x_5 + x_1^2x_2x_3y_2y_5 + x_1^2x_2x_3y_3y_4 - x_1^2x_2y_2x_5y_3 - x_1^2x_3x_4y_2y_3 + x_2^2x_3y_1x_4y_3 - x_1x_2y_2x_5^2y_4 + x_1x_2x_4^2y_2y_5 + x_1x_3y_1x_4^2y_5 - x_1x_3y_1x_5^2y_4 - x_1x_3y_2x_5^2y_3 + x_1y_1x_4x_5^2y_3 - x_1y_1x_4^2x_5y_3 + x_1x_2^2x_3y_3y_5 + x_1x_2^2x_4y_3y_4 - x_1x_3^2y_1x_4y_5 + x_1x_3^2y_1x_5y_4 - x_1x_3^2x_4y_2y_4 + x_2x_3y_1x_5^2y_3 + x_2y_1x_4y_2x_5^2 - x_2y_1x_4^2y_2x_5 + x_2x_3^2y_1x_4y_4 - x_1^2x_2x_3y_3y_5 - x_1^2x_2x_4y_2y_5 - x_1^2x_2x_4y_3y_4 + x_1^2x_2y_2x_5y_4 + x_1^2x_3x_4y_2y_4 + x_1^2x_3y_2x_5y_3 - x_2^2x_3y_1x_4y_4 - x_2^2x_3y_1x_5y_3 - x_1x_3x_4^2y_3y_5 + x_1x_3x_5^2y_3y_4 + x_1x_4y_2x_5^2y_4 - x_1x_2^2x_4y_4y_5 - x_1x_2^2x_5y_3y_5 + x_1x_3^2y_2x_5y_5 + x_2x_3y_2x_5^2y_4 - x_2x_3x_4^2y_2y_5 - x_2y_1x_4x_5^2y_4 - x_2x_4y_2x_5^2y_3 - x_2x_3^2y_1x_5y_5 + x_2x_3^2x_4y_2y_5 - x_2x_3^2y_2x_5y_4 + x_2x_4^2y_2x_5y_3 - x_3y_1x_4x_5^2y_3 + x_3y_1x_4^2x_5y_3 + x_1^2x_2x_4y_4y_5 + x_1^2x_2x_5y_3y_5 + x_1^2x_3x_4y_3y_5 - x_1^2x_3y_2x_5y_5 - x_1^2x_3x_5y_3y_4 - x_1^2x_4y_2x_5y_4 + x_2^2x_3y_1x_5y_5 + x_2^2y_1x_4x_5y_4 -$$

$x_1x_4x_5^2y_3y_4 + x_1x_2^2x_5y_4y_5 + x_1x_3^2x_4y_4y_5 - x_1x_4^2y_2x_5y_5 + x_2x_3x_4^2y_3y_5 - x_2x_3x_5^2y_3y_4 +$
$x_2y_1x_4^2x_5y_5 + x_3y_1x_4x_5^2y_4 + x_3x_4y_2x_5^2y_3 - x_3x_4^2y_2x_5y_3 - x_1^2x_2x_5y_4y_5 - x_1^2x_3x_4y_4y_5 +$
$x_1^2x_4y_2x_5y_5 + x_1^2x_4x_5y_3y_4 - x_2^2x_3x_4y_3y_5 + x_2^2x_3x_5y_3y_4 - x_2^2y_1x_4x_5y_5 - x_3^2y_1x_4x_5y_4 -$
$x_1x_3^2x_5y_4y_5 + x_1x_4^2x_5y_3y_5 + x_2x_4x_5^2y_3y_4 - x_2x_3^2x_4y_4y_5 - x_3y_1x_4^2x_5y_5 - x_3x_4y_2x_5^2y_4 +$
$x_1^2x_3x_5y_4y_5 - x_1^2x_4x_5y_3y_5 + x_2^2x_3x_4y_4y_5 - x_2^2x_4x_5y_3y_4 + x_3^2y_1x_4x_5y_5 + x_3^2x_4y_2x_5y_4 +$
