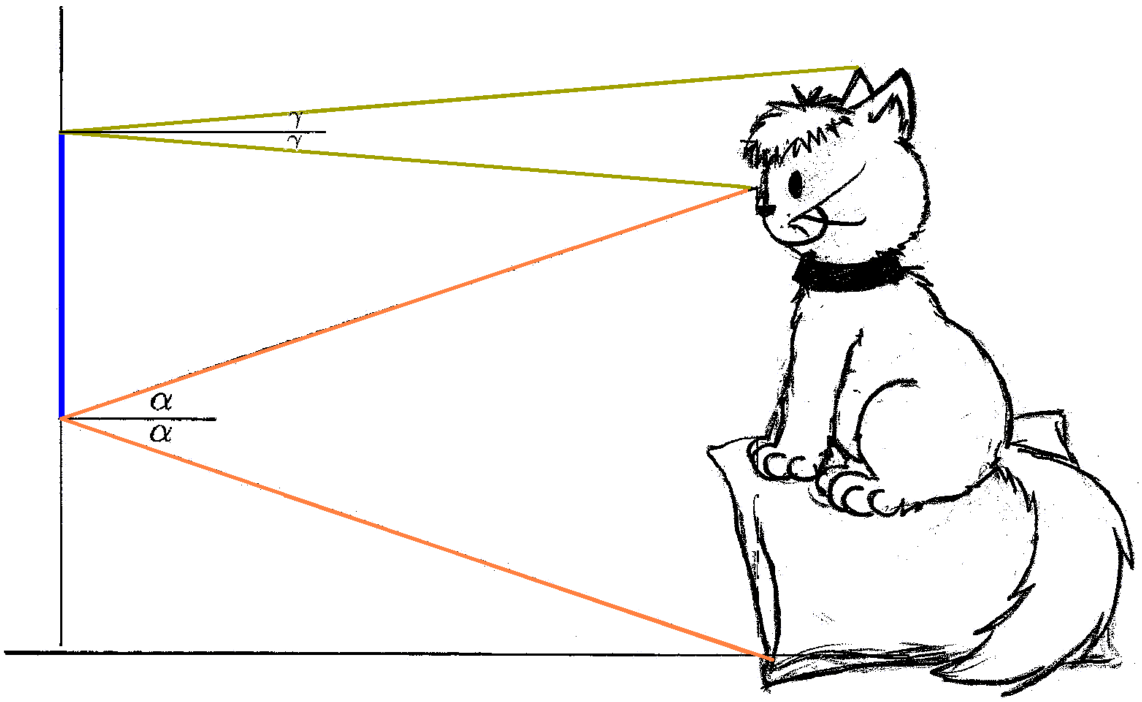
A könyvet A/5 méretre kicsinyítve, kétoldalasan kell kinyomtatni!

dr. Szalkai István

Mindennapi matematika



K é z i r a t

Veszprém, 2012. június 29.

Készült a

Nemzeti Kulturális Alap Ismeretterjesztés és Környezet-kultúra Szakmai Kollégiuma "*Alkotói támogatás*" pályázatának támogatásával, pályázati azonosító: 2502/1307.

Az ábrákat a Szerző és Szalkai Évi készítették.

Tartalom

"Dehogy veszek kezembe matekkönyvet mindennap, épp elég volt a suliban! Biliárdozáskor sem vesz elő senki sem szögmérőt sem mérőszalagot" - hallom már előre a visszhangot.

0. Bevezető

Nem is tankönyvet vagy iskolapéldák gyűjteményét tart kezében kedves Olvasóm, még csak nem is érdeklődő tanulók számára készült érdekességek gyűjteményét! Elsősorban olyan példákat igyekeztem gyűjteni és elmagyarázni, megoldani, amelyekkel valóban találkozunk mindennapjainkban, amelyeket nekünk kell megoldanunk, meg kell értenünk a különböző lehetőségek közötti különbségeket *ahhoz*, hogy dönteni tudjunk, hogy be ne csapjanak bennünket. Ezeknek csak kicsi (bár lényeges) része a százalékszámítás, kamatok, talán ott már magunk is észrevettük, hogy a matematika (hiánya) zsebre megy.

Pedagógus lévén természetesen nem tudtam megállni, hogy néhány olyan jelenséget is bemutassak, amelyek a mindennapi embereknek (még ha matek-utálatban is szenvednek) is érdekesek lehetnek.

A könyvet **Tilos sorrendben olvasni !** csak itt-ott felütve, ami nekünk valóban tetszik, úgy szabad szemezgetni!

A könyv stílusa nem a matematikai precízségre (pl. szabatos szakkifejezések) törekszik, hanem a közérthetőségre, egyszerű nyelvezetre, de pontatlanságtól, félrevezetéstől nem kell tartania az Olvasónak. A hétköznapi szituációkat a matematika nyelvére lefordítani a matematikusok, mérnökök, tanárok és a diákok feladata.

Sajnos szemléltetésre minden tanórán kevés az idő, és azon ritka pillanatokat kell a tanároknak **megragadniuk** és a diákokat bátorítaniuk, amikor valamelyikük óra alatt önkéntelenül felkiált: *"Jé! A táblán a bigyó épp olyan, mint otthon a ..."* ! Ezt a lelkesedést kell fenntartanunk életünk végéig!

Számos szépirodalmi és zeneműben, festményben találunk matematikai problémákat vagy a matematika szeretetét bemutató részleteket, most csak *Mikszáth Kálmán* [MK], *Gárdonyi Géza* [GG], *Orosz István* [OI], *ifj.Holbein*, *Jacques Deval* [DJ], *Tove Jansson* [JT] és *Zerkovitz Béla* [ZB] műveit említjük. (Az [xy] szögletes zárójelek a könyv végén levő forrásmunkákat jelölik.)

"*Az életem a matematikáé, az analízist szörnyen szeretem, rajongok, ah, a geometriáé', Integrál Böske a nevem*" - énekelte Zerkovitz Béla legelső kupléjában (http://gramofon.nava.hu).

Norbert Herrmann professzor szerint [HN1], [HN3] az USA több, mint 100 évvel ezelőtti elnöke, *Mr.Garfield* még új bizonyítást is feltalált egy baráti társaságban, beszélgetés közben!

Sokkal szomorúbb azonban az a tömeges szerencsétlenség, amit *Sam Loyd* idézett elő egy ártalmatlannak tűnő (de megoldhatatlan) feladványra 1000$ díj kitűzésével! A tragédiákat az 1. fejezetben "*A kombinett játék*" problémánál meséljük el.

Amint eddig, ezután is a könyv stílusa könnyed, humoros, mint a Szerző egyetemi előadásai, de a mondanivaló bizony véresen komoly !

Számolásainkban legtöbbször **tizedespontot** használunk, elsősorban a zsebszámológépek és számítógépek hatására. Sajnos a minennapi életben is sokszor keveredik a tizedespont és -vessző, legyünk tehát mindig körültekintőek!

Hálásan köszönöm a **Nemzeti Kulturális Alap Ismeretterjesztés és Környezetkultúra Szakmai Kollégiuma** támogatását. Köszönöm kollégáim, barátaim beszélgetéseit, elsősor-

ban *Róka Sándor*, *Hujter Mihály, Tarján Klára, Dominyák Imréné* és *Norbert Herrmann* építő kritikáit. Külön hála a családtagoknak türelmükért, legfőképpen pedig nagypapának, **Mikó Ernőnek**, aki 90 évesen is lelkesen olvasta és kritizálta a kéziratot! Boldog születésnapot, jó egészséget Nagypapa!

Veszprém, 2012. június 29.

Szalkai István

P.S. Az alábbi megszívlelendő tanmesét még gyermekkorom-ban hallottam Nagymamámtól.

Egy tanmese

Reggel a falu bölcse megszámolta a hét favágót, és lelkükre kötötte, hogy csak akkor jöjjenek haza, ha mindannyian együtt vannak. Napszálltakor, hazaindulás előtt a legokosabb favágó elkezdte számolni a többieket: "Egy, kettő, három, négy, öt, hat, ... , **hol a hetedik**?" *A második is megszámolta magukat, de ő is csak hatig jutott, és így tovább, még a hetedik legkisebb is elszámolta a többieket hatig, de egyikük sem találta meg az elveszett favágót. Mindegyikük* nevét *is megkérdezték egymástól, de mindegyik név is válaszolt. Még ma is ott sírnak-rínak az erdőben, mert egyikük sem számolta meg* saját magát*! De hiszen reggel a falu bölcse sem számolta meg saját magát, ugye?*

1. Elemi számolások és tévedések

Bármilyen hihetetlen, az életben a legegyszerűbb számolásokat is képesek vagyuk elrontani, amely tévedésünknek sajnos sokszor komoly következményei lehetnek! Az alábbi esetek mind megtörténtek a valóságban.

Minden ötödik

Rádióban, újságban többször találkozunk a következőhöz hasonló nyelvbotlásokkal: "*Most még csak minden ötödik család rendelkezik a legmodernebb kütyüvel, de hamarosan majd minden hetedik családban lesz már ilyen kütyü.*"

No, rajzoljuk inkább le a családokat és a kütyüket:

most:
X X X X ☺ X X X X ☺ X X X X ☺ X X X X ☺ X X X X ☺
lesz:
X X X X X X ☺ X X X X X X ☺ X X X X X X ☺ X X X X

Érdekes! Csökken a kütyük száma?

Igen, mert a "*minden ötödiknek van*" azt jelenti, hogy **négy**nek nincs, a "*minden hetediknek van*" kijelentés pedig azt,hogy **hat** családnak nincs kütyüje. Így már érthető, hogy miért kevesebb a "*minden hetedik*" mint a "*minden ötödik*".

A matematika nyelvén az eredeti mondatot úgy fogalmaznánk meg, hogy "*most a családok ötöd-részének ... majd a családok heted-részének ...* " , márpedig tudjuk, hogy

$$\frac{Cs}{5} > \frac{Cs}{7} \quad .$$

Hasonló tévedéssel találkozunk a "*Százalékszámítás*" fejezet "**Kilencedik**" problémájában is.

Átlag

Rádióhír a "Rákosi" -rendszerből (1950 körüli évek):
"*Ma már több tucat üzem termel az országos átlag felett, hamarosan pedig az* összes többi *üzem termelése is felül fogja múlni az országos átlagot!* "
Mikor lesz ez? - kérdezték már akkor is. SOHA! Nos, a hétköznapi tapasztalat szerint (és a matematika tételei szerint is) az **átlag** (más néven **számtani középérték**) mindig a legnagyobb és a legkisebb érték között van. Ebből pedig az következik, hogy **sohasem lehet az összes érték az átlag felett vagy alatt !** Egyetlen kivétel van: ha az összes üzem termelése hajszálpontosan ugyanakkora: ekkor az átlag is ez a közös érték, de ekkor *átlag feletti üzem sincs* !

Tulajdonrészek

Fiatal pár keresett meg pár éve szakmai tanácsért. Építkeznek, a lány szülei 2 millió, a fiú szülei 1,5 millió Ft-ot adtak, saját megtakarításuk 1 millió, és két gyermeket vállaltak, amiért 2 millió Ft-ot kaptak. Mekkora tulajdonrészeket kérjenek a Földhivatalnál bejegyezni? Én anyósommal jóban vagyok, nálunk 50%-50% van bejegyezve minden számolgatás nélkül, de a fiatal pár ragaszkodott a szigorú osztozkodáshoz.

Nos, a lány része 2+(1+2)/2 = 3,5mFt, a fiú része 1,5+(1+2)/2 = 3mFt, a <u>nevező</u> pedig az összes 2+1,5+1+2=6,5mFt. Tehát a tulajdoni részek:

lány: 3,5/6,5 = **7/13**, *fiú*: 3/6,5 = **6/13 .**

Némely esetben örökléskor a részek tovább osztódnak. Számoljuk ki a két gyermek részét, ha az apa (előbb még "fiú") vagy az anya (előbb még "lány") hal meg előbb!
(A válaszokat a könyv végén, a **Megoldás** részben találjuk.)

Hamis tízezres

Olvassuk el alaposan az alábbi újságcikket. Valójában mekkora kár érte az újságost? Hányast adnánk az újságírónak ill. a szakértőknek matekból?

2003. október 10., pén

Hamis tízezres

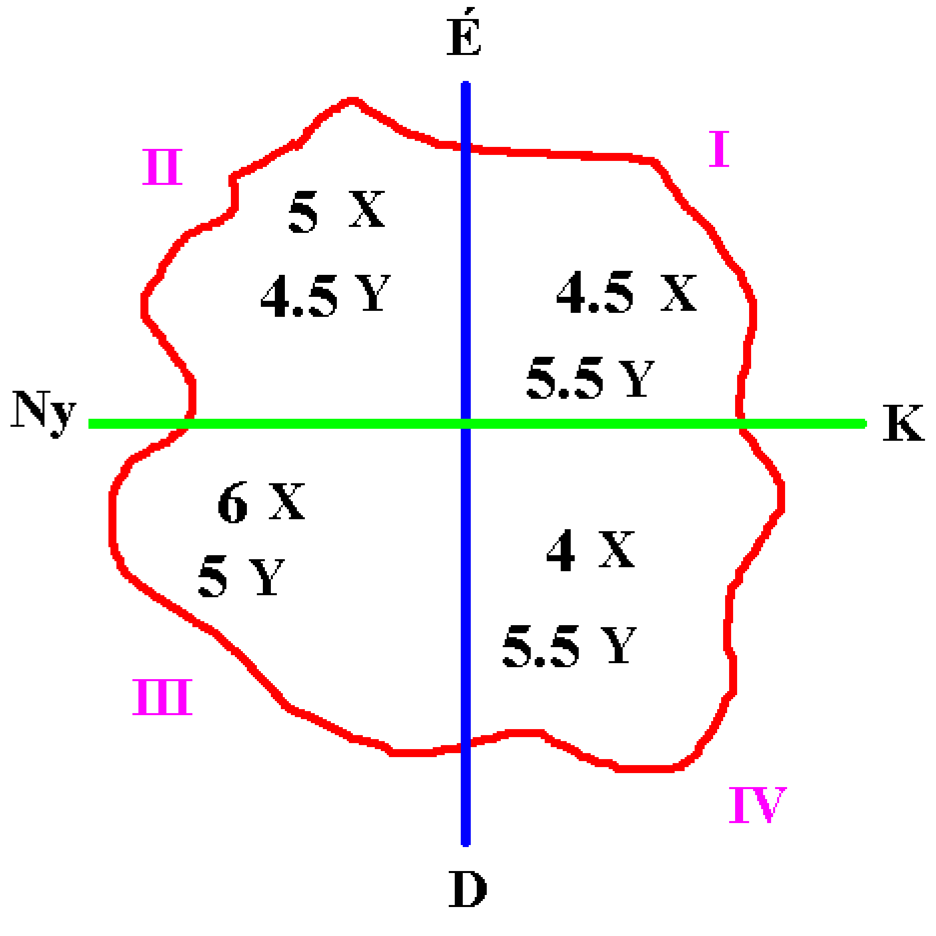
A belváros egyik újságospavilonjánál hamis tízezressel fizetett egy férfi, aki előtte közel ezer forintért vásárolt magazinokat. Az eladó elfogadta a pénzt, és csak később vette észre, hogy valami nem stimmel vele. A rendőrkapitányságra sietett, ahol szakértők megállapították: a színes fénymásolóval készült bankó valóban hamis, de rendkívül jó minőségű, ezért a 9 ezer forintot „vesztett" alkalmazott nem tehet különösebb szemrehányást magának.

A megoldás egyszerű: az újságos eladó nem csak az általa visszaadott 9000Ft-ot sirathatja, hanem az 1000Ft értékű újságot is, azaz összesen **10000,-Ft** -ot. Ez pedig nem meglepő, hiszen a csaló is pontosan ennyit nyert: sikerült elpasszolnia a hamis tízezresét!

Választókörzetek

Függ-e a választás végeredménye attól, hogy hogyan osztják fel a várost választókerületekre? Miért függene, hiszen az X *illetve* Y *pártokra szavazók száma nem változik!*

Nézzünk egy egyszerű példát. Álljon a **V** város négy városi kerületből: I, II, III, IV, de csak két *választó*kerületre fogják osztani, vagyis összesen két képviselőt választanak. Legyen a két párt neve **X** és **Y**, és tegyük fel, hogy az egyes városi kerületekben a pártok támogatottsága az ábrán látható (ezer fő):



Melyik pártot győz *ha* a választókerületek felosztása:

a) eset: **A** = I. és II.ker., **B** = III. és IV., vagyis a két választókerületet kelet-nyugati vonal határolja: **A** északon, **B** délen,

b) eset: **C** = II. és III.ker., **D** = I. és IV., ekkor a két választókerületet észak-déli vonal határolja: **C** nyugaton, **D** keleten.

Könnyű kiszámolni, hogy az **a) esetben** mindkét választókerületben az **Y** párt győz (10>9.5 és 10.5>10, ezer fő), míg a **b) esetben** a **C** választókerületben az **X** párt győz (11>9.5), **D** -ben pedig **Y** jelöltje (11>8.5, ezer fő) !

Tehát igenis van jelentősége annak, hogy hogyan osztjuk választókerületekre a várost, azaz a lakosságot!

A mostani példa azért megdöbbentő, mert roppant egyszerű! Mindössze nyolc, majdnem akármilyen szám alkotja! A valóság sokkal bonyolultabb lehet, ráadásul nem csak négy városi (vagy járási) kerületből lehet választókörzeteket létrehozni, azaz egyik vagy másik pártot előnybe hozni !

Felmerül a kérdés: lehetséges -e olyan város és négy kerület, amikor az egyik esetben az **X** párt, a másik esetben pedig az **Y** párt nyer kétszer? (A választ a **Megoldások** részben találjuk.)

Pelikán József [K89] cikkében és *Norbert Herrmann* [HN1], [HN3] könyveiben választások különböző értékelési módszereit mutatják be.

Mindenki mindenkinek

Karácsonykor mindenki vett mindenkinek kis ajándékot. Ha a társaság 7 tagú, akkor mennyi ajándék van a fa alatt? Természetesen 7·6=42, hiszen mindenki 6 másik személyt ajándékozott meg. Általában pedig: x tagú társaság esetén mennyi ez a szám? Nyilván $x\cdot(x-1)$.

Fordítsuk meg a kérdést: hány tagú a társaság, ha összesen 812 ajándék gyűlt össze? Az előzőek szerint olyan x egész számot kell keresnünk, amelyre $x\cdot(x-1)=812$. Kis próbálkozás után megtaláljuk a megoldást: 812=29·28, tehát összesen x=29 személy ajándékozott.

Kicsit bonyolultabb a helyzet, ha *koccintásokat* számolunk: én is koccintok Józsival, ő is számolta ezt a pohárcsilingelést, de végülis ez csak egy koccintás. Ha pedig mindegyik koccintást hasonlóan *kétszer* számoltunk, akkor az általános képlet

$$\frac{x(x-1)}{2}.$$

Kipróbálhatjuk: (pontosan) 812 koccintást egyetlen társaságban sem hallhatunk, hiszen nincs olyan x egész szám, amelyre $\frac{x(x-1)}{2}$ = 812 lenne! Koccintások helyett kézfogásokat is hasonlóan kell számolnunk, hiszen ketten rázunk kezet egyszerre, ami csak egy kézfogás.

A *puszi* pedig még ezeknél is bonyolultabb, hiszen én adhatok is és kaphatok jobbról és balról is, ekkor a képlet $2x(x\text{-}1)$, csak a reggeli futásnál fordul elő a spórolós $x(x\text{-}1)$ képlet.

Vigyázat: a *csóknál* már megint az $\frac{x(x-1)}{2}$ formula kerül előtérbe! (?)

Csökken a növekedés

Ismerősöm kérdezte teljes rácsodálkozással:

"*Hogyhogy növekednek még mindig az árak, pedig állítólag az infláció csökken!?*"

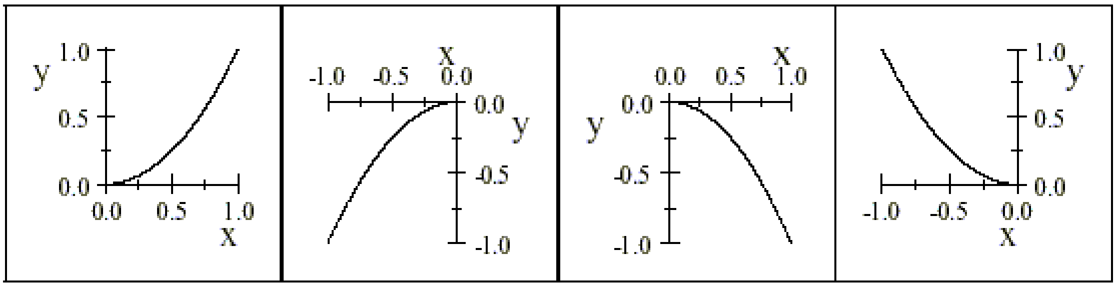
Hasonló kérdéseket hallottam máshonnan is:

"*A párt támogatottságának csökkenése lassul, de mégis egyre kevesebb a szimpatizáns"* vagy "*a levegő lehűlésének üteme lassul, de mégis egyre hidegebb van*" vagy "*az autó egyre lassabban halad, mégis egyre messzebb van*".

Nos, mi is az "infláció"? Magyarul *áremelkedés* - amennyivel az ár nő. Nézzünk egy példát. Ha a TV most 100ezer Ft, jövő hónapban 150ezer Ft, két hónap múlva 175ezer Ft, akkor nyilvánvalóan végig **növekedett** az **ára**, vagyis végig volt infláció. Azonban az első hónapban 50ezer Ft, a második hónapban már csak 25ezer Ft volt az **infláció**, ami valóban **csökkent**. Tehát hiába csökkent az árnövekedés *üteme*, attól még volt növekedés vagyis infláció!

Hasonló magyarázattal érthetjük meg a többi, látszólagos ellentmondást is: ha valami változik (pl. levegő hőmérséklete, párt támogatottsága), esetleg csökken, attól még ő létezik! Ugyanez igaz a *változásokra* is: az sem szűnik meg, még ha kicsit változik is (kisebb vagy nagyobb lesz), attól még *változás* marad, sőt a *változás* előjele (iránya) is megmaradhat! Tehát az eredeti mennyiség kénytelen még mindig változni, ráadásul ugyanolyan irányban mint előtte, csak esetleg kisebb mértékben.

A *változó változású* mennyiségek grafikonjai többfélék lehetnek:

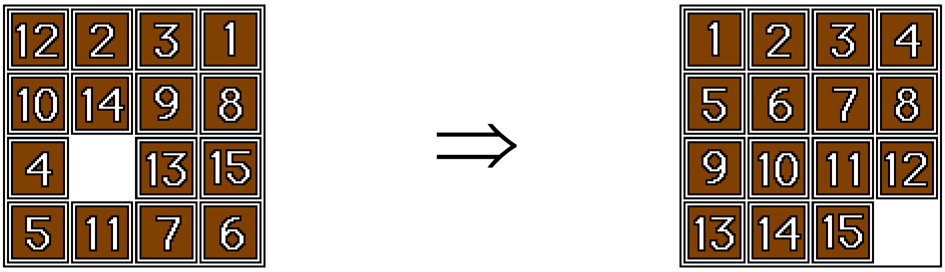


de figyeljük csak meg: mindegyik változásának *iránya* (növekszik vagy csökken) *nem változik*!