$x_2x_3^2x_5y_4y_5 - x_2x_4^2x_5y_3y_5 + x_3x_4^2y_2x_5y_5 - x_2^2x_3x_5y_4y_5 + x_2^2x_4x_5y_3y_5 - x_3^2x_4y_2x_5y_5\ ,$

$D = x_1^2x_2y_2y_3^2y_4 - x_1^2x_2y_2y_3^2y_5 - x_1^2x_2y_2y_3y_4^2 + x_1^2x_2y_2y_3y_5^2 + x_1^2x_2y_2y_4^2y_5 - x_1^2x_2y_2y_4y_5^2 -$
$x_1^2x_3y_2^2y_3y_4 + x_1^2x_3y_2^2y_3y_5 + x_1^2x_3y_2y_3y_4^2 - x_1^2x_3y_2y_3y_5^2 - x_1^2x_3y_3y_4^2y_5 + x_1^2x_3y_3y_4y_5^2 +$
$x_1^2x_4y_2^2y_3y_4 - x_1^2x_4y_2^2y_4y_5 - x_1^2x_4y_2y_3^2y_4 + x_1^2x_4y_2y_4y_5^2 + x_1^2x_4y_3^2y_4y_5 - x_1^2x_4y_3y_4y_5^2 -$
$x_1^2y_2^2x_5y_3y_5 + x_1^2y_2^2x_5y_4y_5 + x_1^2y_2x_5y_3^2y_5 - x_1^2y_2x_5y_4^2y_5 - x_1^2x_5y_3^2y_4y_5 + x_1^2x_5y_3y_4^2y_5 -$
$x_1x_2^2y_1y_3^2y_4 + x_1x_2^2y_1y_3^2y_5 + x_1x_2^2y_1y_3y_4^2 - x_1x_2^2y_1y_3y_5^2 - x_1x_2^2y_1y_4^2y_5 + x_1x_2^2y_1y_4y_5^2 +$
$x_1x_3^2y_1y_2^2y_4 - x_1x_3^2y_1y_2^2y_5 - x_1x_3^2y_1y_2y_4^2 + x_1x_3^2y_1y_2y_5^2 + x_1x_3^2y_1y_4^2y_5 - x_1x_3^2y_1y_4y_5^2 -$
$x_1y_1x_4^2y_2^2y_3 + x_1y_1x_4^2y_2^2y_5 + x_1y_1x_4^2y_2y_3^2 - x_1y_1x_4^2y_2y_5^2 - x_1y_1x_4^2y_3^2y_5 + x_1y_1x_4^2y_3y_5^2 +$
$x_1y_1y_2^2x_5^2y_3 - x_1y_1y_2^2x_5^2y_4 - x_1y_1y_2x_5^2y_3^2 + x_1y_1y_2x_5^2y_4^2 + x_1y_1x_5^2y_3^2y_4 - x_1y_1x_5^2y_3y_4^2 +$
$x_2^2x_3y_1^2y_3y_4 - x_2^2x_3y_1^2y_3y_5 - x_2^2x_3y_1y_3y_4^2 + x_2^2x_3y_1y_3y_5^2 + x_2^2x_3y_3y_4^2y_5 - x_2^2x_3y_3y_4y_5^2 -$
$x_2^2y_1^2x_4y_3y_4 + x_2^2y_1^2x_4y_4y_5 + x_2^2y_1^2x_5y_3y_5 - x_2^2y_1^2x_5y_4y_5 + x_2^2y_1x_4y_3^2y_4 - x_2^2y_1x_4y_4y_5^2 -$
$x_2^2y_1x_5y_3^2y_5 + x_2^2y_1x_5y_4^2y_5 - x_2^2x_4y_3^2y_4y_5 + x_2^2x_4y_3y_4y_5^2 + x_2^2x_5y_3^2y_4y_5 - x_2^2x_5y_3y_4^2y_5 -$
$x_2x_3^2y_1^2y_2y_4 + x_2x_3^2y_1^2y_2y_5 + x_2x_3^2y_1y_2y_4^2 - x_2x_3^2y_1y_2y_5^2 - x_2x_3^2y_2y_4^2y_5 + x_2x_3^2y_2y_4y_5^2 +$
$x_2y_1^2x_4^2y_2y_3 - x_2y_1^2x_4^2y_2y_5 - x_2y_1^2y_2x_5^2y_3 + x_2y_1^2y_2x_5^2y_4 - x_2y_1x_4^2y_2y_3^2 + x_2y_1x_4^2y_2y_5^2 +$
$x_2y_1y_2x_5^2y_3^2 - x_2y_1y_2x_5^2y_4^2 + x_2x_4^2y_2y_3^2y_5 - x_2x_4^2y_2y_3y_5^2 - x_2y_2x_5^2y_3^2y_4 + x_2y_2x_5^2y_3y_4^2 +$
$x_3^2y_1^2x_4y_2y_4 - x_3^2y_1^2x_4y_4y_5 - x_3^2y_1^2y_2x_5y_5 + x_3^2y_1^2x_5y_4y_5 - x_3^2y_1x_4y_2^2y_4 + x_3^2y_1x_4y_4y_5^2 +$
$x_3^2y_1y_2^2x_5y_5 - x_3^2y_1x_5y_4^2y_5 + x_3^2x_4y_2^2y_4y_5 - x_3^2x_4y_2y_4y_5^2 - x_3^2y_2^2x_5y_4y_5 + x_3^2y_2x_5y_4^2y_5 -$
$x_3y_1^2x_4^2y_2y_3 + x_3y_1^2x_4^2y_3y_5 + x_3y_1^2y_2x_5^2y_3 - x_3y_1^2x_5^2y_3y_4 + x_3y_1x_4^2y_2^2y_3 - x_3y_1x_4^2y_3y_5^2 -$
$x_3y_1y_2^2x_5^2y_3 + x_3y_1x_5^2y_3y_4^2 - x_3x_4^2y_2^2y_3y_5 + x_3x_4^2y_2y_3y_5^2 + x_3y_2^2x_5^2y_3y_4 - x_3y_2x_5^2y_3y_4^2 +$
$y_1^2x_4^2y_2x_5y_5 - y_1^2x_4^2x_5y_3y_5 - y_1^2x_4y_2x_5^2y_4 + y_1^2x_4x_5^2y_3y_4 - y_1x_4^2y_2^2x_5y_5 + y_1x_4^2x_5y_3^2y_5 +$
$y_1x_4y_2^2x_5^2y_4 - y_1x_4x_5^2y_3^2y_4 + x_4^2y_2^2x_5y_3y_5 - x_4^2y_2x_5y_3^2y_5 - x_4y_2^2x_5^2y_3y_4 + x_4y_2x_5^2y_3^2y_4\ ,$

$E = x_1^2x_2x_3y_2y_4^2 - x_1^2x_2x_3y_2y_5^2 - x_1^2x_2x_3y_3y_4^2 + x_1^2x_2x_3y_3y_5^2 - x_1^2x_2x_4y_2y_3^2 + x_1^2x_2x_4y_2y_5^2 +$
$x_1^2x_2x_4y_3^2y_4 - x_1^2x_2x_4y_4y_5^2 + x_1^2x_2y_2x_5y_3^2 - x_1^2x_2y_2x_5y_4^2 - x_1^2x_2x_5y_3^2y_5 + x_1^2x_2x_5y_4^2y_5 +$
$x_1^2x_3x_4y_2^2y_3 - x_1^2x_3x_4y_2^2y_4 - x_1^2x_3x_4y_3y_5^2 + x_1^2x_3x_4y_4y_5^2 - x_1^2x_3y_2^2x_5y_3 + x_1^2x_3y_2^2x_5y_5 +$
$x_1^2x_3x_5y_3y_4^2 - x_1^2x_3x_5y_4^2y_5 + x_1^2x_4y_2^2x_5y_4 - x_1^2x_4y_2^2x_5y_5 - x_1^2x_4x_5y_3^2y_4 + x_1^2x_4x_5y_3^2y_5 -$
$x_1x_2^2x_3y_1y_4^2 + x_1x_2^2x_3y_1y_5^2 + x_1x_2^2x_3y_3y_4^2 - x_1x_2^2x_3y_3y_5^2 + x_1x_2^2y_1x_4y_3^2 - x_1x_2^2y_1x_4y_5^2 -$