Megjegyzés: A fenti jelenséget a matematika nyelvén "**konvexitás-konkavitás**"-nak hívják, bővebb magyarázatot például a Szerző [SzI1]-[SzI5] egyetemi jegyzeteiben találhatunk, az alábbi két mozgókép is erről szól:
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/derivalt_novekszik.avi
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/derivalt_csokken.avi .

A "kombinett" játék

Szokás "*15-ös*" játéknak is hívni: egy nagyobb négyzet alakú lapos dobozban 15 kisebb (negyedakkora) négyzet falapocska van, és egy üres hely. A lapocskákat kiborítjuk a dobozból és össze-vissza tesszük vissza, mint például a *bal oldali* ábrán:



Az üres hely melletti négy kis négyzet bármelyikét tetszés szerint tolhatjuk az üres helyre, persze ekkor az üres hely is "odébb vándorol", és így tovább. Csak ilyan tologatásokkal (nem újabb kiborítással!!!) sorba tudjuk-e rakni a lapocskákat, a *jobboldali* ábra szerint? Manapság inkább műanyagból készítik mint gyermekjátékot, számok helyett egy képecskével, amely a lapocskák sorbarakása után bújik elő. (A lapocskák oldalain levő sínek és bemélyedések állítólag megakadályozzák a lapocskák kiborítását,de ezt csak anyukák hiszik el.) Játékprogramot, leírást, stratégiát, elemzést is rengeteget találunk a világhálón, lerágott csont. Például:
http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/fifteen.shtml .

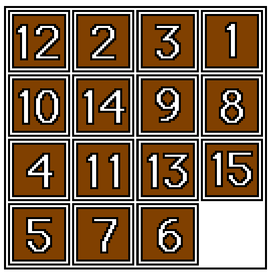
Azonban érdemes megszívlelnünk a XIX. század hetvenes éveiben történt nagyon sok emberi tragédia tanulságát! **Sam** (Samuel) **Loyd** amerikai rejtvényszerző matematikus (1841-1911) az alábbi feladatot tűzte ki napilapokban a "*15 Puzzle*" játékkal kapcsolatban, és **1000** (akkori!) dollárt ígért az első helyes megfejtésért. **Feladat:** *A lapocskák mind legyenek eredeti helyükön, mindössze a két legutolsó, a 14-es és a 15-ös legyen megcserélve. Csak tologatással cseréljük vissza ezt a két lapocskát, a többi is végül kerüljön vissza eredeti helyére.*

Sajnos az őrület végigsöpört egész Amerikán és Európán: emberek ezrei hanyagolták el vagy adták fel munkahelyüket, éjjelente utcai lámpák fényénél próbálkoztak, a tologatások sorrendjét próbálták memorizálni, sofőrök, pilóták, mérnökök, mozdonyvezetők, hajósok okoztak és szenvedetek rengeteg balesetet, farmerek hanyagolták el állataikat, sőt a Németországi Reichstagban (Parlament) a képviselők is csak ezzel foglalkoztak, Franciaországban több kárt okozott mint a dohányzás és az alkohol együttesen! (Forrás: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Loyd.html .)

Sam Loyd 1000 dollárja ugyanis biztonságban volt: a fenti feladat **megoldhatatlan!** Matematikailag könnyen be lehet *bizonyítani* (tanítom is algebra óráimon!), sőt nagyon egyszerű módszerrel *bármelyik* kezdő állásról (mint az előző oldalon közöltről is) könnyen eldönthető, hogy megoldható vagy sem!

Alább csak röviden ismertetjük a számolást, hiszen sok helyen olvashatunk részletesen a játékról (Élet és Tudomány újság [ÉT63/39], Csákány Béla [CsB], a Szerző [SzI0], vagy az interneten).

Először toljuk le (akárhogyan) az üres helyet a legalsó sorba, a legutolsó helyre. Számoljuk meg, hány csere ("*inverzió*") van most a táblán, vagyis hányszor előz meg nagyobb szám egy kisebbet. Az előző oldal táblája például így alakítható:



A cserék (inverziók) könyebb összeszámolásához írjuk le egy sorba a számokat:

12, 2, 3, 1, 10, 14, 9, 8, 4, 11, 13, 15, 5, 7, 6.

A **12** megelőz 11 db nála kisebb számot, a **2** és a **3** csak egyet-egyet, az **1** egyetlent sem, a **10** azonban 6 db nála kisebbet, a **14** megelőz 8 db-ot, és így tovább. Tehát a cserék (megelőzések) összes száma

$$\mathbf{Cs} = 11+1+1+0+6+8+5+4+0+3+3+3+0+1+0\ .$$

A fenti összeget nem kell kiszámítanunk pontosan,hanem csak az érdekes: páros vagy páratlan. Ugyanis a matematikailag ellenőrzött (bizonyított) összefüggés így szól:
Tétel: *A 15-ös játék* **pontosan akkor** *oldható meg, ha a cserék fenti módon kiszámított* **Cs** *száma* páros**.**
A mi példánkban **Cs** páros (hiszen páros sok páratlan számot tartalmaz), ezért az Olvasó nyugodtan próbálkozhat: előbb-utóbb biztosan sorba tudja rakni a lapocskákat!

Hasonló módszerrel lehet a Rubik Ernő féle *Bűvös kocka* bármely állásáról (ha pl. szétesett és csak össze-vissza raktuk össze) eldönteni, hogy visszaforgatható-e. Erről részletesebben például Csákány Béla [CsB] könyvében olvashatunk.

Ha az Olvasót érdekli Sam Loyd néhány további rejtvénye, akkor *Cyclopaedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums* könyvét ajánlhatjuk, ami például a
http://www.mathpuzzle.com/loyd/ címen található meg.

5-ös kerekítés

Mindennap találkozunk az *5-ös kerekítéssel*: egy- és kétforintosok híján készpénzes fizetéskor a legközelebbi 5 -re vagy 0 -ra kerekítve kell fizetnünk. *Nem csap-e be ismét a kereskedelem bennünket - mint sok más esetben?* - tette fel a kérdést sok ismerősöm. Nem részletezem a számolást, aminek lényege: mivel a nagyszámú vásárlás esetén a végösszeg le- és felfelé kerekítései szinte ugyanannyiszor fordulnak elő (vagyis az összeg 0, +1, -1, +2, -2 módosításai), ezért hosszú távon még egy fillérrel sem leszünk sem megrövidítve sem meggazdagodva! (2008 március 1. óta)

Sütemény

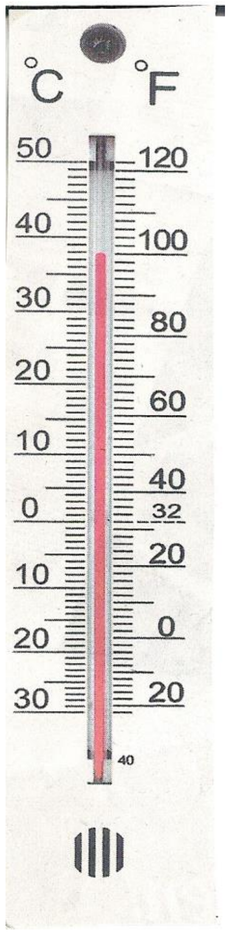
Aki eddig követte számolásainkat, az megérdemel egy édesség-feladatot is. Kedvencem a *Rakott süti*, ami nem más, mint néhány piskótalap és közöttük csokikrém. *Hány lapos* *legyen, ha aránylag minnél több krémet szeretnénk?* Természetesen mindegy, hiszen a lapok és a krém-rétegek felváltva

követik egymást. Vagy mégsem? Mivel az alja és a teteje is piskótalap, eggyel több réteg a tészta, mint a krém. Tehát a csoki és a tészta *aránya* 1/2 (kétlapos), 2/3 (háromlapos), 3/4 , 4/5 , ... , tehát jól sejtettük: a csoki mindig kevesebb, mint a piskóta, de minnél több a réteg, annál közelebb kerül arányuk az 1 -hez.

Fahrenheit

Sokan utaznak angolszász tájakra (pl. USA), ahol a mértékegységek hüvelyk (inch), láb (feet), gallon, font (pund), uncia (ounce), acre (angol hektár), stb. Nem is kell átlépnünk szép hazánk határait, az áruházak is teli vannak külföldi termékekkel, de levelezéskor is nehezen értettük meg egymást külföldi kollégáinkkal: "*a fiam már 7 láb magas*", "*hány négyzetláb a lakásotok?*", stb. A fenti mértékegységeket (aránylag) könnyű átszámolnunk: mindössze egy váltószámmal kell szoroznunk, akárcsak pénzváltáskor. (Néhány szorzótényezőt a Megoldások fejezet végén megtalálunk.)

A hőmérséklet azonban bonyolultabb, sohasem tudtam reggelente, hogy pulóvert vagy pólót vegyek fel, mert a rádióban mindig csak 70^{o} és $90\ ^{o}$ közötti (Fahrenheit) hőmérsékletet jeleztek. Egy darabig magammal hordtam kedvenc kétskálás hőmérőmet, de hosszú távon ez is macerás. Tehát a pontos matematikai képleteket kellett közelítőleg megjegyeznem (≈≈ a durva közelítés jele):



$$\text{Celsius}^{o} \;=\; (\text{Fahrenheit}^{o}-32)\cdot\frac{5}{9}$$

$$\approx\; (\text{Fahrenheit}^{o}-32)\cdot 0.555$$

tehát

$$\boxed{\text{Celsius}^{o} \;\approx\approx\; (\text{Fahrenheit}^{o}-32)\,/\,2\ .}$$

Például

$$73^{o}\text{F} \approx\approx (73-32)/2 = 41/2 = 20.5^{o}\text{C}\ ,$$

pulóvert kell vennem.

Természetesen 32 -nél alacsonyabb Fahrenheit fagypont alatti hőmérsékletet jelent, mint például

$$15^{o}\text{F} \approx\approx (15-32)/2 = -17/2 = -8.5^{o}\text{C}\ ,$$

még éppen kibírható, ha gyalog kell mennem suliba.

Megfordítva:

$$\text{Fahrenheit}^{o} \;=\; \frac{9}{5}\cdot\text{Celsius}^{o}+32$$

$$=\; 1.8\cdot\text{Celsius}^{o}+32$$

vagyis

$$\boxed{\text{Fahrenheit}^{o} \;\approx\approx\; 2\cdot\text{Celsius}^{o}+32\ .}$$

Például: $-8.5^{o}\text{C} \approx\approx 2\cdot(-8.5)+32 = -17+32 = 15^{o}\text{F}$.

Autókölcsönzés

Autót szeretnénk kölcsönözni 3 napra, és két cég ajánlata közül választhatunk. Az **X** cég napi 8900 Ft-ot kér az autó használatáért és még 75 Ft-ot minden megtett kilométer után, az **Y** cég 11900 Ft-ot kér naponta és 49 Ft-ot minden kilométer után. (A benzint mindkét esetben magunknak kell megvennünk a fentieken túl.) Hány kilométer felett éri meg az **Y** céget választani? A két cég közötti választásunkat hogyan befolyásolja a kölcsönzési napok száma? (A számolásokat szokás szerint a könyv utolsó fejezetében találjuk.)

Fényképek

Kétféle fényképezőgép felvételeiről kérhetünk papírképet. A régi *kisfilmtekercses* ("hagyományos") gépbe filmtekercset kell tennünk (ára kb. 500 Ft), amely műanyag (celluloid) szalagon vegyi anyagot tartalmaz a képek rögzítésére és tárolására ("negatív"). Nem drágábbak, de sokkal jobb felbontásúak az olcsóbb digitális fényképezőgépeknél. A kisfilmtekercs *előhívásáért* egy fix összeget kell fizetnünk tekercsenként, akár 24 kép akár 36 vagy 72 kép van a tekercsen (több nem lehet). Ez után minden 9x13 cm méretű papírkép (a "*nagyítás*") 5,-Ft/db.

A digitális fényképezőgépnél előhívási díj nincs, csak a számítógépre való átírás "transzferköltsége", ami 199,-Ft megrendelésenként, akármennyi képet is rendelünk. (Akár 500 képet is rendelhetünk egyszerre.) Minden papírkép ezután 39 Ft.

o) Mennyibe kerül egy-egy tekercs (hagyományos) film *előhívása*, ha 24 képes tekercs előhívása és a képek nagyítása (24 db) összesen 919 Ft -ba került?

a) Számítsuk ki, hogy 24, 36 illetve 72 kép megrendelése esetén mennyi a képek *átlagára* kisfilm- tekercses és digitális fényképezőgép esetén?

b) Hány kép esetén olcsóbb a digitális fényképezőgép képeinek előhívása a hagyományos fényképezőgéphez viszonyítva?

2. Zsebszámológépek, pontosság

Mindenki használja. Mégis számtalan fiatallal (általános- és középiskolással) találkoztam, akik sokszor hamis eredményt hoztak ki gépükkel, és nem a billentyűk félreütésével! Mert még az egyszerűbb számtani képleteket is máshogyan írjuk kézzel mint amilyen sorrendben a számológép gombjait kell nyomogatnunk. (Természetesen most nem a vagyont érő "fullscreen editor" zsebszámológépekről van szó!)

Már az elején ki kell emelnünk, hogy a háromféle géptípus már az alapműveleteknél is egészen máshogyan működik, nem csak a billentyűket kell más sorrendben ütögetnünk:

Egyszerű (vagy "kulcstartós"): csak négy alapművelet, egy memória és gyökvonás van rajta.

Tudományos: sin, ln, exp és egyéb középiskolában tanult függvényeket is kiszámolhatunk vele.

Kétsoros: minden beírt adatot és műveletet is láthatunk a kijelző felső sorában, az eredmény pedig az alsó sorban található.

Fontos még tudnunk, hogy a számítógépek *Számológép* programja is eltérően működik az *egyszerű* és a *tudományos* nézetben, az igazi zsebszámológépekkel teljesen megegyező módon!

Műveletek sorrendje (precedencia)

Nyomjuk meg az alábbi gombokat (ebben a sorrendben) egy egyszerű és egy tudományos vagy kétsoros zsebszámológépnek is:

$$2 + 3 \times 5 =$$

(ami ugyebár **17**). Meglepetésünkre az egyszerű gép **25** -öt, míg a tudományos **17** -et mutat! Ugyanis az egyszerű gép *láncműveleteket* számol: a következő műveleti jel gombjának lenyomásakor kiszámolja az eddigi eredményt - mintha az = gombot is megnyomtuk volna. (Nincs elég memóriája a rész-eredmény megjegyzéséhez.)
Persze, ha a fenti példa gombjait a

3 × 5 + 2 =

sorrendben nyomogattuk volna, mindkét gép 17 -et mutatna!

A kicsit bonyolutabb

$$\frac{58+32}{45}$$

feladat láttán önkéntelenül az

5 8 + 3 2 ÷ 4 5 =

gombokat nyomjuk meg, ami viszont az egyszerű gépen lesz helyesen **2**, míg az okosabb gépek **58.71111111** -et mutatnak, helytelenül! Hát persze: az okos gépek ismerik az osztás elsőbbrendűségét (precedenciáját), mi pedig az

58 + 32/45 =

képletet számoltattuk ki velük!

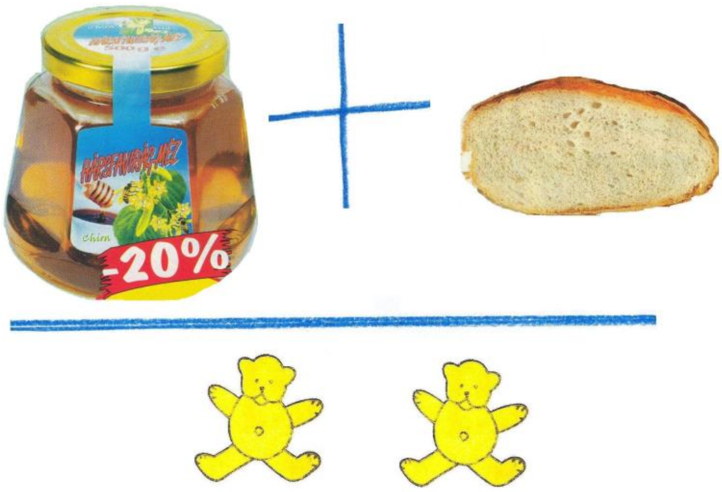
" A TÖRTVONAL ZÁRÓJELET PÓTOL / IGÉNYEL "

tanuljuk az iskolában, és ez bizony így van! Tehát a legutóbbi feladatot tudományos vagy kétsoros gépünknek zárójelekkel kell beadnunk:

(5 8 + 3 2) ÷ 4 5 =

Összeget tagonként osztunk

Ez a szabály miért olyan bonyolult?



Hiszen a képen is látható, amit minden anyuka ösztönösen tud: *ha* két medvebocs között kell *elosztani* egy csupor mézet *meg* egy szelet kenyeret, akkor nyilván mindkét tárgyat egyenként (azaz tagonként) osztjuk el! Mindennap is ezt csináljuk, nem csak az iskolapadban!

A következő, nem bonyolultabb képletet

$$\frac{1200}{42+78}$$

okosabb géppel hasonlóan egyszerűen számolhatjuk ki:

`1 2 0 0 ÷ ( 4 2 + 7 8 ) =`

vagyis **10**. Azonban láncműveletes egyszerűbb géppel, a legtöbb diák csak papír és ceruza segítségével boldogul: kiszámolja a nevezőt (`42+78=120`), lekörmöli, kijelzőt nulláz, majd elosztja a számlálót a papírról bemásolt nevezővel.

Pedig sokkal gyorsabb és kevésbé rontjuk el a másolást, ha használjuk a Memória (**`M`**) gombot:
először lenullázzuk a memóriát az **`MC`** vagy **`RCM`** gomb kétszeri lenyomásával, majd írjuk:

$$4\ 2 + 7\ 8 = \mathrm{M} + 1\ 2\ 0\ 0 \div \mathrm{MR} =$$

vagyis a nevezőt a papír helyett a memóriába írtuk, és az osztáskor már csak onnan (a memóriából) olvastuk ki!

Gyakorlásképpen számoljuk ki a

$$\frac{373+287}{42+18}$$

törtet papír és ceruza nélkül, de ne fejben! (Megoldást a legutolsó fejezetben találunk.)

Ki tudja-e számolni a kedves Olvasó az alábbi tört értékét:

$$\frac{430}{25 \cdot 64} \quad ?$$

Zárójelekkel természetesen a megoldás:

$$4\ 3\ 0 \div (\ 2\ 5 \times 6\ 4\ ) =$$

vagyis = 0,26875 , de még az egyszerű gépen (zárójelek nélkül) is működik az emeletes tört értelmezése:

$$4\ 3\ 0 \div 2\ 5 \div 6\ 4 =$$

hiszen

$$\frac{430}{25 \cdot 64} = \frac{\frac{430}{25}}{64} ,$$

de semmi esetben sem nyomjunk `430÷25×64` -et !

Zárójelek

A fenti példák is mutatják, hogy nem csak az iskolapadban, hanem a legokosabb (legdrágább) számológépeknél is nagyon fontos a megfelelő zárójelek használata: zárójelek nélkül a beírt képlet könnyen mást jelenthet, mint amit mi szeretnénk kiszámolni! A zárójel(pár) nem más, mint egy *reklámszatyor*: nem szóródnak ki a számok belőle. Inkább többet írjunk a papírra, mint kevesebbet!

Számrendszerek

Az angliai **Daily Mail** 2008. július 15-i számában és [MG2] -ben is olvashattuk az alábbi esetet:

Decimalisation?

A traffic warden was caught ticketing innocent motorists, because he couldn't tell the time. He used a calculator to work out the expiry time on a ticket, without realising the device worked in decimals and not minutes and hours.

Mr A parked near Torquay harbour at 2.49pm and paid £1.20 for 75 minutes, covering him until 4.04 pm. But when he returned at 3.41 pm, he discovered a £50 fine on his car. The warden had tapped 14.49 into his calculator and added 0.75 to produce a total of 15.24, some 17 minutes before he returned to the car. The motorist said, 'I tried to explain but he didn't have a clue. He just carried on doing the same to other cars parked there.'

Tony Robin saw this news story in the *Daily Mail* of 15 July 2008.

" Egy közlekedési rendőr ártatlan autóst büntetett meg, mert a rendőr tévesen számolta ki az eltelt időt, pedig zsebszámológépet használt.

A. úr a Torqay kikötőtől nem messze parkolt le délután 2.49-kor és 1.20 Fontot fizetett 75 perc parkolásért, ami 4.04 -ig biztosította neki a parkolási lehetőséget. De amikor visszatért, 3.41-kor, egy 50 Fontos büntetést talált a szélvédőjén. Ugyanis a parkolóőr beütötte a számológépbe: **`14.49+0.75`** *, és a* **`15.24`** *eredmény láttán kitette a büntetést a szélvédőre.*

" Megpróbáltam neki megmagyarázni tévedését, de láttam, hogy az egészről fogalma sincs, a többi parkoló autót is sorban büntette hasonlóan" - mondta a póruljárt autós, aki alig 17 perccel később jött azután, mint amit az őr számológépe mutatott. "

A zsebszámológép tízes (decimális) számrendszerben számol, vagyis a parkolóőr (helytelen) számítása megfelelt a

$$14+\frac{49}{100}+\frac{75}{100}=15+\frac{24}{100}$$

egyenlőségnek, ami persze egészen más, mint ami a karóránkhoz kellene:

$$14+\frac{49}{60}+\frac{75}{60}=16+\frac{4}{60}\ .$$

A legtöbb tudományos és kétsoros számológép tud (tetszőleges nevezőjű) törtekkel is számolni: **$a^b/_c$** vagy egy hasonló gombot kell keresnünk. Tehát a parkolóőrnek mindössze a tizedespont *helyett* az **$a^b/_c$** gombot kellett volna megnyomnia:

14 $a^b/_c$ 49 $a^b/_c$ 60 + 75 $a^b/_c$ 60 =

és a kijelzőn máris látható lett volna a

16 ⌟ 1 ⌟ 15

eredmény, aminek jelentése szokásos írásmóddal a

$$16\frac{1}{15}=16+\frac{1}{15}$$

áltört. Igaz ugyan, hogy ez már nem 60 -as számrendszerben van (a zsebszámológép egyszerűsített), így a törtet vagy fejben bővítjük 4-gyel: 16+1/15 = 16+4/60 azaz 16 óra 4 perc; vagy további gombokat keresünk a számológépen.

A **dms** vagy **°'"** gombokkal tízes- és hatvanas számrendszerek (*degree-minute-second*, azaz fok-perc-másodperc) között válthatunk oda-vissza, tehát először az **$a^b/_c$** , **$^d/_c$** és az **=** gombokat nyomogatva az **16⌟1⌟ 15** eredményt átváltjuk tízes számrendszerbe: **16.066667** , majd a **°'"** gombot megnyomva látjuk

16°4°0°

ami a számológép nyelvén **16 óra 4 perc 0 mp** -et jelent!