$x_1x_2^2y_1x_5y_3^2 + x_1x_2^2y_1x_5y_4^2 - x_1x_2^2x_4y_3^2y_4 + x_1x_2^2x_4y_4y_5^2 + x_1x_2^2x_5y_3^2y_5 - x_1x_2^2x_5y_4^2y_5 +$
$x_1x_2x_3^2y_1y_4^2 - x_1x_2x_3^2y_1y_5^2 - x_1x_2x_3^2y_2y_4^2 + x_1x_2x_3^2y_2y_5^2 - x_1x_2y_1x_4^2y_3^2 + x_1x_2y_1x_4^2y_5^2 +$
$x_1x_2y_1x_5^2y_3^2 - x_1x_2y_1x_5^2y_4^2 + x_1x_2x_4^2y_2y_3^2 - x_1x_2x_4^2y_2y_5^2 - x_1x_2y_2x_5^2y_3^2 + x_1x_2y_2x_5^2y_4^2 -$
$x_1x_3^2y_1x_4y_2^2 + x_1x_3^2y_1x_4y_5^2 + x_1x_3^2y_1y_2^2x_5 - x_1x_3^2y_1x_5y_4^2 + x_1x_3^2x_4y_2^2y_4 - x_1x_3^2x_4y_4y_5^2 -$
$x_1x_3^2y_2^2x_5y_5 + x_1x_3^2x_5y_4^2y_5 + x_1x_3y_1x_4^2y_2^2 - x_1x_3y_1x_4^2y_5^2 - x_1x_3y_1y_2^2x_5^2 + x_1x_3y_1x_5^2y_4^2 -$
$x_1x_3x_4^2y_2^2y_3 + x_1x_3x_4^2y_3y_5^2 + x_1x_3y_2^2x_5^2y_3 - x_1x_3x_5^2y_3y_4^2 - x_1y_1x_4^2y_2^2x_5 + x_1y_1x_4^2x_5y_3^2 +$

$$
\begin{aligned}
&x_1y_1x_4y_2^2x_5^2 - x_1y_1x_4x_5^2y_3^2 + x_1x_4^2y_2^2x_5y_5 - x_1x_4^2x_5y_3^2y_5 - x_1x_4y_2^2x_5^2y_4 + x_1x_4x_5^2y_3^2y_4 - \\
&x_2^2x_3y_1^2x_4y_3 + x_2^2x_3y_1^2x_4y_4 + x_2^2x_3y_1^2x_5y_3 - x_2^2x_3y_1^2x_5y_5 + x_2^2x_3x_4y_3y_5^2 - x_2^2x_3x_4y_4y_5^2 - \\
&x_2^2x_3x_5y_3y_4^2 + x_2^2x_3x_5y_4^2y_5 - x_2^2y_1^2x_4x_5y_4 + x_2^2y_1^2x_4x_5y_5 + x_2^2x_4x_5y_3^2y_4 - x_2^2x_4x_5y_3^2y_5 + \\
&x_2x_3^2y_1^2x_4y_2 - x_2x_3^2y_1^2x_4y_4 - x_2x_3^2y_1^2y_2x_5 + x_2x_3^2y_1^2x_5y_5 - x_2x_3^2x_4y_2y_5^2 + x_2x_3^2x_4y_4y_5^2 + \\
&x_2x_3^2y_2x_5y_4^2 - x_2x_3^2x_5y_4^2y_5 - x_2x_3y_1^2x_4^2y_2 + x_2x_3y_1^2x_4^2y_3 + x_2x_3y_1^2y_2x_5^2 - x_2x_3y_1^2x_5^2y_3 + \\
&x_2x_3x_4^2y_2y_5^2 - x_2x_3x_4^2y_3y_5^2 - x_2x_3y_2x_5^2y_4^2 + x_2x_3x_5^2y_3y_4^2 + x_2y_1^2x_4^2y_2x_5 - x_2y_1^2x_4^2x_5y_5 - \\
&x_2y_1^2x_4y_2x_5^2 + x_2y_1^2x_4x_5^2y_4 - x_2x_4^2y_2x_5y_3^2 + x_2x_4^2x_5y_3^2y_5 + x_2x_4y_2x_5^2y_3^2 - x_2x_4x_5^2y_3^2y_4 + \\