Sajnos alapműveleteket közvetlenül a **dms** vagy **°'"** gombokkal nem végezhetünk, például :

1 4 °'" 4 9 + 0 °'" 75 = Syntax error.

Ha tehát a **dms** vagy **°'"** gombokat szeretnénk használni, akkor az alapműveletek *előtt* mindent át kell váltanunk tízes számrendszerbe, a műveleteket a szokásos módon (decimálisan) elvégezni, majd a végeredményt visszaírni hatvanas számrendszerbe.

A parkolóőr problémája megoldható az **a^b/$_c$** vagy **°'"** gombok nélkül egyszerű számológéppel is,ezt szintén a könyv végén a **Megoldás** részben ismertetjük.

Az **a^b/$_c$** gomb hasznos akkor is, amikor például CD -re írás előtt számoljuk össze a zeneszámok hosszait, vagy geometria házifeladatunkban a szög-percek és -másodpercek használatában is.

Szükségünk lehet a hatvanas- és tízes- számrendszerek között *átváltásra* is. Mint említettük, erre használhatjuk a **dms** vagy **°'"** gombokat, a **SHIFT** illetve az **INV** gombokkal kombinálva. *Ha* ilyen gombunk nincs, az alábbi egyszerű képleteket is meg lehet jegyezni:

hatvanas ⇒ tízes:

14 + 49 / 60 =

vagyis

$$14 + \frac{49}{60} = 14{,}816666 \quad ,$$

tízes ⇒ hatvanas:

0,816666 × 60 =

vagyis

$$0{,}816666 = \frac{49}{60} \quad .$$

Számrendszereken alapulnak a *Négy kartonpapír* és a *Varázsdiók* bűvésztrükkök is a 9. fejezetben.

Maradékok

A számrendszerekkel, egész számokkal szoros kapcsolatban van a *maradék* fogalma. Nem csak kisiskolások matematikája a " 17 *osztva* 3 *-mal* = 5 *-ször* és *marad* 2 ". A modern titkosírások, biztonságos internet-kapcsolatok éppen a (többszázjegyű) egész számok maradékain alapulnak, amikről például a Szerző [SzI6] könyvében olvashatunk bővebben. Különböző számrendszerek közötti átváltáskor is maradékos osztásra van szükségünk. A különböző kódok és számok, mint például TAJ, APEH, ISBN számok, vonalkódok mind a maradékok megfelelő "kezelése" miatt biztonságosak.

És **én** mikor használom - kérdezi kedves Olvasóm? Például: *"Milyen nap volt* 40 *vagy* 270 *nappal ezelőtt"* - csak a 7 -tel való (osztási) *maradék* a lényeg, és nem az, hogy hány hét telt el azóta. *"Hány süti marad ki a dobozokból"* - számolgatják az apróságok a konyhában, szájukat nyalogatva. A 9. fejezetben bemutatott *Csodagömb* titka is egyszerűen a maradékok tulajdonságain alapul. Végső soron a trigonometrikus függvények (*sin, cos*) is csak a szög 360 -al vett maradéka iránt érdeklődnek, radián esetén pedig 2π szerint képezzük a maradékot.

Hogyan kell a maradékot kiszámolni? Sajnos ilyen gomb nincs a számológépeken, nekünk kell kitalálni, ráadásul ehhez papírt és ceruzát is elő kell vennünk.

Például mennyi maradékot ad 839 423, ha elosztjuk 5701-el?

Egyik módszer:

839 423 : 5701 = 147.241

a tizedesjegyeket levágjuk, és a maradék

839423-(5701*147) = <u>1376</u> .

Ugye emlékszünk: "egyszerű" számológépeken kellenek a zárójelek!

(Ellenőrzés: **5701*147+1376 = 839 423** .)

Másik módszer:

839 423 / 5701 = 147.241361 ,

most csak a tizedesjegyekkel szorzunk vissza (hiszen *az* a maradék):

5701 * 0.241361 = 1375,999061

≈ <u>1376</u> .

Bizony, ez a módszer kicsit pontatlanabb az elsőnél, itt is lényeges a pontosság!

Néhány zsebszámológép képes bináris, oktális és hexadecimális (2-es, 8-as, 16-os) számrendszerekbe átváltani és alapműveleteket elvégezni, de csak nagyon kicsi számokkal.

Pontosság

A zsebszámológép feleslegesen számol legalább 8 tizedesjegyre pontosan, a hétköznapi életben általában kettő is elegendő. Minek vesződjünk tehát a felesleges jegyek körmölésével! Még a matek érettségin is csak két tizedesjegyre kérik a végeredményt, tehát a legtöbb nebuló már a számolás elején, és végig minden lépésben mindig csak két-két tizedesjegyet vesz figyelembe. Azonban a kerekítési hibák menet közben nőhetnek, sőt robbanhatnak is - a végeredmény már egyetlen tizedesjegyre sem lesz pontos,sőt az egészek is pontatlanok lehetnek! Alább néhány megtörtént esetet mutatunk be.

Legegyszerűbb példa

Az

$$54.0672 - 2.5373 * 21.2313 = \mathbf{0.19702251}$$

kifejezés tagjait két tizedesjegyre kerekítve

$$54.07 - 2.54 * 21.23 = \mathbf{0.1458} ,$$

sőt csonkítással számolva

$$54.06 - 2.53 * 21.23 = \mathbf{0.3481}$$

már nagyon pontatlan eredményeket kapunk!
Eddigi "legdurvább élményem" a következő:

Egyenletrendszerek

Oldjuk meg az alábbi két egyenletrendszert (külön-külön), a legegyszerűbb "kifejezem-visszahelyettesítem" módszer is jó:

I.)
$$5.0002 \cdot x - 3.7342 \cdot y = 12.1226$$
$$4.9997 \cdot x - 3.7339 \cdot y = 12.1224 \,,$$

II.)
$$5.0002 \cdot x - 3.7342 \cdot y = 12.1226$$
$$5.0004 \cdot x - 3.7344 \cdot y = 12.1228 \,.$$

Vegyük észre, még ha nem is állunk neki a megoldásnak, hogy a négy egyenlet együtthatói alig (pár tízezredben) térnek el egymástól, sőt I.) és II.) első egyenletei teljesen megegyeznek. Várható tehát, hogy a gyökeik (megoldásaik) is alig különböznek egymástól ... . Több évben adtam fel házi feladatnak I.) -et a lányoknak és II.) -őt a fiúknak. Rendszeresen legalább annyiféle végeredményt hoztak ki, amennyi az osztálylétszám!

A pontos végeredményt a Megoldások részben ismertetjük (nem akarjuk elvenni a lelkes Olvasók sikerélményét), de annyit már most elárulunk, hogy I.) és II.) pontos gyökeinek eltérése tíznél is nagyobb!

Vagyis az adatok (egyenletek együtthatói) eltérése több mint *tízezerszeresére* nőtt-robbant fel! Ugyanez a veszély áll fenn általában minden számításban, tehát ne röstelljük 4-6 tizedesjegy lekörmölésével a részletszámolások hibáit a lehető legkisebbre csökkenteni!

A fenti I. és II. egyenletrendszerek (és hozzájuk hasonlók) alaposabb vizsgálata végre matematikai magyarázatot ad egy több évezredes tapasztalatra.

Szabászolló

Miért nehezebb egy hosszú olló végén vágnunk, mint az "elején", a forgástengelyéhez közel? Fizikusok ezt a forgatónyomatékkal magyarázzák: a papír oldalán nagy az erőkar, tehát nálunk nagy az erő ... . De egy matematikus nem ijed meg egy papírtól! Ha lassan, egyenletesen mozgatjuk az ollót és alaposan megfigyeljük mozgását,akkor észrevehetjük, hogy a nagyra nyitott olló a forgástengely közelében vág, mégpedig lassan. Az olló végei pedig akkor kezdenek összeérni, amikor az olló már majdnem becsukódott, ekkor viszont (hosszában) nagyon gyorsan vág. Tehát az olló végeinél már nagyon (természetellenesen) lassan kellene összecsuknunk szárait. Ekkor az olló két éle, mint két egyenes nagyon kicsi szöget zár be, majdnem párhuzamosak. Márpedig ha ilyen egyenesek szögét picit is változtatjuk, metszéspontjuk - ahol éppen az olló élei vágják a papírt - nagyot "ugrik". Ezt nem csak szemléletünk miatt mondjuk, hanem az fenti I. és II. egyenletrendszerek megoldásainak összehasonlításából! Ugyanis középiskolában tanuljuk: egyenesek egyenletei éppen I. és II. -höz hasonló egyenlőségek, a metszéspontok pedig éppen az egyenletrendszerek megoldásai.

Hasonlóan emiatt remeg kezünkben egy hosszú bot vége is: kezünk apró mozgását nagyítja fel a bot másik vége.

A számítások pontosságára visszatérve még két esetet idézek fel röviden.

Fabatka

Kiszámítandó a következő képlet:

$$\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)^3+\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^3 \quad .$$

A pontos érték **0.5**, azonban a törtek és hatványok két tizedesjegyre történő kerekítése után 0.48 és 0.51 közötti értékeket kaphatunk, attól függően, hogy a képletet mekkora részekben számoltatjuk ki a számológéppel.

Az eredeti feladat [SzI12] és [SzI13] -ban jelent meg, és megtalálható honlapomon is az alábbi címen: http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/cikkValszaMese+.doc .

Centrifuga

Egy centrifuga fordulatszáma 2850/*perc, a forgó henger belső átmérője* 40*cm. Hányszorosa a henger falán levő vízcsepp centripetális gyorsulása a nehézségi gyorsulásnak?*

Egy lehetséges számolás (minden lépésben legalább két tizedesjegyre kerekítéssel):

f = 2850/perc = 47.5/sec, T = 1/f ≈ 0.02 sec,

$\omega = 2\pi/T \approx 2\cdot 3.1416/0{,}02 = 314.16$ /sec,

$a_{cp} = \omega^2\cdot r = 314.16\cdot 314.16\cdot 0.2 \approx 19739.30\ m/s^2$,

$a_{cp}/g = 19739.30/9.81 = 2012.16$ -szerese.

A hivatalos (pontos) eredmények: f = 47.5/sec, ω = 289.3/sec, $a_{cp} = 17796.58\ m/s^2$ = 1814.13 - szerese a nehézségi gyorsulásnak.

A tanulság

Ha már számológépet veszünk kezünkbe, akkor ne röstelljük a gép által kiszámolt tizedesjegyeket felhasználni további számolásainkhoz: legalább 4 vagy 6 tizedesjegyet olvassunk le: írjunk le papírra és billentyűzzük be, vagy még inkább használjuk a gép memóriáját a szám megjegyzéséhez és újbóli előhívásához, felhasználásához.

Néha szükségünk lehet még nagyobb pontosságra: a gépek általában 8-10 jegyet mutatnak ki, sőt legtöbbjük 11-13 jegy pontossággal számol "belül". A gép "belső" pontosságát ki is tudjuk próbálni. Számoljuk ki például a következőt:

`1 / 3 - 0.3333... =`

annyi **`3`** jegyet megadva amennyit csak a gép elfogad. A gép válasza éppen a belső memória és a kijelző *különbsége* lesz, vagyis éppen a kijelzőn éppen már nem látható számjegyek!
A Windows beépített számológépe a fenti számolás után a következőt mutatja :

`3,3333333333333333333333333333333 e-31`

Ezt *tudományos alak* -nak nevezzük: az **`e`** (exponens) betű előtt álló számot (*mantissza*) meg kell szorozni 10^{-31} -el, vagy egyszerűbben: a tizedesvesszőt/pontot kell 31 hellyel jobbra vinnünk:

`0,000...3333333333333333333333333333333`

(A 10^{-31} hatvány kitevőjét, -31 -et *karakterisztiká* -nak nevezik.) A fenti tizedesvessző után 30 db nulla után következnek a 3 jegyek. Ez annyit jelent, hogy *ez* a számológép 32 jegyet mutat ki és "belül" még további 32 jegyre számol, vagyis **64** tizedesjegyre pontos, a hiba kb. 10^{-64} .

3. Százalékszámítás

Egy egész külön fejezetet szenteltünk egy egyszerű arányossági feladat-típusnak, hiszen egész életünket átszövi, nem csak a leárazásoknál, hanem minden pénzügyi problémánkban (még a legapróbbakban is) foglalkoznunk kell vele!

A *százalék* szó nem csak rímel a **századrész** szóra, hanem *ugyanaz*: az eredeti mennyiség x százaléka *pontosan* ennek a mennyiségnek az x **-század része**! Maga a % jel is a törtvonalból és a nevező (100) két nullájából áll! (Angolul, vagy inkább "amerikaiul" *percent* [ami valójában latin], azaz minden $ után ennyi cent, vagyis ennyi századrésze.)

Nagyon fontos, hogy éppen mekkora az eredeti mennyiség, amihez viszonyítunk: ugyanakkora százalékos arány nagyobb kiindulási mennyiség esetén nyilván nagyobb! A legtöbb tévedés bizony éppen amiatt van, mert erről az egyszerű összefüggésről feledkezünk meg!

Autó, benzin, ...

a) *Egy autó árát először felemelték 10% -kal, majd leszállították 10% -kal. Most olcsóbb vagy drágább az eredeti árhoz képest?*

b) *A benzin árát először csökkentették 10% -kal, utána felemelték 10% -kal. Most olcsóbb vagy drágább az eredeti árhoz képest?*

Megoldások:

a) A második 10% már a felemelt árnak 10/100 -ad része, tehát tényleges értékben *nagyobb*, mint az első 10% , ami az emelés volt. Ha pedig az árcsökkenés nagyobb az áremelésnél, akkor a termék ára végülis *csökkent*.

b) A második 10% már a csökkentett árnak 10/100 -ad része, tehát tényleges értékben *kisebb*, mint az első 10% , ami a csökkentés volt. Ha pedig az árnövelés kisebb az árcsökkentésnél, akkor a termék ára végülis *csökkent*.

Hogyan? *Mindkét* esetben jól jártunk? Ha a fenti érvelések nem teljesen győztek meg minket, akkor számoljuk ki a megszokott képletekkel:

$$A\cdot(1+10/100)\cdot(1-10/100) = A\cdot 0.99 \;,$$

és

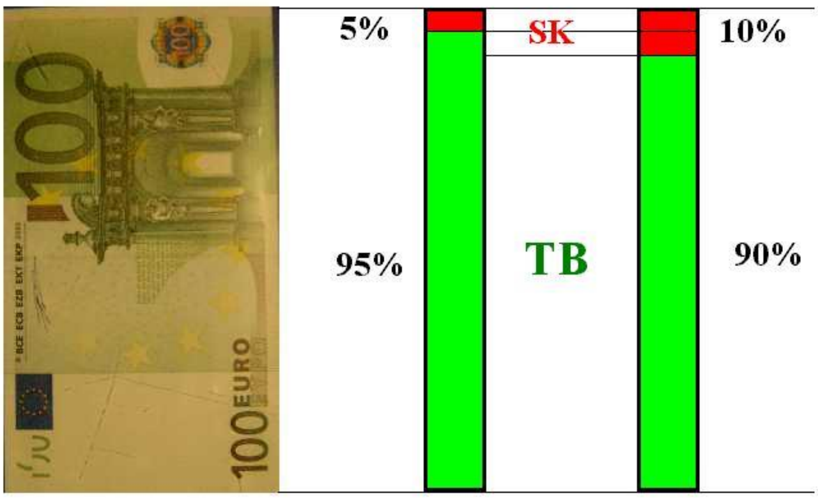
$$B\cdot(1-10/100)\cdot(1+10/100) = B\cdot 0.99 \;.$$

Érdemes volt a képleteket felírnunk: egyrészt a szorzás kommutatív, másrészt csak 1% -kal jártunk jól, egy liter benzinnél ez mindössze 4Ft. Bocsánat, egy 5 milliós autónál ez már ötvenezer Forint! (De a maradék 99% is nagyobb ...)

További egyszerű (gyakorló) példákat még látunk később, most egy pénztárcába vágó példát vegyünk a mindennapokból (2008 körül történt).

TB támogatás

A sajtó szerint az orvosság TB -támogatása csak 5% -kal csökkent, én mégis többszörösét fizetem eddigi gyógyszereimnek!?



Hát igen, ama bizonyos *támogatás* csökkent 95% -ról 90% -ra (a gyógyszer eredeti, méregdrága árához viszonyítva), tehát az *én*-

általam fizetendő maradék rész 5% -ról nőtt 10% -ra. Ez valóban **kétszeres áremelkedés részemre** !

Az Olvasót nyugodtan "megvigasztalhatjuk": legközelebb csak a 10% fog emelkedni 15% -ra, vagyis akkor már "csak" másfélszeresére változik a gyógyszer általunk fizetendő ára! Sőt, ha utána még csökken a támogatás 85% -ról 80% -ra, akkor a mi részünk már valóban csak alig változik: 15% és 20% között tényleg nem sok a különbség (4/3 -szoros).

Hoppá! Ha a fizetendő összeg emelkedik, akkor *annak arányos részei* is lehetnek nagyok! Ez már csak egy példán lesz világos! Tehát legyen a gyógyszer eredeti 10000 Ft.

95%- 5% megosztásnál a TB fizet 9500 Ft-ot, én 500 Ft-ot,
90%-10% megosztásnál a TB fizet 9000 Ft-ot, én 1000 Ft-ot,
85%-15% megosztásnál a TB fizet 8500 Ft-ot, én 1500 Ft-ot,
80%-20% megosztásnál a TB fizet 8000 Ft-ot, én 2000 Ft-ot,
stb.

Világos, nem? Az Állam fokozatosan (mindig) 5% -kal csökkenti részét, ez nekem **minden alkalommal ugyanannyi** pluszkiadást jelent, a példában +500 Ft-ot! Ha a gyógyszer 10ezer Ft helyett 100ezer Ft -ba kerül, akkor ugyanez a példa, csak mindenhol egy 0 -val több.

Ismét beleestünk a szokásos csapdába: *Nagyobb mennyiség ugyanakkora része (százaléka) nagyobb!*

Megjegyzés: a feladat elején említett "5% -os TB támogatás csökkentés" egészen pontosan a gyógyszer *eredeti* árához viszonyított 5% , a TB kassza eddigi (saját) kiadásai $90/95*100\approx$ $\approx 94,74\%$ -ra csökennek, vagyis valójában (kicsit) *több*, mint 5% -ot takarít meg!

Adó

A "sötét" középkorban adó gyanánt tizedet és kilencedet szedtek. Ez hány % SZJA adónak felel meg? Mennyi is volt 2008 -ban, és most (2012-ben) mennyi?

Tized = 10% , **kilenced** = a maradék 9/10 rész kilencede = az eredeti 10%-a, ez összesen **20%**.

2008 -ban a legtöbb fizetés után 30-40% adót fizettünk, ez most (2012-ben) csak 16% . Azonban erre jönnek még különböző járulékok, sőt a vásárolt termékekre és szolgáltatásokra megint 5 - -25% ÁFA -t is fizetünk ... .

Kilencedik

Az alábbi újsághír fejlécében "*minden kilencedik*" emberről olvasunk, a cikk belsejében pedig 9% -os szavazóbázisról:

> **Minden kilencedik ember szavazna a [redacted]ra**
>
> ***Budapest*** *(mti)* – A Progresszív Intézet 2500 fő megkérdezésén alapuló közvélemény-kutatása szerint a társadalom egytizede szimpatizál a [redacted], 9 százalék szavazna is rá, ha párt lenne. Úgy vélik, a társadalomban van nyitottság a szélsőséges mozgalmak irányába, nem fedezhető fel félelem a politikai extrémitásoktól. Az emberek többségének egzisztenciális félelmei vannak.

Nomármost: 9% = 9/100 , míg a "*minden kilencedik*" értéke 1/9 . Könnyen ellenőrizhető, hogy $1/9 \neq 9/100$, pontosabban $1/9 \approx 11.1\%$, vagyis az újságíró több mint 2% -ot tévedett! Sőt, ha a cikkben említettek szerint "*a társadalom egytizede szimpatizáns*", akkor a +2% szavazóbázis kikből is áll?

(Hasonló problémát elemeztünk a legelső, "Minden ötödik" problémában a 8. oldalon.)

No, most jön a **Feketeleves:**

Hitel

A képen látható hirdetés valódi, csak a cég nevét és telefonszámát takartuk le! A hirdetés szövege: *"Példa: 90.000,-Ft kölcsön esetén a heti törlesztés 3861Ft 39 hétre."*

Hány százalék kamatot fizetünk a futamidő végére? A kapott értéket számoljuk át éves kamatszintre is! (A pénzintézetek az éves kamat 365 -öd részét számolják napi kamatnak, vagyis az éves kamat időarányos részét.)

Összesen befizetünk 39·3861 = **150 579 Ft** -ot, ez a kapott összegnek

150 579 / 90 000 · 100 = **167,31%** -a,

több mint másfélszerese, de csak röpke 39 hét alatt! Ez éves szinten

167,31 · 52/39 = **223,08 % !**

Az eredeti hirdetésen *" THM = 227%-tól 438%-ig"* volt, vagyis a fenti példánál sokkal "durvább" uzsorakölcsönöket is reklámozott a cég !

Stadionok

www.metropol.hu 13
2011. NOVEMBER 15. KEDD

Számok szerint

30

százalékos volt átlagosan a magyarországi futballstadionok kihasználtsága a 2009–2010-es szezonban. Ezzel – akárcsak a többi mutatót tekintve – Európában sereghajtónak számítunk. Noha Romániában csupán 39 százalékos a kihasználtság, Csehországban és Lengyelországban ez a mutató 46, Ausztriában pedig 63 százalék. A legjobb arány az angol (92 százalék), a holland (90) és a német (88) stadionokra jellemző.

2920

néző látogatott ki átlagosan a magyarországi meccsekre. Németországban 42 500, Angliában 34 151 az átlagos nézőszám, de Romániában és Csehországban is csaknem ötezren, Ukrajnában pedig 8950-en kíváncsiak egy-egy meccsre.

9733

fős a magyar stadionok átlagos kapacitása. Nem sokkal nagyobbak a cseh (10 641 fő), a lengyel (11 407), az osztrák (12 497) és a román (12 595) létesítmények, de jobb kihasználtsággal működnek. A legnagyobb stadionok Németországban (48 295 fős átlagos befogadóképességgel), Olaszországban (40 913) és Spanyolországban (38 748) vannak.

57

év a magyar stadionok átlagéletkora. A legidősebb stadionok Skóciában (80 éves átlagéletkor), Angliában (71) és Olaszországban (65) működnek. A skála túlsó végén azok az országok találhatók, amelyek a közelmúltban futball-Eb-t rendeztek: Ausztria (35 év), Svájc (32), Hollandia (25) és Portugália (21).

Az újságcikk hemzseg a sok számtól. Például a magyar stadionok kihasználtsága csak 30% míg a németeké 88% !
De az átlagos nézőszám nálunk 2920 fő, őnáluk 42500 fő, a stadionok mérete itt 9733 fő, ott 48295 fő. Tehát ne csodálkozzunk azon, hogy stadionjaink alig vannak kihasználva: mi *aránylag* nagyobb stadionokat építettünk, feleslegesen, hiszen aránylag kevesebb nézőnk jár meccsekre!

A további **gyakorló példák** szintén megtörtént esetek, csak nem minden esetben másoltam ide az újságcikkeket. A válaszokat a könyv végén, a **Megoldás** részben találjuk meg.

ÁFA

2008 -ban a termékek 15%-os ÁFA -ja 20%-ra módosult, 2012. januárjában pedig 25%-ról 27% -ra. Nekünk (fogyasztóknak) ez bruttó mekkora áremelkedést jelent?

Szeptember, te drága!

Áremelések sorozatát indítja el az áfanövekedés

Budapest *(mti)* **– A 15 százalékos áfakulcs megszüntetésével minden, eddig ide sorolt termék ára emelkedik szeptember 1-jével, mivel 20 százalékos lesz a fogyasztási adó kulcsa.**

Emellett drágább lesz a vonat- és a buszjegy, továbbá a fogyasztási adó növekedése miatt az alkoholos italok és a dohánytermékek is. A gáz ára augusztus 1-jén emelkedett ugyan – átlagosan közel 30 százalékkal –, de szeptember 1-jétől újabb 5 százalék jön rá, az áfaátsorolás miatt. De a gáz mellett számos más termék is drágul péntektől. Az áfatörvény megszűnő, a 15 százalékos kulcs alá sorolt termékeket és szolgáltatásokat soroló melléklete az élelmiszerek közül a hússal kezdődik. (A továbbiak a 2. oldalon, Termékek... címmel.)

10% után 10%

(Sajnos) gyakran halljuk: "... *most 10% az áremelés, a következő hónapban újabb 10% lesz, vagyis összesen 20%* ". Pontosan mennyi?

MÁV

2007. január 17-én a MÁV emelte a jegyárakat 16%-kal, márciusban ismét 17% -kal. Ez összesen mekkora áremelés?

Gáz

Ha augusztus 1-jén 30% -kal majd szeptemberben újabb 5% -kal növekszik a gáz ára, akkor összességében mennyivel?

Kamatadó

Ha 1millió Ft betétünk évi 5% kamata után 20% kamatadót kell fizetnünk, akkor ez mekkora kiadás nekünk?
(2006. szeptember 1. újságcikk alapján.)

Adóbevallás

A 2002. évi adóbevallásnál évi 1 050 000 Ft felett a többlet 40% -án felül még 267 000 Ft -ot kell adózni. Mekkora havi jövedelem esetén lett a jövedelem 30 % -a az adó ?

Nyugdíj

2006. évben volt parlamenti vita: Melyik jobb a nyugdíjasoknak: a 4 év kormányzati ciklus végére 13. havi egyszeri nyugdíj, vagy 4% azonnali emelés?

Szuperbruttósítás

Lényege: eredeti fizetésünk helyett annak 27%-kal növelt értéke (amit nem is láttunk) után adózunk, 2009 -ben 17% -ot. Ezt az összeget természetesen eredeti fizetésünkből vonják le. Mennyi az adó, eredeti fizetésünkhöz képest?

Vásárlás

Igaz -e, hogy árleszállításkor "*minnél többet vásárolunk, annál többet spórolunk*" ? (Válasz a könyv végén.)

Birtok eladás 1877 -ből

A *Szentesi Lap* 1877. december 16-i számában jelent meg az alábbi hirdetés:

Szentesi Lap 1877.dec.16

Részletfizetés esetén mennyi az éves kamat, és mennyit fizetünk összesen? (A részletes megoldás a *Haladvány Kiadvány* internetes kiadványban olvasható el: **Hujter Mihály**: *Egy régi szentesi matekpélda*, http://www.math.bme.hu/~hujter/110930.pdf .)

Cipó és kenyér

Egy cipó 25%-kal kisebb tömegű, mint egy fehér kenyér, ráadásul 20%-kal drágább. Igaz viszont, hogy a cipó az utolsó morzsáig elfogy, míg a kenyér 15%-a mindig ránkszárad. Ugyanakkora fogyasztást feltételezve hány százalékkal költünk többet, ha cipót veszünk, mint ha kenyeret?
([K99] KöMaL 1999/dec.544.old.,C.560 feladat)

20% -nak 80% -a

"*Tanár úr, olyan nincs is*!" - hallottam több középiskolástól és egyetemistától is, nem csak a Móricka-viccben.
Tényleg: van-e ilyen? Ha van, mennyi? (A megoldást hátul megtaláljuk.) Ilyen feleletek után szoktam megkérdezni: "*Megbukhat-e egy 30 fős osztály 50% -a?*" Csak azért kérdezem, mert már erre is felelték, hogy "*Tanár úr, nem is vagyunk annyian*!"

Százalékszámítással kapcsolatos még az 5.fejezet "**Kicsinyítés, nagyítás**" problémája is a 71. oldalon.

4. Logika

"Nem ezt mondtam! De! "

Bizony, egy kijelentés (állítás) értelmét akkor értettük meg igazán, ha a tagadását is megértettük, azt is meg tudjuk fogalmazni.

Próbálok

Gimnazista lányunk valamit hosszasan mondogatott hangosan, kíváncsiak voltunk: leckét tanul a suliba vagy szerepét a diákszínházi humoros előadásra. Bekopogtunk tehát:

- *Tanulsz, kislányom?*
- *Próbálok* - hangzott a tömör válasz.

Megnyugodtunk tehát, hogy végre nem a suli kötelező leckéjét magolja, de tévedtünk: tanulni szeretett volna, de az autók zajától nem sikerült ...

Ez a párbeszéd is mutatja, hogy hiába egyértelmű a kérdés és a válasz (már annak, aki mondja), de a másik félnek már homlokegyenest mást jelenthet.

Kovács Klára (ld.[KK]) értelmes nebulót korrepetált hosszú hónapokig, de a fiúcska a suliban mégsem tudott jó eredményt elérni. Egyszer, beszélgetés közben derült ki, hogy a diák nem érzi a következő kijelentések között a különbségeket:

- *Ma nem sütök palacsintát.*
- *Ma nem palacsintát sütök.*
- *Nem ma sütök palacsintát.*

Mindössze csak a *nem* szócskát kellett volna összeragasztani az utána következő szóval,a többit már csak zárójelben mondjuk:

- *Ma* <u>nem sütök</u> *(palacsintát)*.
- *Ma* <u>nem palacsintát</u> *(sütök)*.
- <u>Nem ma</u> *(sütök palacsintát)*.

Ez ugyan csak nyelvi, nem matematikai probléma, de az okfejtések, tárgyalások *előtt* a két félnek meg kell értenie egymást, ezután jöhet a lényeg. A matematika éppen a logikus (higgadt) gondolkodás tudománya!

Ha ... akkor ...

Ha esik az eső, *akkor* biztosan nedves a fű (persze, persze nem a melegházról van szó). De *ha* nedves a fű, *akkor* még *nem* biztos, hogy eső volt, hiszen hajnali harmat is lehetett, feleségemnek van saját öntözőkannája, a Blöki is járhatott itt, ... , sok minden elképzelhető. Képletesen:

$$\textbf{eső} \quad \rightarrow \quad \textbf{nedves}$$

de

$$\textbf{eső} \quad \nleftarrow \quad \textbf{nedves},$$

vagyis a következtetés *visszafelé* (általában) nem igaz! Pontosabban: visszafelé a következtetés helyesen így hangzik:

$$\textbf{nem eső} \quad \leftarrow \quad \textbf{nem nedves},$$

vagy szokásos írásmóddal:

$$\textbf{nem nedves} \quad \rightarrow \quad \textbf{nem eső}.$$

Hasonlóan: délben harangoznak, de *nem csak* délben hallhatunk harangszót:

$$\textbf{dél} \quad \rightarrow \quad \textbf{harangozás}$$

de

$$\textbf{dél} \quad \nleftarrow \quad \textbf{harangozás},$$

a helyes megfordítás pedig

nem dél ← nem harangozás,

vagy szokásos írásmóddal:

nem harangozás → nem dél.

A mindennapi életben sokszor (saját bőrünkön) tapasztaljuk, hogy nem mindegy: miből következik mi, ki/mi az ok és mi az okozat. Ez a legtöbb veszekedés (bírósági ügy) alapjai is!

A később következő "Adóellenőr" feladat előtt, bemelegítésképpen foglalkozzunk "csak" magán- és mássalhangzókkal, páros és páratlan számokkal. Fejben nehéz számolni, ezért papírdarabokra (kártyákra) írjuk fel az adatokat.

Magánhangzók

Játsszunk most egy kicsit kártyákkal, a két szabály nagyon egyszerű:

i) a kártyák egyik oldalán betű, másik oldalán számjegy van,
ii) a magánhangzók hátodalára páros számot írok.

Az asztalon négy kártyát látok

$\boxed{U}$ $\boxed{X}$ $\boxed{7}$ $\boxed{6}$

Ellenőrzéskor melyiket kell megfordítanom, hogy az esetleges hibát / csalást felfedezzem?

Nyilván nem az U és X betűk vagy a 6 és 7 számjegyek a lényeg a feladatban, hanem az, hogy magán- vagy mássalhangzót, páros vagy páratlan számot kell megfordítanunk!?

a) a magánhangzót (U) biztosan megfordítjuk, ezzel ellenőrizzük az *ii)* feltételt,

b) a mássalhangzót (X) biztosan *nem* fordítjuk meg, hiszen sem az *i)* sem az *ii)* pont nem követel meg semmit a mássalhangzók hátoldaláról,

c) a 7 *páratlan* szám, szám, ellenőriznünk kell, hogy véletlenül nem magánhangzó hátoldalára került-e,az *ii)* feltételt megszegve,

d) végül: megfordítsuk-e a 6 -ot, vagyis a páros számot? Az *ii)* feltételben ugyan szó van páros számokról, de csak mint *okozat*ról. Márpedig egy okozat jellegű jelenségnél (mint az előző oldalakon már többször láttuk) *lényegtelen*, hogy mi okozta! Gondoljuk csak meg: az *ii)* feltétel megengedi a páros számokat mind a mássalhangzók mind a magánhangzók hátoldalán is (utóbbinál kötelezően előírva). Tehát a páros számokat (mint pl. a 6) nem kell megfordítanunk !

Formális jelöléseinkkel:

magánhangzó → páros szám

de

magánhangzó ↚ páros szám,

a helyes megfordítás pedig:

nem magánhangzó ← nem páros szám

vagyis

nem páros szám → nem magánhangzó,

tehát

páratlan szám → mássalhangzó.

A mostani kártyajáték mintájára a kedves Olvasó próbálja megoldani az alábbi, a valós életből vett feladatot:

Adóellenőr

A 2222.évi adószabályok szerint a kis keresetűeket (havi Egymilliárd Euró alatt) adókedvezmény illeti meg. Ön, mint adóellenőr, mely adóbevallásokat fogja ellenőrizni: a kis vagy nagy keresetűeket, az adókedvezményt igénybe vevőket vagy az igénybe nem vevőket? (A megoldást a könyv végén ismertetjük.)

Létezik és minden

Még nehezebb a feladatunk, ha nem egy konkrét esetről beszélünk, hanem általában, ráadásul nem is csak "*sok*" -ról, hanem éppen "*mindegyikről*". Le kell szögeznünk az elején, hogy (hivatalosan) a "*mindegyik*" szó valóban azt jelenti: *kivétel nélkül*, tehát már egyetlen kivétel (ún."ellenpélda") is már megcáfolja (megfúrja) a "minden" -re vonatkozó állításunkat! A "**minden** (kivétel nélkül)" és "**létezik** (legalább egy)" szavakat hívjuk összefoglaló néven a matematikában **kvantoroknak**. Hogy a nehéz témát könnyebben megértsük, néhány egyszerűbb példával kell kezdenünk.

i) "*Minden labda pöttyös.*" Ennek ellenőrzése roppant egyszerű: végignézzük a raktárkészletet: "*Van-e nempöttyös labda?*"

ii) "*Minden labdában van fehér pötty.*" Megint végignézzük az összes labdát és azok pöttyeit, de most *nemfehér* pöttyök láttán izgulunk: ha a vizsgált labda összes pöttye nemfehér, akkor lesz ez a labda rossz, szaknyelven ellenpélda.
Hasonlóan a "*minden kollégának van piros tolla*" állítás tagadása "*van olyan kolléga, akinek minden tolla nempiros*".

iii) "*Minden nő életében van egy olyan pillanat, amikor olyat szeretne tenni, amit nem szabad.*" No, ez már matematikailag bonyolult feladat, pedig én megbízom női családtagjaimban.

Vezessük be a **minden** (kivétel nélkül, összes) és **létezik** (legalább egy, van olyan) szavak (kvantorok) rövidítéseként a

$$\forall \text{ és } \exists$$

jeleket. Ekkor a fenti i) és ii) mondatok és tagadásaik szerkezete a következő:

$$\forall \textit{ labda } \underline{\textit{pöttyös}} \ ,$$

tagadása

$$\exists \textit{ labda } \underline{\textit{nempöttyös}} \ ,$$

illetve

$$\forall \textit{ labdában } \exists \textit{ pötty } \underline{\textit{fehér}},$$

és

$$\exists \textit{ labdában } \forall \textit{ pötty } \underline{\textit{nemfehér}} \ .$$

Írjuk fel a iii) mondat szerkezetét is:

$$\forall \textit{ nő} \ldots \exists \textit{ pillanat} \ldots \underline{\textit{nem}} \textit{ szabad} \ ,$$

és máris rögtön látjuk: szerkezete teljesen megegyezik a ii) mondat szerkezetével: "∀... ∃..." , tehát tagadásakor is hasonlóan kell megcserélnünk a ∀ és ∃ jeleket:

$$\exists \textit{ nő} \ldots \forall \textit{ pillanat} \ldots \underline{\textit{szabad}} \ ,$$

vagyis teljes mondatban: "*Létezik olyan nő, aki minden pillanatban olyat szeretne tenni, amit szabad.*"

Érdemes észrevennünk, hogy a fenti példák szerkezetében a ∀ és ∃ jelek a mondat legelején állanak, tetszőleges sorrendben és mennyiségben, és a mondanivaló csak a mondat legvégén van csak:

$$\Phi \ = \ \forall x \ \exists y \ \forall z \ \exists w \ \ \underline{\textit{valami}} \ .$$

Az állítások ilyen alakját **prenex** (előzetes kapcsolat) **normálformának** hívják, és tagadásuk roppant egyszerű:

Normálforma tagadása

Az ilyen alakú állítások tagadásához az összes ∀ és ∃ jelet ki kell cserélni a másikra (a szövegszerkesztő "keresés és csere" funkcióját óvatosan kell használnunk!), és a legvégén levő *valamit* kell tagadnunk:

$$\underline{\textit{nem } \Phi} \ = \ \exists x \ \forall y \ \exists z \ \forall w \ \ \underline{\textit{nemvalami}} \ .$$

A matematikai logika egyik alapvető tétele szerint *minden* állítás felírható prenex normálformában, könyvünk kereteit ez sajnos már meghaladja.

Ezek alapján a következő zagyva mondat tagadása is gyerekjáték (megoldás a könyv végén):

iv) "*Minden adózónak minden beadott papírjának van olyan oldala és annak olyan sora, amelyben szereplő összes számjegy mindegyike kilóg a négyzetecskéből valamelyik irányba (a négy közül).*"

Ugye milyen egyszerű? (Vagy legalábbis gondolkodás nélkül, gépiesen megoldható!) Ezek a után a "*valamelyik kabátom valamelyik zsebében ...*" kezdetű mondatok már nem okozhatnak nehézséget a kedves Olvasónak! És ugye azt is elhiszi ezek után, hogy miért mondja vonat ablakából kitekintő matematikus (filozófus és fizikus társainak) valóban komoly képpel: "*legalább egy tehén legalább egyik oldala lila*", tagadását már az Olvasó gyermekei is tudják, ugye?

Egyetemistáknak javasoljuk, hogy néhány tanult definíciót és tételt (pl. L'Hospital szabály, sorozat határértéke) írjanak fel prenex normálformában, és tagadásukat ez alapján adják meg!

Azonban nem csak egyetemistáknak tanácsoljuk, hogy a következő szinonímákat nehogy összekeverjék, nem csak az iskolapadban hanem az életben is (súlyos) következményeket okozhatnak: *legalább, több mint (nagyobb), legfeljebb, kevesebb (kisebb), negatív, nempozitív, pozitív, nemnegatív, legnagyobb, maximális, legkisebb, minimális, ...*

Az alábbi feladatot csak gyakorlásképpen (pihentetésként) írom le, megoldását a könyv utolsó fejezetében találjuk.

Szárnyas állatok

Ha minden repülni tudó állatnak van szárnya, és minden madárnak szárnya van, akkor a formális (matematikai) logika szabályai szerint melyik állítás igaz biztosan?

(A) Minden szárnyas állat tud repülni
(B) Minden madár tud repülni
(C) Néhány szárnyas tud repülni
(D) Minden szárnyas állat madár
(E) Több is igaz a fentiek közül
(F) Egyik sem igaz a fentiek közül

(Megoldás a könyv végén.)

Térjünk vissza a "mindennapok gondjaihoz" !

Szemben

Kisfiam szeret autózni, szemfülesen észre is vette a hosszú utakon: *"Miért jön több autó szembe, mint ahány megelőz bennünket?"* Hozzá kell tennem, hogy öreg Ladámmal lassan, öregesen szoktam "hajtani". **Vonattal** sokkal egyszerűbb lenne a feladat, mert ugye (általában) egy sínpár lévén nem is jön szembe vonat. Autóval is hasonló a megoldás!

Ugyanis a velünk egy irányba haladó járműveknek nagyjából ugyanannyi a sebessége, legfeljebb 10-20% az eltérés, az egész kocsisor majdnem folyamatosan halad Budapestről Szombathelyre. A bennünket megelőző gépkocsik sebessége körülbelül 10 - 20 km/óra -val több a miénknél. Képzeljük el, hogy repülőről tekintjük az egész folyamatot: az aránylag gyorsan haladó autónk mellett a kb. négyórás úton, hozzánk képest 10 - 20 km/óra sebességgel (aránylag lassan) haladnak el az autók, ez pedig kevés autónak adja meg a bennünket leelőzés lehetőségét!

Mi a helyzet a velünk szemben jövő forgalommal? Akármilyen sebességgel megyünk is, *minden* szembejövő járművel találkozunk, kivétel nélkül. Vagy, ha ismét repülőről nézzük magunkat (gondolatban), akkor mind a mi autónk mind a szembejövő forgalom sokkal nagyobb, 70-90 km/óra sebességgel haladunk, vagy ami a fizikus szemével ugyanaz: az álló kocsisorral szemben (viszonyítva) mi 150 -170 km/óra sebességgel száguldunk el, szintén a 4 órás autóút alatt.

Hasonló a következő, több mint százéves fejtörő, amit érdemes Mikszáth Kálmán ízes stílusában elolvasnunk:

"*Nos, hát mondja meg nekem, hogy ha Pozsonyból Brassóba mindennap két postakocsi közlekednék, Brassóból Pozsonyba pedig ugyanannyi, ha mármost föltesszük, hogy az út tíz napig tart, mennyi kocsival találkozik Ön útközben, míg Pozsonyból egy postakocsin ülve Brassóba ér ?* "

Mind a feladatot, mind a megoldást, mind ennek gyakorlati következményét (hiszen az egyik Horváth lány kérőjéről van szó) megtalálhatjuk **Mikszáth Kálmán:** *Különös házasság* című regényének 5.fejezetében ("*A talányok embere*") is, vagy ennek a könyvnek az utolsó fejezetében is, amit kedves Olvasónk éppen most a kezében tart.

Gyakran találkozunk az alábbi **vicc** poénjával és hasonlókkal. Logikusan gondolkodik-e a viccben szereplő autós ?


A NAP VICCE

Szemben

Rádiós közlekedési hírek:

– Figyelem, az M7-esen autózók figyelmét szeretnénk felhívni, hogy legyenek óvatosak, mert egy őrült a forgalommal szemben autózik Budapest felé.

Kovács meghallgatja a felhívást, majd felcsattan:

– Hogyhogy egy? Mind!

Ha a szavak jelentését és a következtetéseket nagyon szigorúan vesszük, akkor a "*mind*" szó minden autóra vonatkozik, vagyis Kovács saját magára is, ekkor pedig az egész mondat "*Mindegyik autós a forgalommal szemben autózik*" értelmét veszti, mert a forgalom éppen az autókat jelenti ...

Nem akarunk viccrontók lenni, inkább törjük a fejünket a következő, **megtörtént eseten**, és az alapján továbbcsiszolt feladaton. A feladatot *Pósa Lajostól* hallottuk.

Ikertestvérek

"*Nekem ma van a születésnapom, ikertestvéremnek holnap lesz.*" Ez nem meglepő, hiszen éjfél előtt és éjfél után sokan születnek, még ikertestvérek is.

"*Nekem ma van a születésnapom, ikertestvéremnek* holnapután *lesz.*" Még ez is megoldható, hiszen február 29. is csak szökőévben van: nem szökőévben születtünk, én február 28-án, testvérem március 1-jén. Amikor pedig a fenti dőltbetűs kijelentést tettem, éppen szökőév február 28. volt.

"*Nekem ma van a születésnapom, ikertestvéremnek* holnapután-után *lesz.*" Ennek megoldásával most nem terheljük a kedves Olvasót, a könyv utolsó fejezetében ismertetjük a megoldást.

A 10. fejezetben is sok probléma szól testvérekről, például a **Cotton gyerekek** probléma.

Végezetül egy logikai vicc a Napló újságból (2005.06.09.):

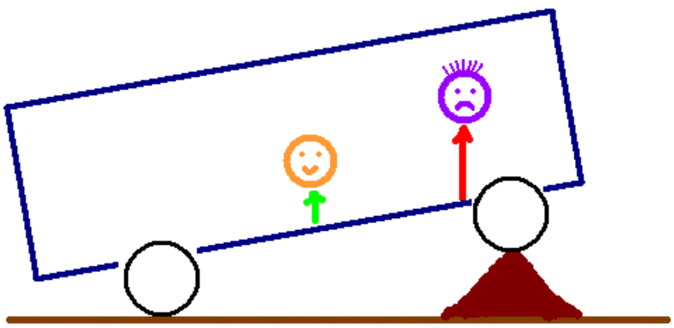
Vicc

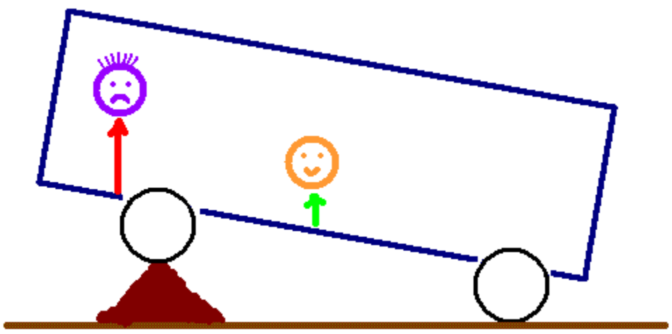
- Mit mondott Rákosi Mátyás ?
- Aki nincs velünk, az ellenünk van.
- Mit mondott Kádár János ?
- Aki nincs ellenünk, az velünk van.
- Mit mondott Grósz Károly ?
- Aki ellenünk van, az is velünk van.
- Mit mond a matematikus ?
- Aki még mindig velünk van, az nincs magánál.