&x_3^2y_1^2x_4x_5y_4 - x_3^2y_1^2x_4x_5y_5 - x_3^2x_4y_2^2x_5y_4 + x_3^2x_4y_2^2x_5y_5 - x_3y_1^2x_4^2x_5y_3 + x_3y_1^2x_4^2x_5y_5 + \\
&x_3y_1^2x_4x_5^2y_3 - x_3y_1^2x_4x_5^2y_4 + x_3x_4^2y_2^2x_5y_3 - x_3x_4^2y_2^2x_5y_5 - x_3x_4y_2^2x_5^2y_3 + x_3x_4y_2^2x_5^2y_4 \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F = {}&x_1^2x_2x_3y_2y_4y_5^2 - x_1^2x_2x_3y_2y_4^2y_5 + x_1^2x_2x_3y_3y_4^2y_5 - x_1^2x_2x_3y_3y_4y_5^2 + x_1^2x_2x_4y_2y_3^2y_5 - \\
&x_1^2x_2x_4y_2y_3y_5^2 - x_1^2x_2x_4y_3^2y_4y_5 + x_1^2x_2x_4y_3y_4y_5^2 - x_1^2x_2y_2x_5y_3^2y_4 + x_1^2x_2y_2x_5y_3y_4^2 + x_1^2x_2x_5y_3^2y_4y_5 - \\
&x_1^2x_2x_5y_3y_4^2y_5 - x_1^2x_3x_4y_2^2y_3y_5 + x_1^2x_3x_4y_2^2y_4y_5 + x_1^2x_3x_4y_2y_3y_5^2 - x_1^2x_3x_4y_2y_4y_5^2 + x_1^2x_3y_2^2x_5y_3y_4 - \\
&x_1^2x_3y_2^2x_5y_4y_5 - x_1^2x_3y_2x_5y_3y_4^2 + x_1^2x_3y_2x_5y_4^2y_5 - x_1^2x_4y_2^2x_5y_3y_4 + x_1^2x_4y_2^2x_5y_3y_5 + x_1^2x_4y_2x_5y_3^2y_4 - \\
&x_1^2x_4y_2x_5y_3^2y_5 + x_1x_2^2x_3y_1y_4^2y_5 - x_1x_2^2x_3y_1y_4y_5^2 - x_1x_2^2x_3y_3y_4^2y_5 + x_1x_2^2x_3y_3y_4y_5^2 - x_1x_2^2y_1x_4y_3^2y_5 + \\
&x_1x_2^2y_1x_4y_3y_5^2 + x_1x_2^2y_1x_5y_3^2y_4 - x_1x_2^2y_1x_5y_3y_4^2 + x_1x_2^2x_4y_3^2y_4y_5 - x_1x_2^2x_4y_3y_4y_5^2 - x_1x_2^2x_5y_3^2y_4y_5 + \\
&x_1x_2^2x_5y_3y_4^2y_5 - x_1x_2x_3^2y_1y_4^2y_5 + x_1x_2x_3^2y_1y_4y_5^2 + x_1x_2x_3^2y_2y_4^2y_5 - x_1x_2x_3^2y_2y_4y_5^2 + x_1x_2y_1x_4^2y_3^2y_5 - \\
&x_1x_2y_1x_4^2y_3y_5^2 - x_1x_2y_1x_5^2y_3^2y_4 + x_1x_2y_1x_5^2y_3y_4^2 - x_1x_2x_4^2y_2y_3^2y_5 + x_1x_2x_4^2y_2y_3y_5^2 + x_1x_2y_2x_5^2y_3^2y_4 - \\
&x_1x_2y_2x_5^2y_3y_4^2 + x_1x_3^2y_1x_4y_2^2y_5 - x_1x_3^2y_1x_4y_2y_5^2 - x_1x_3^2y_1y_2^2x_5y_4 + x_1x_3^2y_1y_2x_5y_4^2 - x_1x_3^2x_4y_2^2y_4y_5 + \\