5. Síkgeometria

Busz

Gyermekkoromban sajnos sok kellemetlenségem volt autóbuszos kirándulásoknál. Hárulról előre ültettek, nézhettem a tájat, de ott is rázott valamennyire. Elgondolkoztam, kisautóval kísérletezgettem: ha az elülső kerék zöttyen akkor az elöl ülők is "ugranak" egyet és a hátsó kerék a hátsó ülésekkel együtt alig mozdul. A hátsó kerék zöttyenésekor pedig a hátul ülők veszik észre az út egyenetlenségeit! Márpedig minden akadályon mind az első, mind a hátsó kerék is áthalad! Azonban a *középen* ülők szinte semmit sem éreznek, csak minden akadálynak legfeljebb a felét, sőt a rugózás miatt még annyit sem! Azóta engem mindig a busz közepén látnak diákjaim!



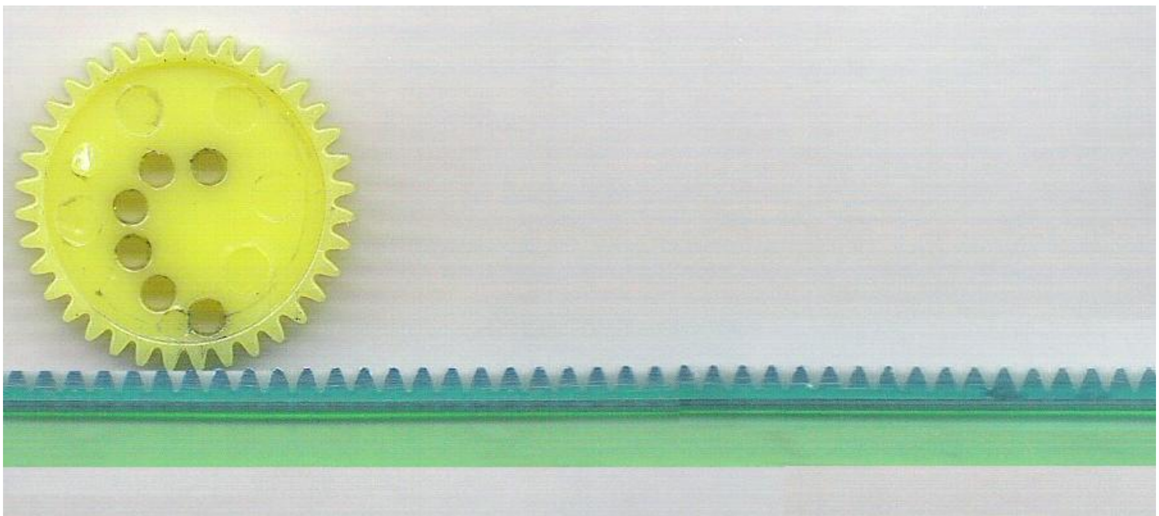


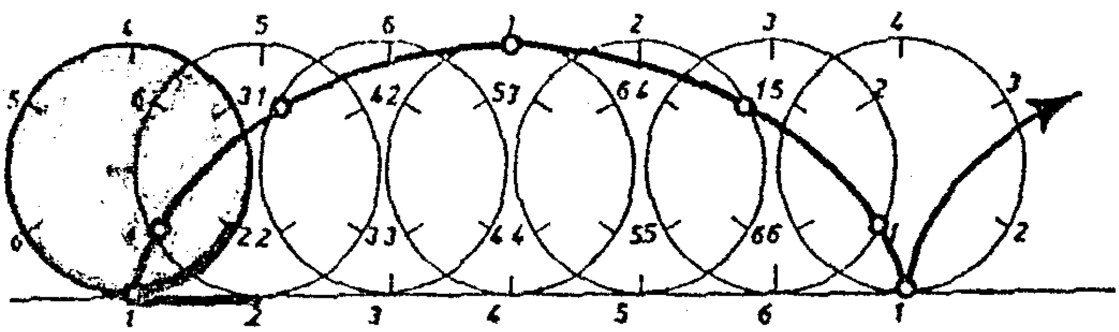
Úttesten

Arra még emlékszünk ugye, iskolában tanultuk, hogy egy ☺ pontból egy egyeneshez legrövidebben úgy jutunk el, hogy merőlegesen megcélozzuk a ☺ pontból az egyenest, és ez a merőleges irány mentén haladunk az egyenes felé. **Magyarul:** az *úttesten* a legrövidebb úton, a járdára merőleges irányban megyünk át mindig, és nem "srégvizavé".

Úttesten, forgalomban nem tanácsos elméláznunk, de például miért repülnek a sárdarabok az autók kerekeiről *hátrafelé*? Nem, nem azért kedves Olvasóm, hogy büntetést kapjunk ha nincs sárhányó a biciklin vagy az autón. Hanem azért, mert a sárdarabok *nem tudják a matematikát!*

Vegyük elő a játék- vagy papírboltban vásárolt, spirálrajzoló játékunkat (*spirográf*), a legszélső lyukba tett ceruza kirajzolja a kerék egy pontjára tapadt sárdarab "utazását", pályáját:





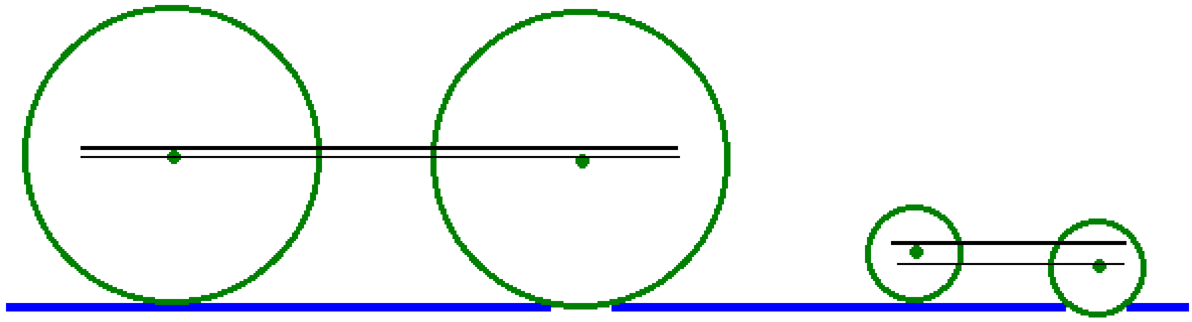
Ha alaposabban szemügyre vesszük a földről éppen mozgásba lendülő pont mozgását, észrevehetjük, hogy az *függőlegesen felfelé* indul el, majd a kerék haladási irányába, azaz előrefelé - várakozásunkkal ellentétben! Ez matematikailag is igazolható (nem minden egyetemista álma vizsgán). Ha pedig ez így van, akkor miért repülnek hátrafelé a sár- és kavicsdarabok? - mint legutóbb is láttam saját szememmel! Nos, valószínűleg azért, mert néha a kerekek kicsit megcsúsznak, és ekkor "söprik" hátrafelé az apró darabokat.

A kerék egy pontjának útját a levegőben, vagyis a ceruzánk kal papíra rajzolt görbét egyszerűen csak **cikloisnak** nevezik, a spirográffal rengeteg féle epicikloist és hipocikloist is rajzol hatunk (ciklus=kör, bi|cikli=két|kerék). A műszaki életben, elsősorban a mechanikában (mozgó szerkezetek tanulmányozásában) fontos szerepük van a ciklios görbéknek, a spirográf eredetileg nem gyermekjáték volt, hanem a mérnökök fontos segédeszköze.

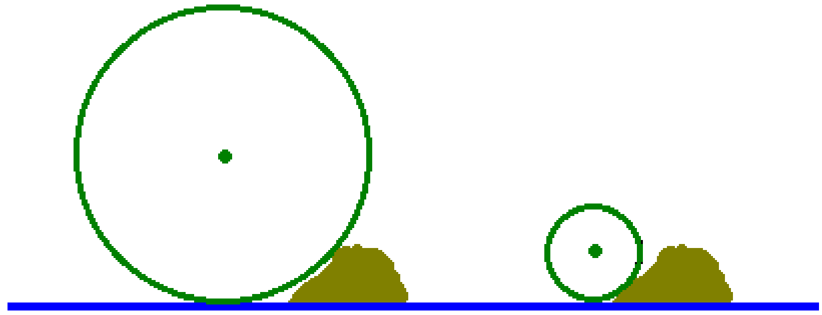
Nagy kerekek

Közismert, hogy nagy átmérőjű (sugarú) kerekekkel könnyebb a közlekedés, mármint egyenetlen talajon. Tolószékeken is nem a hátsó nagy, hanem az első kis kerekekkel van több és nagyobb zöttyenés, a rollert és felnőttbiciklit is össze tudjuk hasonlítani, gurulós bőröndökkel is gondosan kerülünk minden úthibát. Ennek oka egyszerű geometriai tény:

a nagyobb kerekek kevésbé süllyednek és szorulnak bele a lyukakba:



és a púpokra is könyebben felmásznak, azaz a lyukakból is könnyebben kimásznak:



Az már kevésbé ismert, hogy a kerekek (gumik) *szélessége* teljesen lényegtelen: sem a stabilitást nem befolyásolja (mert például az autó ugyanazon a négy ponton van alátámasztva), sem fékezéskor nem jelent semmi előnyt! Ez utóbbit már a fizika $\mathbf{F}_s=\mathbf{F}_{ny}*\mu$ képlete is sugallja, hiszen nem szerepel benne a kerék szélessége! Továbbá **Norbert Herrmann** professzor kutatásai is egyértelműen igazolták: a szélességnek semmilyen hatása sincs a fékezésre, [HN1] és [HN3] könyveiben megismerhetjük kutatásainak lényegét.

Szögletes kerekek

Már a cím is ellentmondás: ami kerek, az nem lehet szögletes! A (múlt század) '60-as éveiben több filmen is láttam szögletes kerekű, "természetesen" döcögő szekereket. Manapság már "csak" a budapesti Csodák Palotájában (és a németországi testvér-múzeumában) láthatunk autót négyzet alakú kerekekkel. De miért nem zötykölődnek ezek az autók? Ültem bennük, kipróbáltam! Sőt, a "pályán" nem is csúszik, hanem szépen *gördül*, mint ahogy illik:

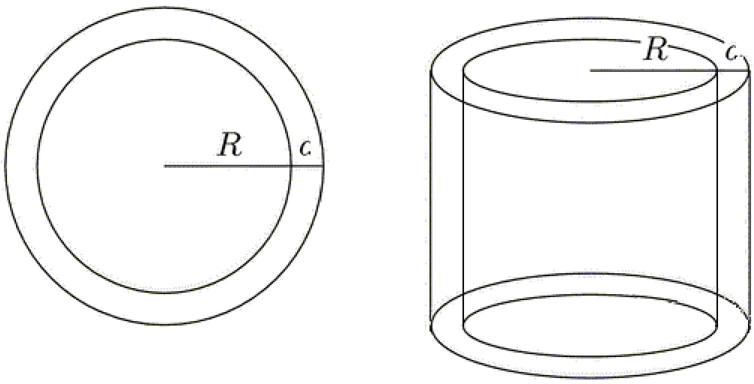
Szögletes kerekű autó
Forrás: http://www.csodakpalotaja.hu/

A fénykép a Csodák Palotája honlapjáról való, tehát a lényeget igyekeztek eltakarni. A sínszerű pálya nem egyenes, hanem fel-le hullámzik, teljes összhangban az autó kerekeinek, mint négyzeteknek a csúcsainak és oldalainak fel-le mozgásával. Az autó tengelye (ami éppen a négyzetek középpontja) pedig mindig ugyanolyan magasan marad, az autónak tényleg semmi fel-le zötyögése nincs!

Bizony, a pálya hullámainak legalább közelítő képlete nem kis feladat: felsőbb matematikai és számítógépes ismereteket jócskán megkíván! De a mérnökök szerint ez még mindig egyszerűbb, mint a pályát kísérletileg, kisautó modellel (és megfelelő pontossággal) meghatározni!

Hengerpalást

Ernő nevezetű, lakatos ismerősöm többször mesélte nagy nevetve régi, több mint 30 évvel ezelőtti esetét. Brigádjának kb. másfél méter magas,több méter átmérőjű,kör alakú tartály kerületét (hengerpalástot) kellett hegesztenie. Amikor végre befejezték, kiderült, hogy az *átmérőt* egy méterrel csökkenteni kell. Hiába mondta a munkásoknak, hogy 3 méter + 14 centit vágjanak ki a kerületből, nem hallgattak rá, csak 1 méterrel csökkentették a kerületet, ismét összehegesztették a lemezeket. Persze nem stimmelt, még kétszer megismételhették a lemezek szétvágását és összehegesztését, végül Ernőnek lett igaza. Miért ?



A hengerpalást kerülete éppen a fedőkör kerülete, ami

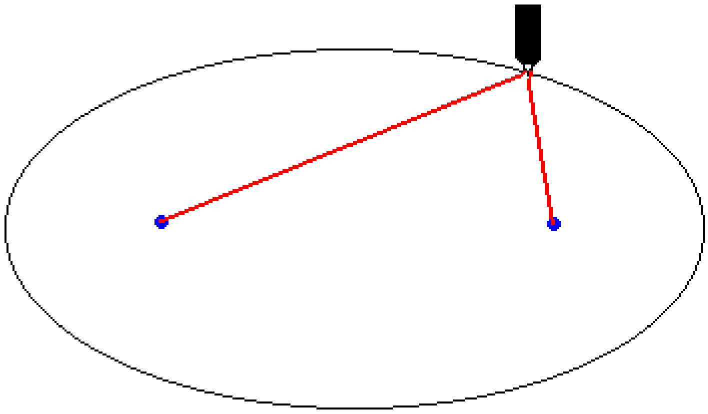
$$K = 2R\pi = \pi \cdot d \approx 3{,}14 \cdot d \, .$$

Tehát, ha az *átmérőt* 1 m -el akarjuk csökkenteni, akkor a kerületet nyilván 3,14 m -el kell csökkentenünk, azaz több mint háromszorosával! (Ha a *sugarat* kell csökkentenünk 1 m -el, akkor az átmérő már 2 m -el csökken, a kerület pedig már 6,28 m -el!)

Régi, de örök mondás: " *Kétszer mérj, egyszer vágj !* "

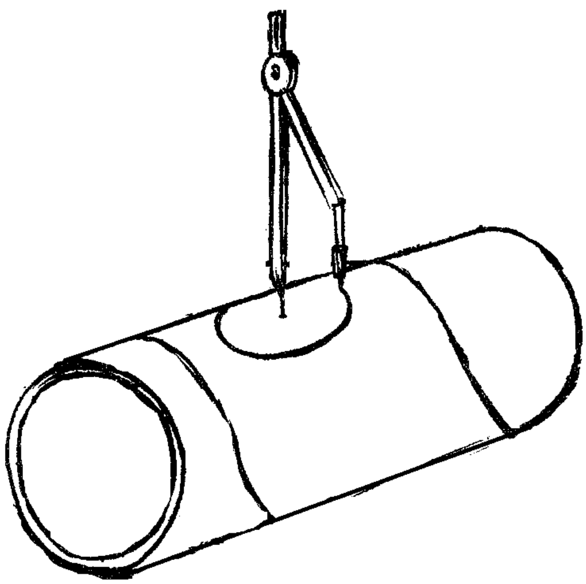
Ellipszisek

Ellipszisek rajzolására jól ismert a következő módszer: két rajzszögre cérnát kötünk, ebbe akasztjuk a ceruzát, és úgy mozgatjuk, hogy a cérna végig kifeszítve maradjon:

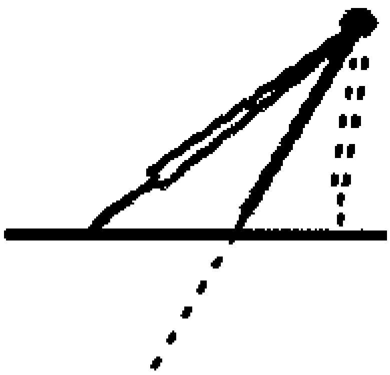


A KöMaL újságban [K50] több más síkgörbe fonalas szerkesztését is megtanulhatjuk.

Egy másik, több száz éves, falun is jól ismert módszert ír le többek között Gárdonyi Géza *Nagyapó tréfái* [GG] könyvében ellipszis szerkesztésére: tekerjünk egy hengerre (pl. borosüveg) papírlapot és a papírlapra így rajzoljunk körzővel kört.



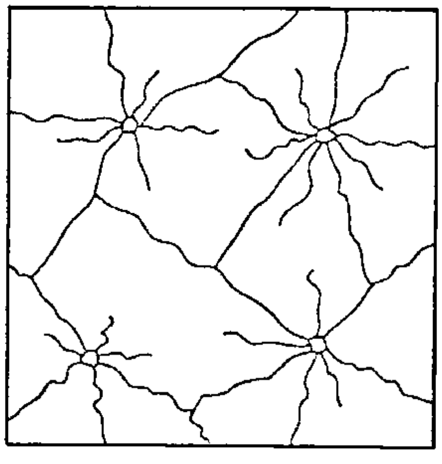
Harmadik, szintén régóta ismert módszert olvashatunk az *Abacus* újság [A07] 2007 -es számában, ehhez azonban olyan körző kell, melynek ceruzás vége teleszkópos (kihúzható és visszatolható, mint a zsebrádiók antennája, vagyis mindig megnyúlik akkorára, hogy hozzáérjen a papírhoz). Tartsuk egy ilyen körző tűs szárát a papírhoz *ferdén*, és ez a tengely körül forgassuk a körzőt. Teleszkópos ceruzás vége mindig akkorára nyúlik vagy zsugorodik, hogy éppen a papírhoz érjen és rajzoljon, mialatt tűs szárának egyenese mozdulatlan marad:



Melyik módszer ad *igazi* ellipszist? Szemre mindegyikkel szép görbét kapunk, a pontos válasz valószínűleg csak a szakembereket érdekli. (A választ megtaláljuk a **Megoldás** részben.)

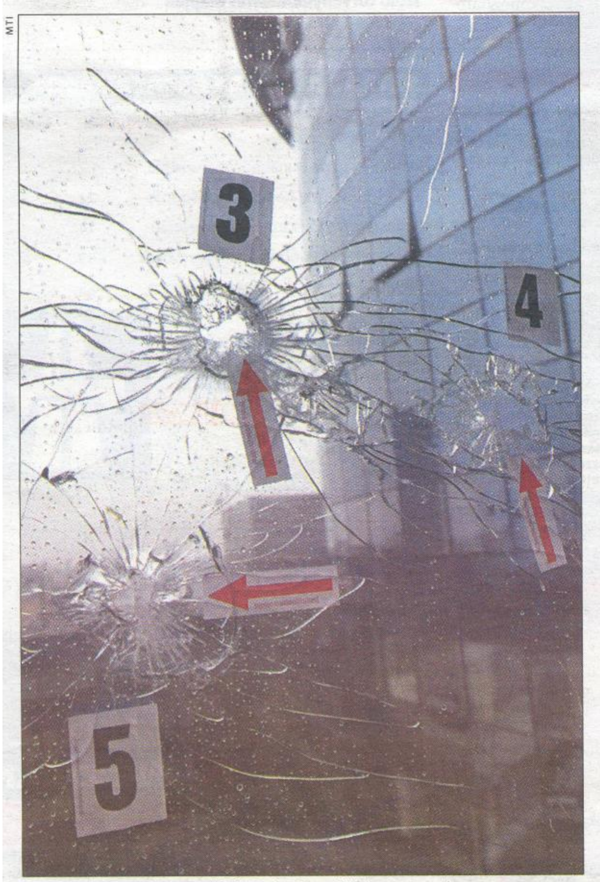
Kavicsok

Egy autó elülső szélvédő üvegére kavicsok estek az előtte haladó teherautóról. Hány kavics esett a szélvédőre? Milyen sorrendben estek a kavicsok? Meg tudjuk-e ezeket állapítani az alábbi ábráról? (A választ ismét a **Megoldások** részben találjuk.)



Egy személyautónál ugyan nem a kavicsok *sorrendje* a legnagyobb bajunk, de pár évvel ezelőtt komoly rendőrségi ügyben játszott szerepet ez a kérdés! "*15 lövés érte az épületet, a löve-*

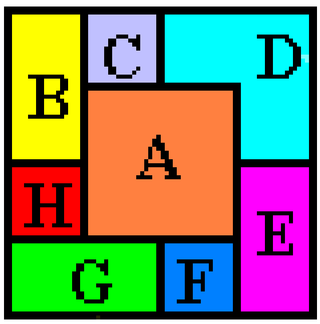
dékek csaknem 15 millió forintos kárt okoztak."



A homlokzat több üvegtáblája is betört a lövések nyomán

Téglalaplefedések

8 db egyforma méretű négyzetet tettünk le az asztalra egymás után. Az A-val jelölt négyzet van legfelül, a többi pedig takarásban van, csak bizonyos részeik látszanak. Állapítsuk meg, milyen sorrendben tettük le a négyzeteket az asztalra. (*Netmatek* internetes verseny, 2001/02, 6.osztály, 10.forduló, a választ ismét a **Megoldás** részben találjuk.)



Hasonló ábrát látunk nap mint nap számítógépünkön: a Windows ablakai is elfedik egymást.

Kicsinyítés, nagyítás

Ha egy A/4 lapra két oldalt szeretnénk fénymásolni vagy nyomtatni, akkor miért kell a másológépet (nyomtatót) **71%** -ra azaz 71/100 -ra állítanunk? Hiszen a lapok *területe* pontosan a felére csökken, ami 50% lenne.

Nos, a fénymásológép (nyomtató) % -os beállítása a **hossz**méreteket állítja.Ha tehát a lapok (képek) magasságát és szélességét is 71/100 = 0.71 arányban kicsinyítjük, akkor *területük* $0.71^2 \approx 0.50$ arányban változik (hiszen a téglalap területe = oldal×oldal), vagyis tényleg felére csökken!

Nagyítani akarunk? *Kétszeresére*? Tehát most olyan p % -ot kell beállítanunk, hogy $(p/100)^2 = 2$ legyen, ahonnan kapjuk: $p/100 = \sqrt{2}$ vagyis $p = 100 \cdot \sqrt{2} \approx$ **141 %** -ra kell állítanunk a gépet! (Más gondolatmenettel: a kicsinyítés és a nagyítás egymás megfordítottjai, vagyis a keresett p % -nak ki kell elégítenie a $p/100 \cdot 0.71 = 1$ egyenletet, ahonnan $p = 1/0.71 \approx$ **141 %** ismét!)

Mennyi **festéket** takarítunk meg, ha az oldalakat kicsinyítve nyomtatjuk, mondjuk 71% arányban? Kétszer annyi betűcske van egy oldalon, sűrűbben is vannak, el sem hinnénk a megtakarítást első ránézésre. Azonban *minden jel* területe *a felére* csökkent (nem csak a kis fekete négyzeteké), tehát összességében *fele annyi*, vagyis **50% festéket takarítunk meg!** Vigyázat: a mai szemüvegárak mellett ez nem feltétlenül éri meg hosszú távon! Másképen is beláthatjuk a fenti eredményt: igaz, hogy egy oldalon több jel lesz, sűrűbben, DE ez két eredeti oldal tartalmát tartalmazza, a másik oldal üres marad! (Szélsőséges esetben gondoljunk két teljesen fekete A/4 kicsinyítésére: egyetlen fekete A/4 oldal lesz a kicsinyítés után - ez ugye 50% festékmegtakarítás!) *Papírt* temészetesen szintén 50% -ot takarítunk meg ezzel a módszerrel!

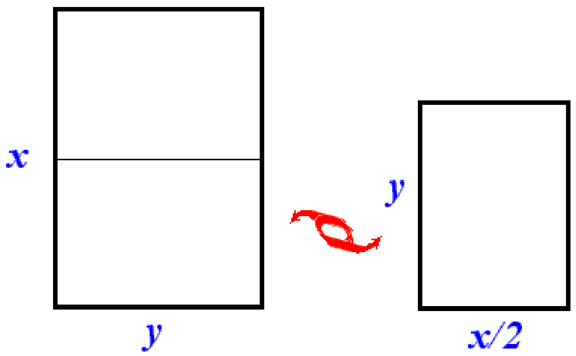
A **betűk** méretei is természetesen csökkennek, nehezebben tudjuk a szöveget elolvasni. Hogyan növeljük a betűméretet, hogy az oldal kicsinyítése után is ugyanakkora betűk legyenek a papíron? Erre például akkor lehet szükségünk, ha kisalakú füzetet vagy könyvet szeretnénk nyomtatni, a lapokat kettévágni

- mint jelen könyvünk is így készült. A 10pt ("*pontos*") betűket 141% -ra, vagyis 14pt méretre kell növelnünk, hiszen a kicsinyítés után $14\text{pt}\cdot 0.71 = 9{,}94 \approx 10\text{pt}$ betűket látunk. Ha pedig 18pt betűmérettel írjuk a szöveget (mint jelen könyvünket is), kicsinyítve ezek csak $18\text{pt}\cdot 0.71 = 12{,}78 \approx 13\text{pt}$ betűknek fognak látszani.

Fényképésznél miért került (pár évvel ezelőtt) egy kép kétszer akkorára nagyítása *négyszer* annyiba? (Sajnos az utóbbi években az árakat más reklámfogások erősebben befolyásolják, ami nem matematika.) Az árat (akkoriban) az anyagköltség határozta meg, amiről az előbb láttuk, hogy *négyzetesen* változik (kétszer-, tízszer nagyobb kép területe négyszer, százszor nagyobb). Ugyanezen ok miatt kerül(t) a 10×15cm -es kép körülbelül *háromszor* annyiba, mint a 6×9cm -es, hiszen területe is (kb.) háromszor akkora: 150cm^2 ill. 54cm^2 .
(A képek oldalainak aránya ugyanaz mindkét képméretnél: $9:6=15:10=1.5$, tehát ezek a téglalapok *hasonlóak* egymáshoz, a nagyítás mérete $15:9=10:6=1.666\approx\sqrt{3}\approx 1{,}732$.)

Az **A/4 papír** miért is pontosan 210×297mm méretű? Legfontosabb tulajdonságát már láttuk: félbehajtva *hasonló* téglalapot kapunk mint az eredeti - ezért is tudunk egy lapra kettőt kicsinyíteni! A *hasonlóság* matematikailag azt jelenti, hogy a téglalapok oldalainak aránya ugyanaz.

ÁBRA : ez a kinyitott könyv két oldala egymás mellett !



Ha tehát az eredeti (A/4) lap oldalai x és y (legyen $x>y$), akkor a félbehajtott lap oldalai y és $x/2$ (mert $y>x/2$), és a hasonlóság pontosan a következő egyenlőséget jelenti:

$$x : y = y : (x/2)\ ,$$

amelynek megoldása $(x/y)^2 = 2$

vagyis $(x/y) = \sqrt{2} \approx 1.414\,214$.

Az A/4 lapnál pedig

$$297/210 \approx 1{,}414\,285\ ,$$

vagyis a gyárban egészen jól eltalálták a méreteket!

Számoljunk most visszafelé: ne félbehajtsuk, hanem kétszerezzük a lapokat: kettő A/4 lap egymás mellett = A/3 lap, és így tovább, végül tehát $2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2 = 2^4 = 16$ db A/4 lap egymás mellett alkotja az A/0 lapot, aminek *területe*

$$16 \times 0.210\text{m} \times 0.297\text{m} = 0{,}99792\ \text{m}^2 \approx 1\ \text{m}^2\ .$$

Bizony, innen ered az A/0,...,A/4 szabvány: az A/0 lapot úgy választották, hogy területe pontosan 1 m^2 legyen !

Próbáljuk meg a Kanadából vagy USA -ból kapott B/4 méretű papírlapot kettéhajtani illetve kicsinyíteni vagy nagyítani! Ugye, hogy nem sikerül! Ugyanis méretei 215×280mm, az oldalak aránya nem $\sqrt{2}$. Erre persze hogy nem lehet pontosan két oldalt kicsinyíteni! Tehát ennyivel jobb az európai szabvány-papír!

Apropó, *hányszor* is kell egy papírlapot (mondjuk egy A/0 méretű csomagolópapírt) *félbe*- negyedbe- nyolcadba- ... hajtogatnunk, hogy a hajtogatott papír magassága (vastagsága) a **Holdig** elérjen? A gyakorlatban mennyi félbehajtást tud megcsinálni kedves Olvasó, mondjuk egy 1m^2 csomagolópapíron? Mekkora lett ennek a hajtogatott papír-oszlopnak és a Holdig elérő (képzeletben tovább hajtogatott) oszlopnak az alapterülete? A Föld-Hold távolság = 384000km, az A/4 papírlap géppapír vastagsága 0.1mm, a nagyon vékony "átütő" ("biblia-" vagy "Anonymus") papíré 0.02mm. Ha 1cm vastag kartonpapírt hajtogatnánk, akkor mennyivel kevesebbet kellene hajtogatnunk? (A válaszokat a **Megoldások** fejezetben találjuk.)

Fényképezőgép

Nem csak a régi (mechanikus), hanem a modern (digitális) fényképezőgépeknél is lehet (néha kell) kézzel állítanunk a felvételi paramétereket bizonyos fényviszonyok mellett, mint például *rekesznyílást*. Azt még értem, hogy ez a lencse előtti nyílás, ahol a fény bejuthat a masinába, tehát ha ezt változtatom, akkor több vagy kevesebb fény jut a gépbe. De miért a következő titokzatos számok vannak egymás után, szépen sorban: **1 , 1.4 , 2 , 2.8 , 4 , 5.6 , 8 , 11 , 16 , ... ?**

A rejtély kulcsa az, hogy a fenti számok a nyílás beállítható *átmérői* (amit a legkönnyebb mérni, beállítani). A kör alakú nyílás területe

$$T = r^2\pi = (d/2)^2\pi ,$$

ahonnan könnyen láthatjuk, hogy például 2 -szer nagyobb átmérő (d), tehát 2 -szer nagyobb sugár (r) esetén a terület (T) 2^2 = *négyszeresére* növekszik!

Ha pedig csak *kétszeres* fénymennyiséget szeretnénk, akkor az átmérőt (vagyis a sugarat) csak $\sqrt{2}$ -szeresére kell állítanunk! Hát ezért vannak a fenti titokzatos számok:

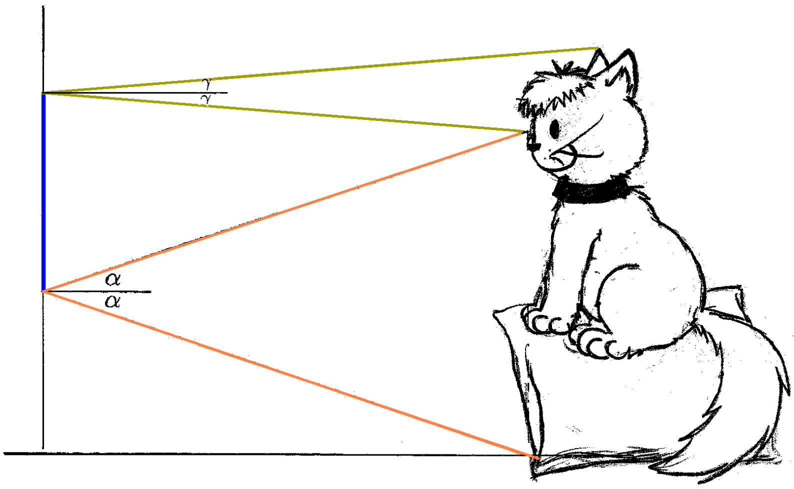
$$1\cdot\sqrt{2}\approx 1.4 ,\quad 2\cdot\sqrt{2}\approx 2.8 ,\quad 4\cdot\sqrt{2}\approx 5.6 ,\quad 8\cdot\sqrt{2}\approx 11 ,\quad \ldots .$$

A fényképezőgépek általános (körülbelül százéves) szabálya: *bármit változtatunk (záridő, rekesznyílás, stb.) egy-egy osztással, a gépbe jutó fény mennyisége mindig kétszeresére / felére változik* !

Tükrözések

Mekkora tükröt vegyünk a **falra**, hogy tetőtől talpig láthassuk magunkat? Természetesen minél nagyobbat, mint a régi kastélyok több méteres tükrei! Sajnos a mai lakásokban erre nincs hely, tehát most a lehető legkisebb méretet kell kiszámítanunk.

Az alábbi vázlatrajzon kék vonallal jelöltük a falra szerelt (függőleges) tükröt, és arany- illetve narancssárga vonalakkal a fejünk búbjától illetve a "cipőnk" talpától a szemünkbe érkező fénysugarakat. A rajzról könnyen leolvasható, hogy a tükör *legfelső* szélének éppen a szemünk és fejünk búbja között kell félúton lennie, és hasonlóan a tükör *legalsó* része pontosan lábujjunk és szemünk között, megint félúton. *Ehhez pedig pontosan akkora tükör elegendő, mint testmagasságunk fele* (és a tükröt az előbb leírt módon kell felhelyeznünk) !



Az ábrán még azt is észrevehetjük, hogy a tükörtől való távolság nem is kellett számításainkhoz, vagyis a megfelelően fel-szerelt tükörtől *akármilyen messze* (vagy közel) állhatunk: mindig pontosan a fejünk búbjától talpunkig látjuk magunkat!

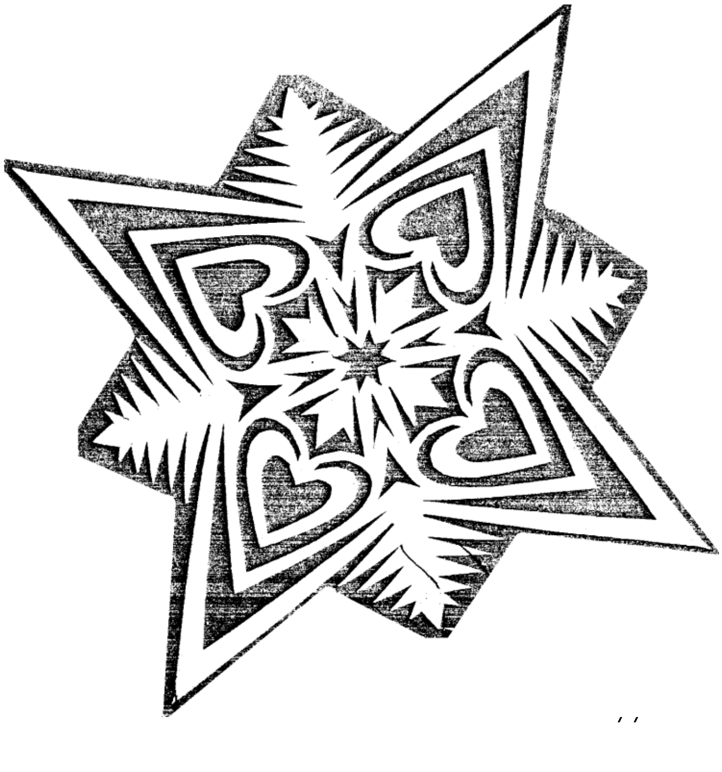
Természetesen ha több családtag is használja a tükröt, a fenti recept mindenkinek más méretű tükröt kíván, *és ami még nagyobb probléma:* mindenkinek más magasságba kellene a tükröt felhelyeznünk. Ez már bonyolultabb probléma, Norbert Herrmann [HN1] és [HN1] könyveiben találunk rá megoldást!

Víztükör

Kiránduláskor találkoztunk a következő rejtélyes esettel: körülbelül 20-40 m széles, sima víztükör túlpartján álló fa jól eltakarta a mögötte álló házat, csak éppen a kémény teteje látszott ki. Ugyanakkor a vízre tekintve a tükörképen a fa *teljesen* eltakarta a házat,még a kémény tetejét sem láttuk. Hogyan lehetett ez? (A rejtély megoldását a könyv végén találjuk!)

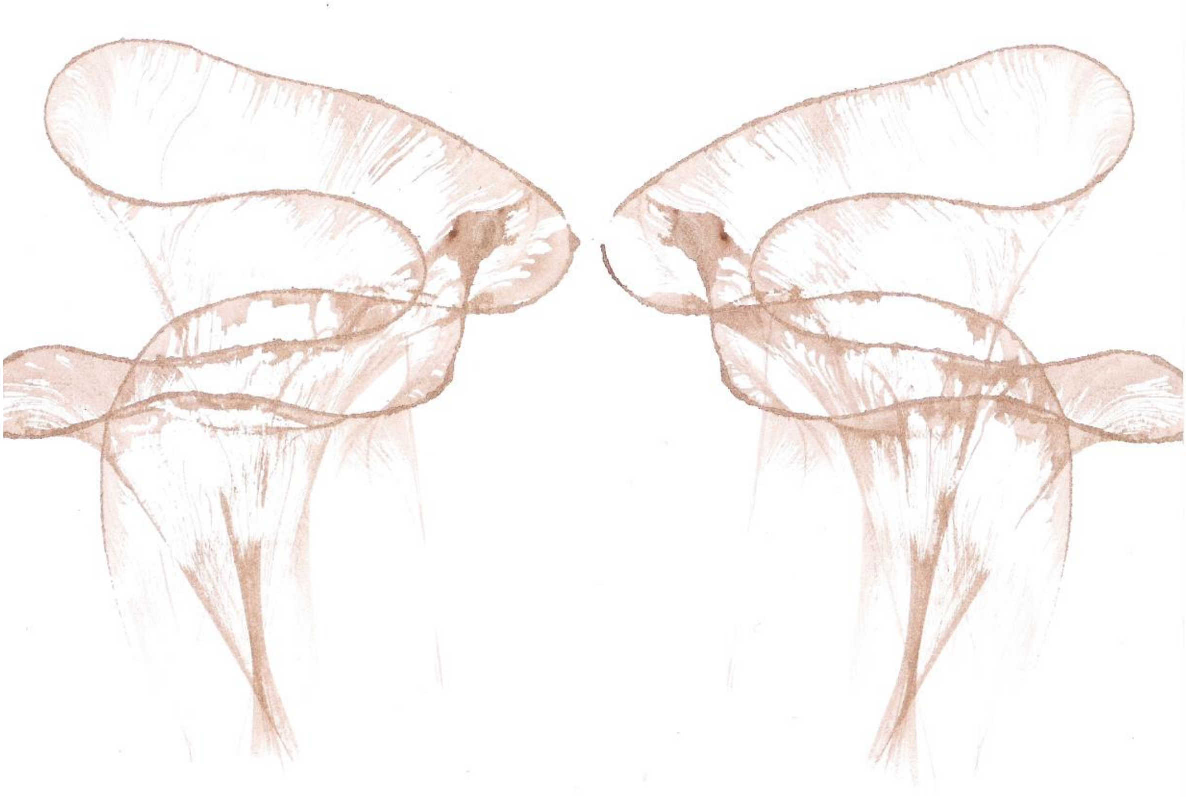
Iskolai tükrözés

Általános iskolában is tanítják mértan (geometria) órákon a tükrözést: természetesen kis üvegtükröt vittünk órákra. Nem az volt a legnagyobb probléma a nebulóknak, hogy a tükör el ne törjön, hanem az, hogy a tükör mögött nem mindig látták pontosan a tükörképet (főleg, ha a tükör mögé néztek kíváncsian). Sokkal kézzelfoghatóbb, ha egy papírlapot hajtunk félbe, és azt nézzük, hogy az egyik- vagy másik felére készített rajz hogyan néz ki a hajtás előtt és után. Esetleg ugyanazt rajzoljuk az összehajtott papír mindkét felére, és utána hajtogatjuk a papírt ki- és be. Ha a papír áttetsző (pausz vagy csak vékony), annál jobb.



Óvodában is már vágnak ki ollóval összehajtogatott papírból hópelyhet, csillagot, emberkéket - széthajtogatás után látszik, hogy egyik oldal a másiknak tükörképe:

Olló nélkül is készíthetünk szép, tükörszimmetrikus ábrákat: festékbe mártott girbegurba zsineget tegyünk egy félbehajtott papírlap közé, és széthajtás után azonnal láthatjuk, hogy az egyik oldalon éppen a másik tükörképe van:

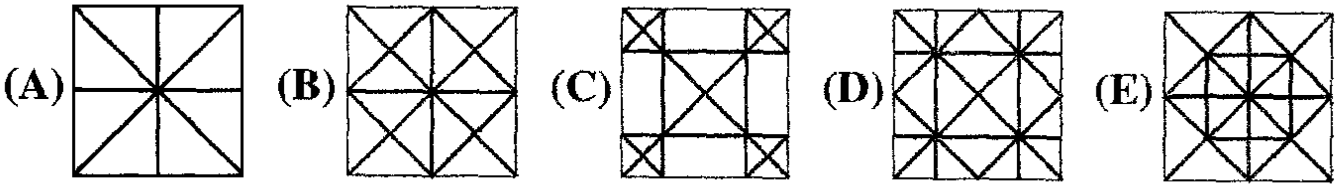


Papírszalvéta

A papírhajtogatás már több száz éve szórakoztat felnőtteket is, nem csak gyerekeket. Most csak egy fejtörőt adunk fel pihenésképpen kedves Olvasónknak, a megoldást ismét a könyv végén találhatjuk meg.

Zsuzsi egy négyzet alakú papírlapot egymás után négyszer félbehajtott úgy, hogy minden hajtás után háromszöget kapott. Ezután a papírlapot kiterítette, majd a hajtásvonalakat ceruzával átrajzolta.

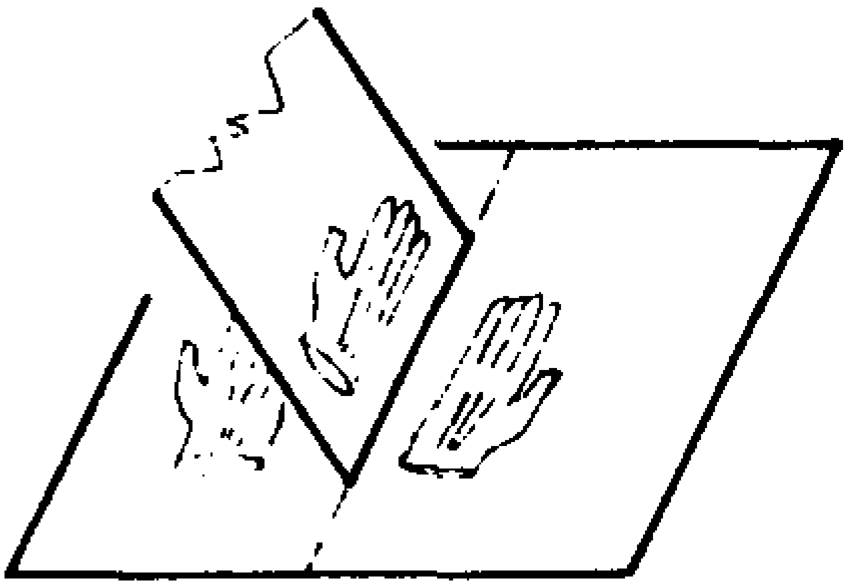
a) Melyik ábrát kapta az alábbiak közül?



b) Meg lehet-e csinálni a többi mintát is, csak félbehajtásokkal (és hogyan) ?

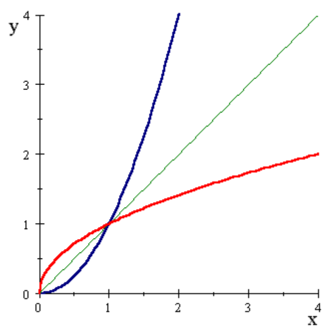
Most jut eszembe, hogy középiskolában éppen *ezt* tanuljuk:

"*A tengelyes tükrözés síkban nem végezhető el, ki kell lépnünk a térbe: az adott tengely körül kell elforgatnunk az egész síkot.*"



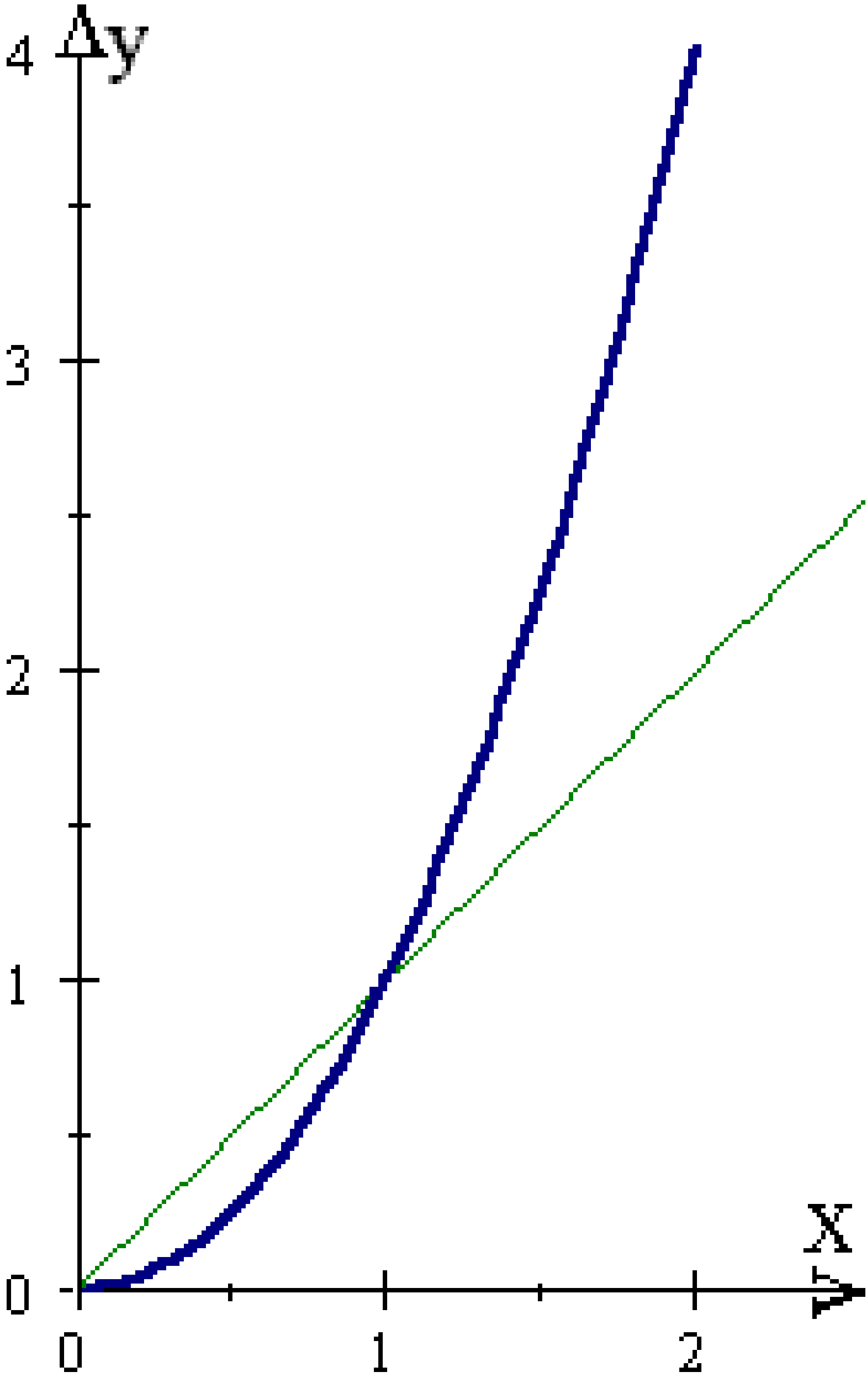
Hát ez pontosan az előző módszer: egy papír széthajtogatása, ami éppen a tengelynél volt félbehajtva!