&x_1x_3^2x_4y_2y_4y_5^2 + x_1x_3^2y_2^2x_5y_4y_5 - x_1x_3^2y_2x_5y_4^2y_5 - x_1x_3y_1x_4^2y_2^2y_5 + x_1x_3y_1x_4^2y_2y_5^2 + x_1x_3y_1y_2^2x_5^2y_4 - \\
&x_1x_3y_1y_2x_5^2y_4^2 + x_1x_3x_4^2y_2^2y_3y_5 - x_1x_3x_4^2y_2y_3y_5^2 - x_1x_3y_2^2x_5^2y_3y_4 + x_1x_3y_2x_5^2y_3y_4^2 + x_1y_1x_4^2y_2^2x_5y_3 - \\
&x_1y_1x_4^2y_2x_5y_3^2 - x_1y_1x_4y_2^2x_5^2y_3 + x_1y_1x_4y_2x_5^2y_3^2 - x_1x_4^2y_2^2x_5y_3y_5 + x_1x_4^2y_2x_5y_3^2y_5 + x_1x_4y_2^2x_5^2y_3y_4 - \\
&x_1x_4y_2x_5^2y_3^2y_4 + x_2^2x_3y_1^2x_4y_3y_5 - x_2^2x_3y_1^2x_4y_4y_5 - x_2^2x_3y_1^2x_5y_3y_4 + x_2^2x_3y_1^2x_5y_4y_5 - x_2^2x_3y_1x_4y_3y_5^2 + \\
&x_2^2x_3y_1x_4y_4y_5^2 + x_2^2x_3y_1x_5y_3y_4^2 - x_2^2x_3y_1x_5y_4^2y_5 + x_2^2y_1^2x_4x_5y_3y_4 - x_2^2y_1^2x_4x_5y_3y_5 - x_2^2y_1x_4x_5y_3^2y_4 + \\
&x_2^2y_1x_4x_5y_3^2y_5 - x_2x_3^2y_1^2x_4y_2y_5 + x_2x_3^2y_1^2x_4y_4y_5 + x_2x_3^2y_1^2y_2x_5y_4 - x_2x_3^2y_1^2x_5y_4y_5 + x_2x_3^2y_1x_4y_2y_5^2 - \\
&x_2x_3^2y_1x_4y_4y_5^2 - x_2x_3^2y_1y_2x_5y_4^2 + x_2x_3^2y_1x_5y_4^2y_5 + x_2x_3y_1^2x_4^2y_2y_5 - x_2x_3y_1^2x_4^2y_3y_5 - x_2x_3y_1^2y_2x_5^2y_4 + \\
&x_2x_3y_1^2x_5^2y_3y_4 - x_2x_3y_1x_4^2y_2y_5^2 + x_2x_3y_1x_4^2y_3y_5^2 + x_2x_3y_1y_2x_5^2y_4^2 - x_2x_3y_1x_5^2y_3y_4^2 - x_2y_1^2x_4^2y_2x_5y_3 + \\
&x_2y_1^2x_4^2x_5y_3y_5 + x_2y_1^2x_4y_2x_5^2y_3 - x_2y_1^2x_4x_5^2y_3y_4 + x_2y_1x_4^2y_2x_5y_3^2 - x_2y_1x_4^2x_5y_3^2y_5 - x_2y_1x_4y_2x_5^2y_3^2 + \\
&x_2y_1x_4x_5^2y_3^2y_4 - x_3^2y_1^2x_4y_2x_5y_4 + x_3^2y_1^2x_4y_2x_5y_5 + x_3^2y_1x_4y_2^2x_5y_4 - x_3^2y_1x_4y_2^2x_5y_5 + x_3y_1^2x_4^2y_2x_5y_3 - \\
&x_3y_1^2x_4^2y_2x_5y_5 - x_3y_1^2x_4y_2x_5^2y_3 + x_3y_1^2x_4y_2x_5^2y_4 - x_3y_1x_4^2y_2^2x_5y_3 + x_3y_1x_4^2y_2^2x_5y_5 + x_3y_1x_4y_2^2x_5^2y_3 - \\
&x_3y_1x_4y_2^2x_5^2y_4 \ .
\end{aligned}
$$