Függvény inverzének grafikonját (ábráját) is tükrözéssel szoktuk megrajzolni: az eredeti függvény grafikonját az *y*=*x* egyenletű (az alábbi rajzon **zöld**) egyenes, mint tengely körül kell tükrözni, vagyis elforgatni.



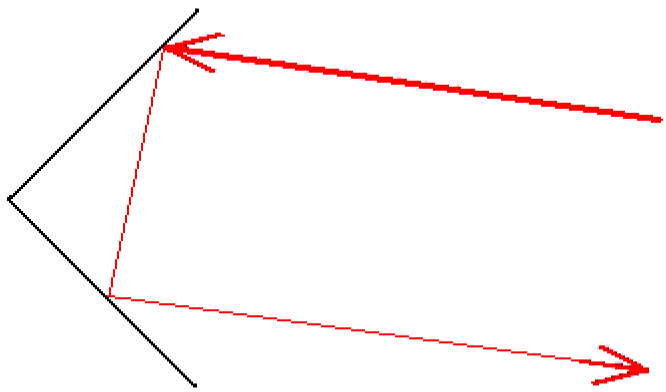
Még meglepőbb, ha *a papírlapot* egyszerűen *megfordítjuk* és a hátulját úgy tartjuk a fény felé, hogy az *x* és *y* tengelyek helyet cseréljenek és az *y*=*x* egyenletű **zöld** egyenes a helyén maradjon. Ekkor éppen a függvény inverzét látjuk!

Kedves Olvasóm, tessék ezt a következő oldalon levő ábrával most azonnal kipróbálni: a lap túloldalán (a könyvet 90°-kal elforgatva) már a függvény inverzét látjuk! Sok ismerősöm ezt a "*papírforgatós*" szemléltetést "dedósnak" tartja, de szerintem az a nagyobbik baj, ha a diákok nem értik az anyagot!


Δy
4
3
2
1
0
X
0
1
2

Két tükör meg egy harmadik

Állítsunk két síktükröt az asztalra egymás mellé derékszögben (90^o-ot bezáróan), tükröző felületük legyen "befelé". Kísérletezzünk zseblámpával járkálva a szobában: az asztal síkjában fekvő *bármely* fénysugár, amit a tükrökre irányítunk *akárhonnan*, önmagával párhuzamosan visszaverődik ugyanoda, ahol mi állunk.



A kísérlet sokkal látványosabb lézer-mutatóval, de NAGYON KELL VIGYÁZNUNK: a lézer a tükrökről visszaverődve *mindig ugyanoda* érkezik vissza (eredeti fényerejében!), mint ahonnan mi világítunk!, vagyis a saját és a nézők SZEMEIRE NAGYON KELL VIGYÁZNUNK !!! Tanácsos a nézőket oldalt ültetnünk, mi kinyújtott karral, fejünktől távol tartsuk a lézert, és a visszaverődő fénysugarat egy kartonpapíron mutassuk meg!

Ha a két tükörlap közé az asztalra egy harmadikat fektetünk, tükröző felével felfelé, akkor kísérletünk még VESZÉLYESEBB lesz: már nem csak az asztal síkjában fekvő, hanem a szobában *bárhonnan* a tükrökre irányított fénysugár ugyanoda verődik vissza, ahol a fényforrás van!

A jelenség a fényvisszaverődés törvénye (*beesési szög = visszaverődési szög*) alapján könnyen megmagyarázható, középiskolás feladatgyűjteményekben megtalálható. **Olvasónk feladata:** *Hol használják fel ezt a jelenséget?* (A választ ismét megtaláljuk a legutolsó fejezetben.)

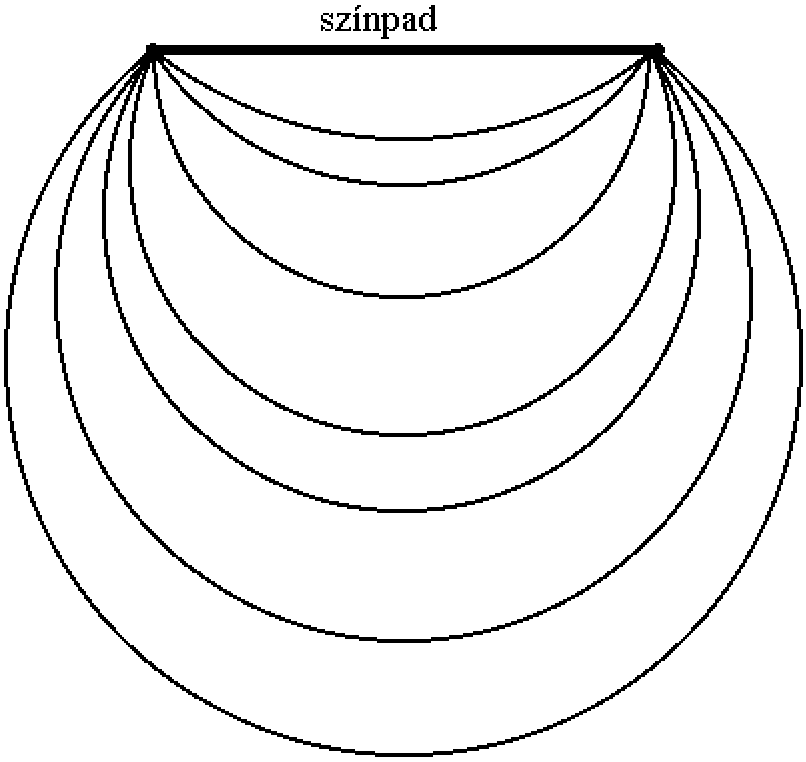
A tükrözésekkel valójában átléptünk a térgeometria területére, tehát ezt az érdekes témát a 7. fejezetben folytatjuk, az *Egyéb tükröző felületek* és az *Anamorfózisok* problémákban.

A sok tükrözésben elfáradt a szemünk, káprázik, ezért a további témákat már csak röviden érintjük.

Látókörök

Futballistáknak és -rajongóknak vajon eszébe jut-e, hogy *oldalbedobáskor* honnan látni a legjobban a kaput? Nyilván nem a pálya legtávolabbi végéből, de a kapuval egy vonalban sem látunk már sokat a kapuból. Matematikailag hasonló a problémánk, amikor egy magas oszlopot szemlélünk (Athénban), vagy netán egy női lábat: sem túl távolról, sem túl közelről kicsi a tárgy *látószöge*. Látószög alatt értjük a tárgy két szélétől a szemünbe érkező fénysugarak által bezárt szögét, egy tárgyat akkor látunk a legjobban, ha látószöge a legnagyobb. Az említett problémák megoldását például **Koltay László** és **Szalkai István** [SzI2] feladatgyűjteményében vagy **Herrman** [HN1] és [HN2] könyveiben találhatjuk. (A megadott képleteket bárki használhatja, az erősebb idegzetűek a Google "*Japán matematika*" képtalálatát is megnézhetik az interneten.)

Rokon problémával találkozunk a színházban (különösen az első sorokban): a sor közepére kérünk jegyet, hiszen a széléről "semmit" sem látunk a színpadból! Szakkifejezéssel megfogalmazva: a sor szélén kicsi a színpad látószöge. Középiskolában tananyag a **látókör** fogalma: "*Azon pontok halmaza (összessége), amelyből egy adott szakasz (színpad) adott (állandó) látószög alatt látszik, egy* körív, *melyet az adott szakasz* **látókörének** *nevezünk.*" A látókör persze függ a látószög nagyságától. Tehát ha a színházban a széksorok a színpad látókörein lennének, akkor a sorok végein és közepén egyforma szög alatt, "ugyanúgy" látnánk a színpadot:



A székeket a fenti vázlat körein kellene elhelyezni, de mint tudjuk: sajnos a színházak széksorai *nem* a fenti látókörök mentén húzódnak.

Ugyanez a probléma, ha egy kiállításon szeretnénk a látogatókat úgy körbeállítani, hogy mindegyikük azonos szögben lássa a falon levő festményt.

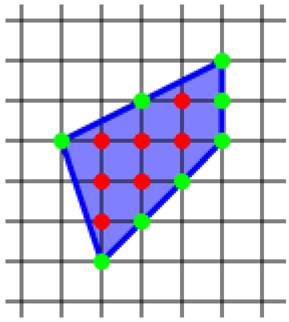
Pick tétele

Mindegyik kisiskolás tanuló és nagyon sok felnőtt mérnök többször találkozik a következő egyszerű (?) feladattal:

" *Mekkora a területe egy olyan sokszögnek, melynek minden csúcspontja egy négyzetrácsos papír rácspontjaiban van?* " Előbb-utóbb "összejön" a terület kis darabokból (a ferde vonalak miatt nehéz), pedig **Pick** (Georg Alexander, 1859-1942) 1899 -ben megjelent tétele egyszerű képletet ad az összefüggő, önmagukat nem metsző és nem lyukas sokszögek területére:

$$T = b + h/2 - 1$$

ahol b = a sokszög belsejében levő, és h = a sokszög határán levő rácspontok száma. (h páratlan is lehet.)

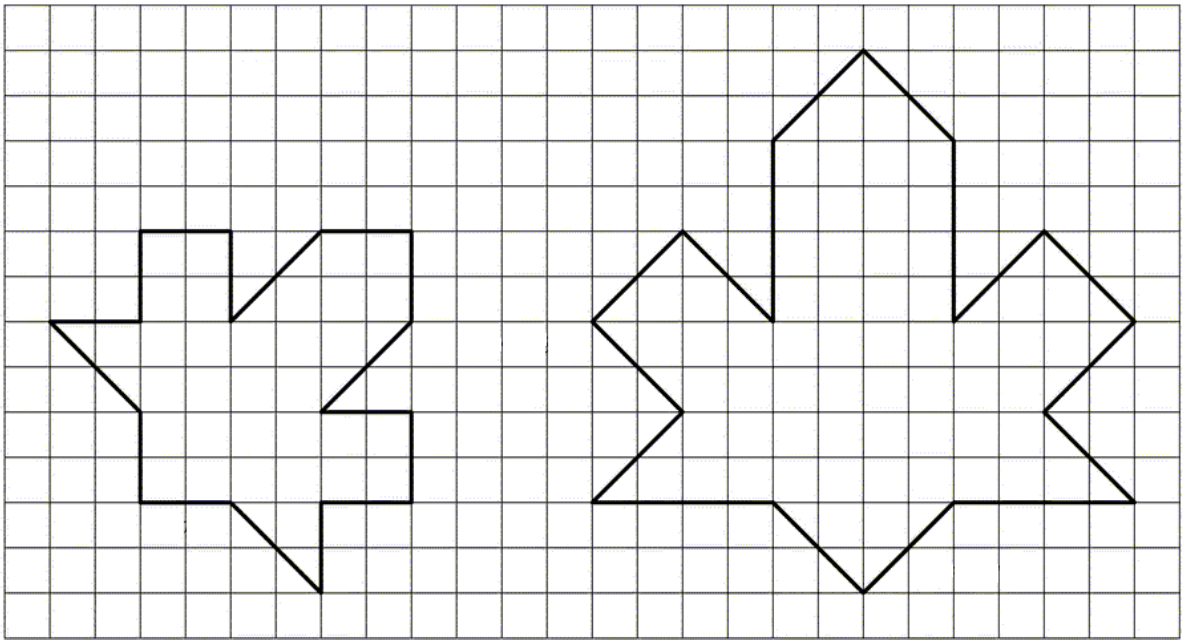


A mellékelt ábrán például $b = 7$ (piros pontok), $h = 8$ (zöld pontok), tehát

$$T = 7 + 8/2 - 1 = 10 ,$$

ilyen egyszerű!

A kedves Olvasó próbálja meg az alábbi sokszögek területét Pick tétele segítségével, esetleg anélkül is meghatározni, a válasz *nincs* a könyv végén:



Pick tételének vannak ugyan térbeli és magasabb dimenziós általánosításai, de ezek már nagyon bonyolultak. (Ehrhart polinomokat kell keresni, például az http://mathworld.wolfram.com/EhrhartPolynomial.html címen.)

Szélkerék

A kép aláírása szerint *"a 80 m magas tornyon egy 90 m átmérőjű szélkerék forog majd".* Nem fogja a földet súrolni a propeller? (A választ lásd a könyv végén.)


LXI. évfolyam, 176. szám VESZPRÉM MEGYE NAPILAPJA 2005. július 29., PÉNTEK

Munkára fogják a szelet

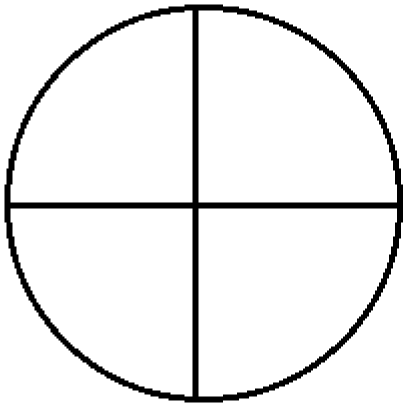
Az ország eddigi legnagyobb teljesítményű „propellerét" állították fel

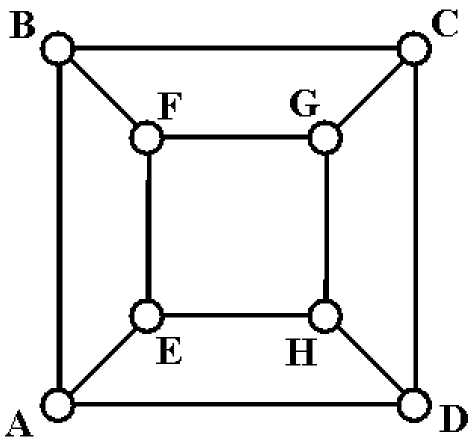
A nyolcvan méter magas tornyon egy kilencven méter átmérőjű szélkerék forog majd, ezt emelték a helyére tegnap

Fotó: Andrónyi András

Egy vonallal

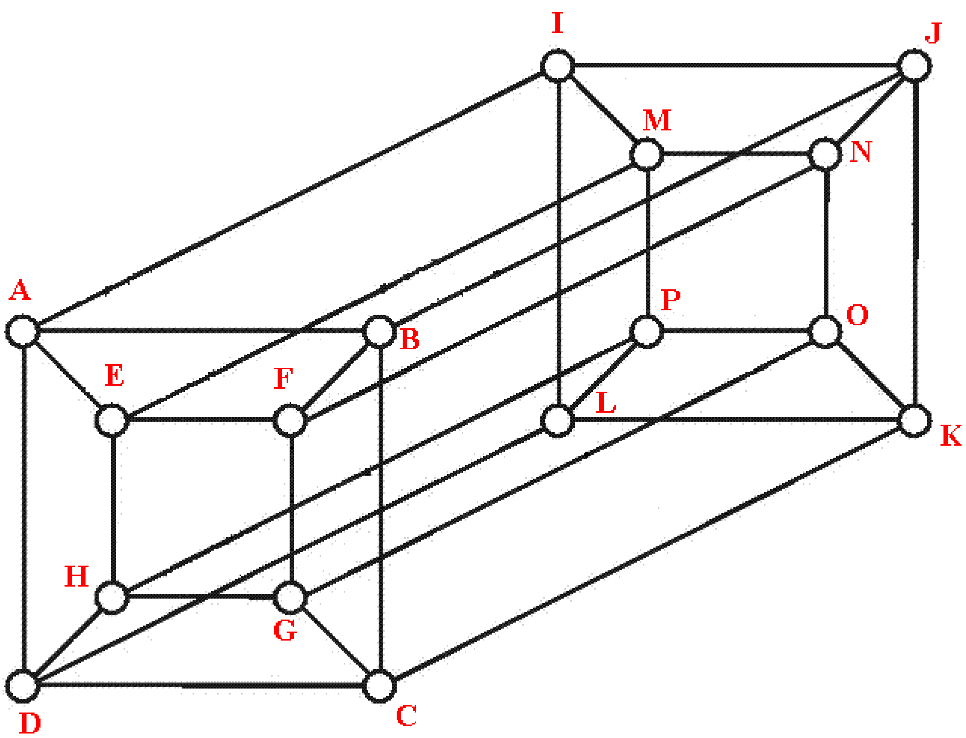
Ismerős feladat gyermekeknek és felnőtteknek egyaránt: *Rajzoljuk meg egy vonallal, a ceruza felemelése nélkül a megadott ábrát, természetesen mindegyik vonalat csak egyszer húzhatjuk meg!* Kisiskolás gyermekeim is rendszeresen kaptak ilyen feladatokat. A baj csak az, hogy a tanítónéni elfelejtette megemlíteni: *vannak megoldhatatlan feladatok* (ábrák) *is*! Mint például egy kör kereszttel vagy a kocka éleinek hálózata, ún. "élgráfja" ! (A kocka túloldali felülnézeti, vagy viccesen "lapított kocka" rajz előnye, hogy az élek nem keresztezik egymást a papíron.)





Mert a kisiskolás gyermek képes egész délután bőgni, ha nem sikerül a házi feladatot megoldania! Majdnem úgy jártunk, mint Sam Loyd "kombinett" játékával 100 évvel ezelőtt nagyon sokan!

Érdekes módon a négydimenziós kocka alábbi élgráfja viszont megrajzolható a kívánt módon - tessék bátran próbálkozni, kedves Olvasóm! (Ha nem sikerül, a könyv végén megtaláljuk a megoldást.)



Négydimenziós kocka

Vizsgáljuk meg kicsit közelebbről a feladatot! Előbb-utóbb rájövünk, hogy minden csúcspontban (kereszteződésben, útelágazásban) *páros sok élnek* (vonalnak) kell találkoznia, hiszen ha a ceruzánkkal "bejövünk" ebbe a csúcsba, akkor ki is jövünk onnan, vagyis minden alkalommal két-két vonalat rajzolunk meg! Ez alól csak az a két csúcs a kivétel, ahol elkezdtük és ahol befejeztük a rajzolást, ha ez a két csúcs nem azonos. Máris megállapítottuk tehát, hogy: *ha megrajzolható* az ábra, *akkor*

(*) *Minden csúcsban páros sok élnek kell találkoznia, kivéve a kezdő- és befejező csúcsokat, ha azok nem azonosak.*

Vagyis ez a feltétel *szükséges* ahhoz, hogy megrajzolhassuk az ábrát! Ebből már *azonnal* látjuk, hogy például a kocka élei vagy a kör kereszttel *nem rajzolhatók meg*, hiszen kettőnél több páratlan fokú csúcsuk van! (Egy csúcs *fokszáma* a csúcsban találkozó vonalak számát jelenti.) Tehát nem kell próbálkozni és nem kell bőgni sem!

Vigyázat: a (*) feltétel szerint egy ábrát már akkor sem lehet megrajzolni, ha csak egy páratlan fokú csúcsa van (sem több, sem kevesebb)!

DE vajon elég -e a (*) feltétel, vagyis következik -e belőle az, hogy az ábra meg is rajzolható? A 4."Logika" fejezetben több példán is láttuk, hogy az ok és okozat legtöbbször nem cserélhető fel! Most azonban szerencsénk van: *Leonhard Euler* (1707-1783) svájci matematikus bebizonyította, hogy a (*) feltétel már egymagában elegendő: (*) teljesülése esetén az ábra biztosan meg is rajzolható! (Euler eredeti problémája és eredménye a "königsbergi hidak" néven vált közismertté, amiről minden gráfelméleti könyvben vagy internet-oldalon olvashatunk, Königsberg mai neve (Kalinyingrád).)

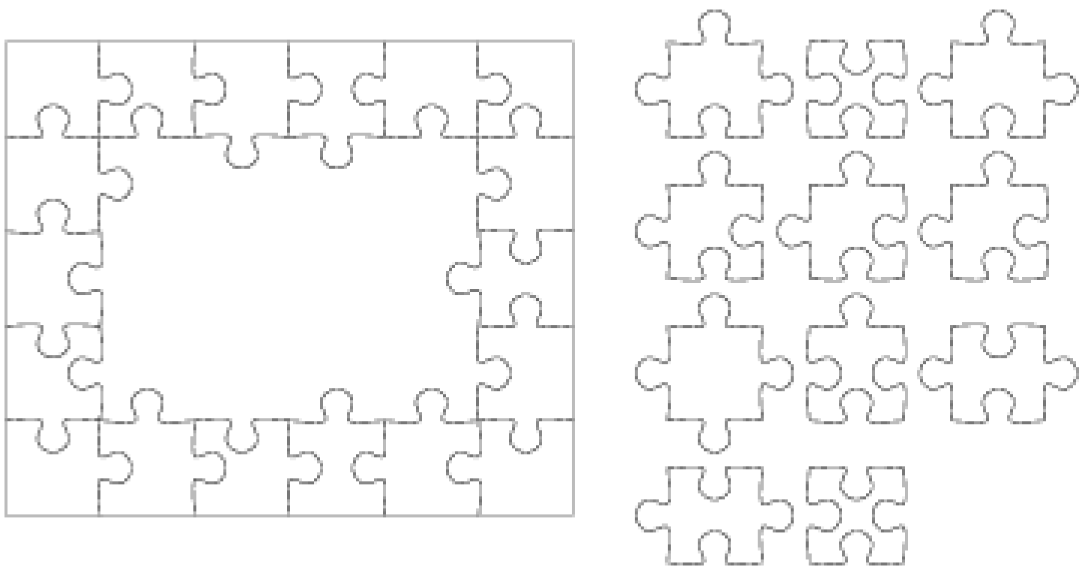
Ennek alapján már biztosan tudjuk, hogy például az előző oldalon látható négydimenziós kocka megrajzolható egy vonallal, tessék nyugodtan próbálkozni! (Megoldás hátul.)

Nagyobb méretű, bonyolultabb rajzoknál már nehéz lehet a tényleges megrajzolás megtalálása. Például a Szerző [SzI8] könyvében is találunk egyszerű útmutatásokat (algoritmust) a feladat egyszerű megoldásához. [SzI8] -ban ezenkívül további játékos problémákról is olvashatunk (dominók, kastélyok, stb), Euler körökkel kapcsolatban.

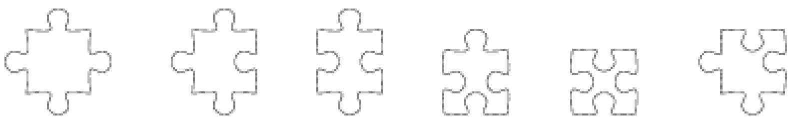
Az "egy vonallal" problémának és Euler fenti tételének komoly gyakorlati alkalmazásai is vannak az iparban, például automata fúró- és gravírozó gépek működési idejét, energiafelhasználását lehet vele csökkenteni. Szerény véleményem szerint azonban a tétel legfontosabb gyakorlati alkalmazása a gyerekkönnyek megszüntetése !!!

Kirakó

Egy 30 darabos kirakós játék szélét már kiraktuk, amikor észrevettük, hogy egy elem hiányzik a készletből (belekevertük a másik készlet darabjai közé).



Melyik lehet a hiányzó darab a következők közül ?

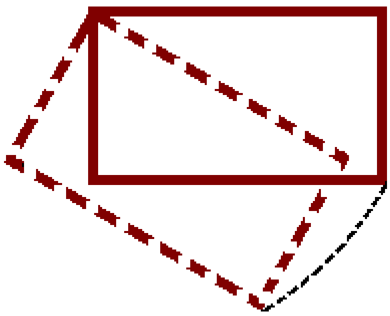


A megoldást a könyv végén találjuk.

A Trapéz

Mindenki tanulta az iskolában: négyszög, van két párhuzamos oldala. Sok mindent tanultunk még róla, de azt az egyet nem,hogy a légtornászok a cirkusz kupolájában miféle trapézra másznak fel? Pedig minden matekórán és cirkuszi előadáson figyeltem. Építkezéskor jöttem rá a titokra: ha egy darabot hirtelen csak levágunk a hosszú deszkából, trapézt kapunk. Mert általában a mi egyenes vágásaink nem derékszögűek, de a fatelepen a a deszkákat szépen, két párhuzamos élűre fűrészelik. Valóban, az artisták is valami deszkafélén toporognak a magasban, amelynek végeit innen nem látom jól. De biztosan ők is ferdén vágták le a két szélét!

Szekrény



Téglalap alapú szekrényt *egyedül* úgy mozdítottam el a faltól, majd egy hét múlva vissza, hogy egyik végénél fogva kicsit megemeltem - megdöntöttem, három lába kicsit a levegőben, és a negyedik lába mint függőleges forgástengely körül, kicsit elforgattam. Ezt ismételgettem jónéhányszor, egyik-másik lába körül forgattam el a szekrényt (téglalapot) ide-oda, amíg a kívánt helyre nem került. Huh!

Utána már volt időm gondolkodni: **bárhonnan bárhová** el lehet-e mozdítani a szekrényt a fenti módon? Matematikai nyelven ez a kérdés így fest: *Ha a síkon kijelölök két egybevágó téglalapot, akkor lehet-e (és hogyan) bármelyiket átvinni a másikba fenti módszerrel?* Lelkes Olvasóim máris elővesznek egy doboztt (pl. szardíniás vagy cipős) és kísérleteznek, mielőtt jön a szobafestés. Megnyugtatunk Mindenkit: ifjú tanítványom, *Sagmeister Ádám* középiskolás diák nemrégen bebizonyította, hogy a fenti kérdésre mindig **igen** a válasz: bármely szekrényt bárhová el lehet juttatni az "egylábas" módszerrel.

VIGYÁZAT! A kísérlet veszélyes: súlyos hátfájást és sérvet okozhatunk magunknak! Hátfájás nélkül a számítógépen is kipróbálhatjuk:
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/MindMusz/Mindennapi-musz-start-2c.html , a 6. "*Billeg*" fejezetben.

Ha az Olvasó a dobozzal kicsit szórakozni is akar, javasoljuk a **Bloxorz** nevű játékot, ami az interneten is megtalálható, például az alábbi címen:

http://www.miniclip.com/games/bloxorz/en/ .

Napsugarak

A fejezet végére hagytuk a legfontosabbat: az éltető napsugarak miért "sugárirányban", minden irányba áradnak szét, amit párás (vagy poros) időben jól meg is figyelhetünk. De ez teljesen természetes, hiszen egy pontból indulnak ki. Igen ám, de fizikából meg éppen azt tanultuk, hogy a Nap és a Föld nagy távolsága miatt már *párhuzamosnak* tekinthetjük a nap sugarait! Mi az igazság?

A fizikaórán tanult "párhuzamos" jelző az optikai csalódás magyarázata. A vasúti sínek is párhuzamosak (hiszen a vonat kerekeinek távolsága nem változhat!), de már a vasútállomáson is úgy látjuk, mintha egymáshoz közelednének, egy pontban találkoznának. Az iskolában még tanultuk is (viccesen!):

A párhuzamos egyenesek a "végtelenben" találkoznak.

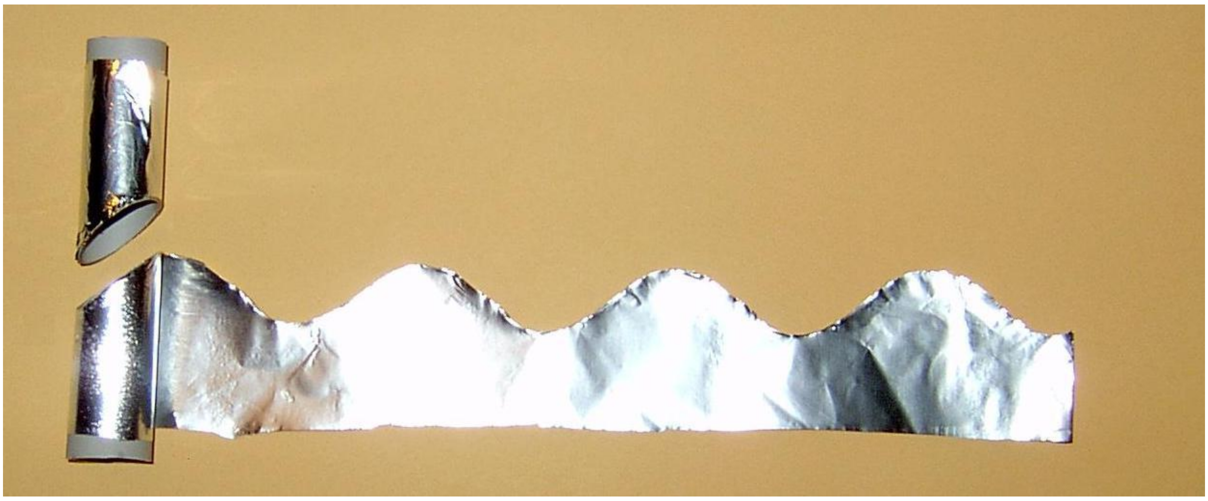
Ha pedig a Nap nagyon messze van, akkor a fénysugarak ott találkoznak!

6. A Szinusz és a szögfüggvények

A **Szinusz** (igen, így nagybetűvel) hiába nem a kedvencünk (mert nehéz), de sokszor KELL! Ezért is tiszteltük meg egy egész fejezettel.

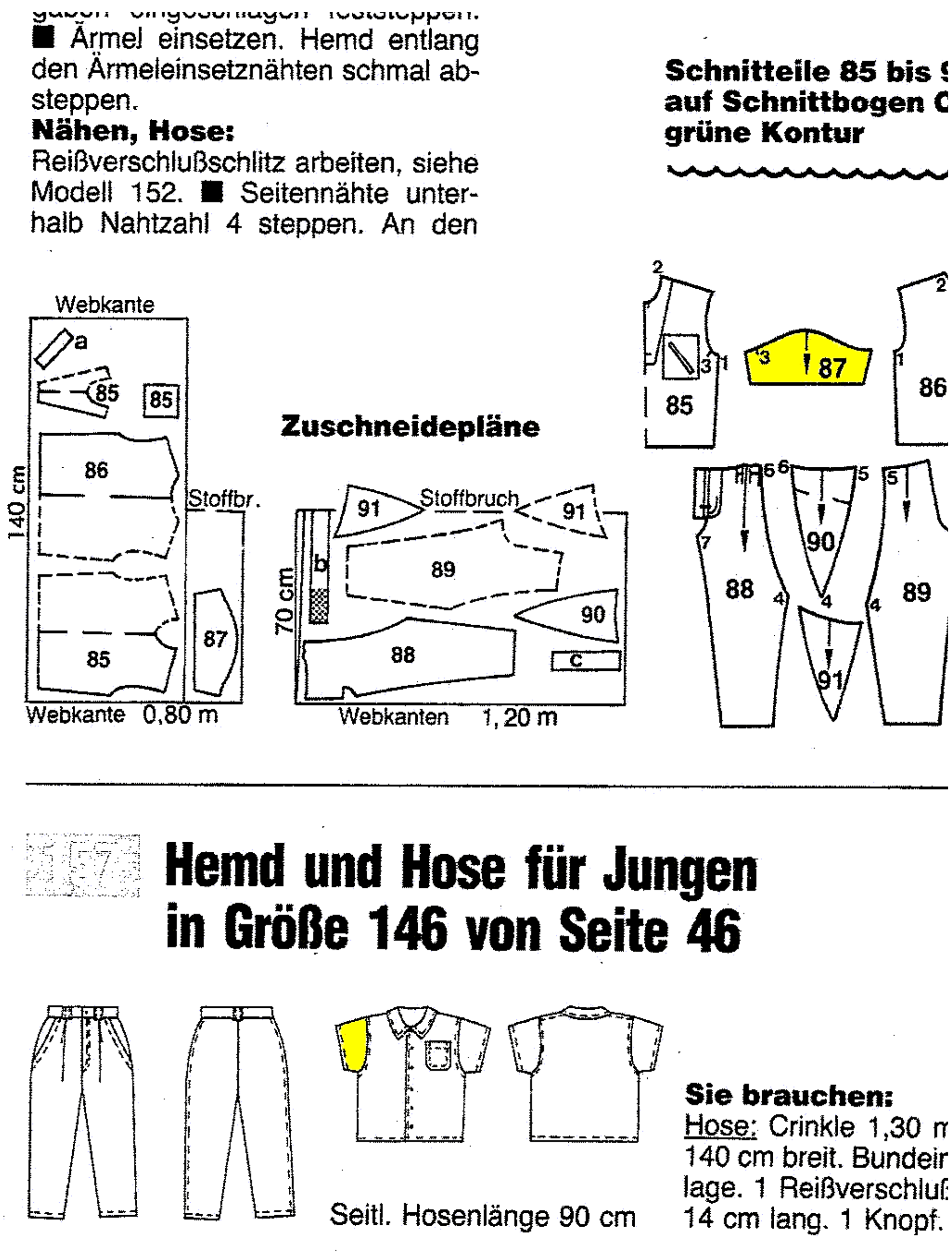
Szalámi és ingujj

Tekerjünk egy *papírhenger* (vagy szalámi) köré 2-3 rétegben alufóliát, vágjuk el a hossztengelyére ferdén 45^o -os szögben, majd hajtogassuk ki az alufóliát. Milyen görbét kapunk? (A vágás*felület* ellipszis, ez jól ismert.)



Milyen alakú az *ingujj* szabásmintája a vállrésznél (túloldalon a 87. rajz)?

Mindkét példáról be lehet bizonyítani (nem túl nehezen), hogy bizony, egészséges szinuszhullámok. (A bizonyítást például a KöMaL [K95] C.376. feladatának megoldásában találjuk meg.)


■ Ärmel einsetzen. Hemd entlang den Ärmeleinsetznähten schmal absteppen.
Nähen, Hose:
Reißverschlußschlitz arbeiten, siehe Modell 152. ■ Seitennähte unterhalb Nahtzahl 4 steppen. An den

Schnitteile 85 bis 9
auf Schnittbogen C
grüne Kontur

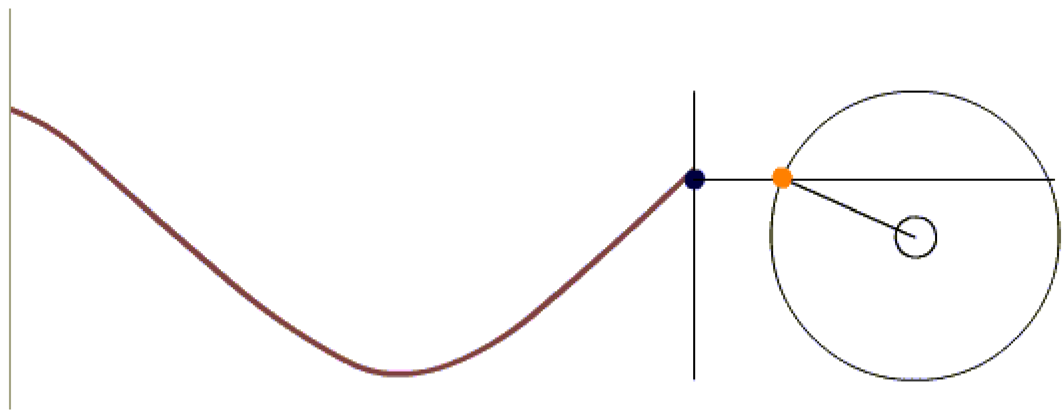
Zuschneidepläne

157 Hemd und Hose für Jungen in Größe 146 von Seite 46

Seitl. Hosenlänge 90 cm

Sie brauchen:
Hose: Crinkle 1,30 m 140 cm breit. Bundeinlage. 1 Reißverschluß 14 cm lang. 1 Knopf.

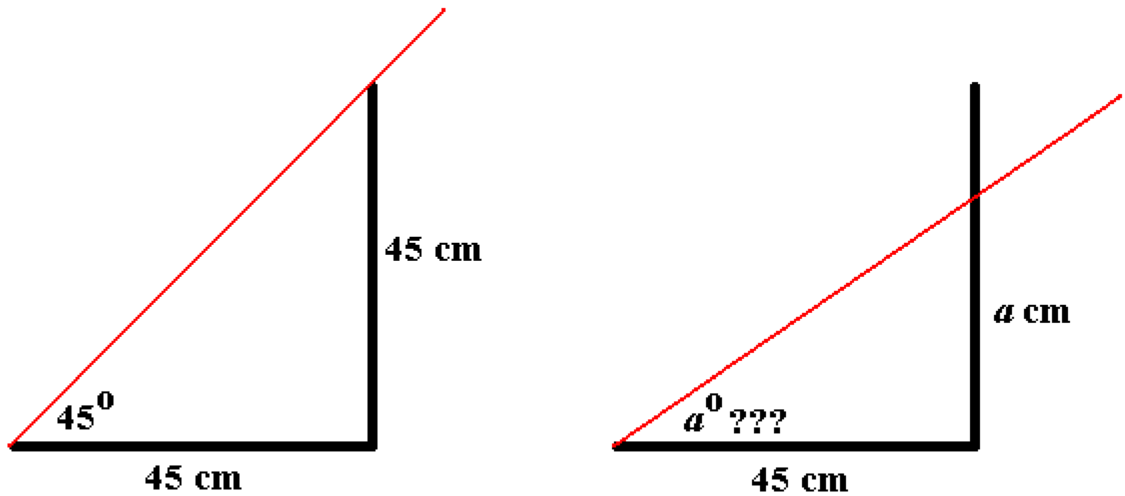
Mint amilyeneket a víz- vagy EKG- hullámok mutatnak, ami *pontosan ugyanaz*, mint amit középiskolában a "Forgásszög szögfüggvényei" fejezetben tanultunk: egyenletesen körbeforgó pont magasságáról van szó, ami az alatta mozgó papírcsíkon hagy nyomot. Ezt számítógépen szimulálhatjuk is:



A fenti mozgóképet (animációt) működés közben az alábbi internetcímen lehet megtekinteni:
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/B-SIN-1.SWF
vagy http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/B-SIN-2.EXE .

Ácsok

Saját szememmel láttam, hogy ácsok még mindig használják a következő módszert mértani szögek kimérésére. Készítenek két 45*cm* -es lécből egy derékszögű háromszöget (átfogója valamekkora), ennek hegyesszöge nyilván 45°. Ha ezután egy *a* *fokos* szöget kell kimérniünk, akkor a ferde "átfogó" lécet csak lejjebb mozgatják úgy, hogy a szemközi befogó (függőleges léc) csak *a cm* legyen. Ekkor (állításuk szerint) a megváltoztatott hosszúságú léccel szemközti szög körülbelül *a fok* lesz, pl. *a*=40cm esetén α=40° (állítólag):



Számítsuk ki az így kapott *tényleges* szöget mondjuk a = 20cm ... a = 60cm esetén. (Válasz a **Megoldás** részben.)

Autóval

A "*veszélyes lejtő* " tábla 10% -ot mutat, vagyis az út minden (térkép szerinti) 100*m* után 10*m*-t lejt. Ez geometriailag hány ^{o} -os lejtőnek felel meg?

Itt a vízszintes befogó (vetület) 100*m*, a szöggel szembeni befogó 10*m*, tehát $tg(\alpha) = 10\% = 10/100$, ahonnan $\alpha = arctg(0,1) = 5,74^{o}$. Ez ugyan geometriailag nem nagy érték, de kerékpárral és autóval is már vigyázni kell! A 100% -os lejtő 45^{o} -os !

Tengerpart

Pestről keresett meg ügyvéd ismerősöm pár évvel ezelőtt a következő sürgős kérdéssel (az adatokra nem pontosan emlékszem):

"*A tengerpart dőlésszöge* 3^{o}, *a vízszint emelkedése dagálykor* 1.2m. *Elönthette -e a tenger a víztől* 500m *-re levő házat?*

Ügyvéd barátom izgatottan várta az eredményt, hiszen (mint hangsúlyozta): ez döntő kérdés egy perében! A szinuszfüggvény ismeretében ez gyerekjáték, még a könyv Megoldás fejezetéig sem kell várnunk: $sin(\alpha)$ = *szemközti oldal / átfogó* :

$$\sin(3^{o}) = \frac{1.2}{t}$$

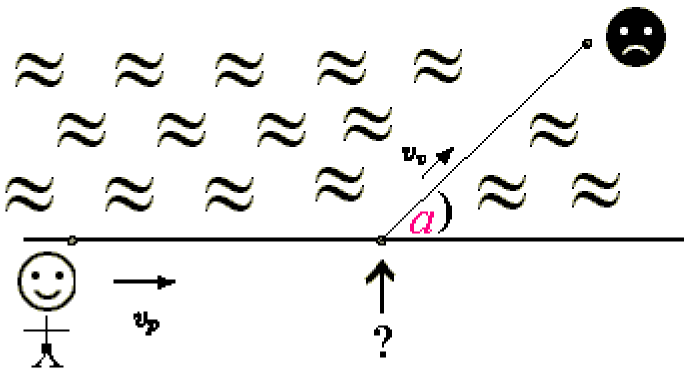
ahonnan

$$t = \frac{1.2}{\sin(3^o)} \approx 22{,}9288$$

ahol t a tenger előrenyomulása a parton. Látjuk tehát, hogy a ház épségben átvészelte a dagályt. Ennyire egyszerű!

Vízimentés

A tó közepén bajban van valaki, mi a vízparton jóval arrébb vesszük észre segélykiáltásait:



Nyilván a part mentén futunk egy darabig és csak utána ugrunk vízbe (hiszen lassabban tudunk úszni mint futni), és a lehető leggyorsabban akarunk a bajban levőhöz érni. De mennyit fussunk a parton, hol ugorjunk a vízbe, mennyit ússzunk? A megoldás egy egyetemistának nem nehéz, a levezetést például [SzI2] 6.9. feladatában vagy [HN2] -ben is megtaláljuk.

A válasz meglepő: teljesen mindegy, hogy a bajbajutott és mi hol vagyunk. Mindössze az a lényeg, hogy mekkora sebességgel tudunk futni a parton (legyen ez v_p m/s), és a vízben úszni (legyen ez v_v m/s). Ekkor a fenti vázlaton jelölt α szögre - ami a part és úszásunk szöge - a következő feltételt kapjuk:

$$tg(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{v_p}{v_v}\right)^2 - 1} \quad \text{azaz} \quad \alpha = arctg\sqrt{\left(\frac{v_p}{v_v}\right)^2 - 1} \ .$$

Természetesen én sem hordok zsebszámológépet a fürdőnadrágomban. De ez nem is kell, hiszen a fenti képletek szerint csak az α *szög* kell, ami a v_p és v_v sebességek ismeretében már **otthon előre kiszámolható**.

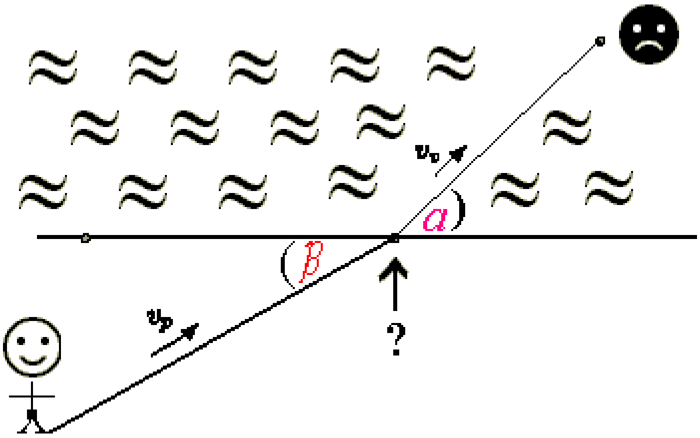
Például én körülbelül v_p=10km/h≈2,77m/s sebességgel futok és v_v=2km/h≈0,55m/s sebességgel úszom, tehát számomra a legjobb (optimális) beugrási szög

$$\alpha = arctg\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 1} = arctg\sqrt{24} \approx 78{,}46^\circ \ .$$

Egy élsportoló sebességei körülbelül v_p=100m/10s=10m/s= 36km/h és v_v=1m/s=3,6km/h, így neki az $\alpha=arctg(\sqrt{99})\approx 84^\circ$ beugrási szöget javasoljuk, végül egy gácsér esetében a becsült v_p=0,5m/s=1,8km/h, v_v=0,4m/s=1,44km/h sebességek esetén $\alpha=arctg(\sqrt{0{,}5625})\approx 37^\circ$ az optimális.

Norbert Herrmann [HN2] könyve szerint kísérletekkel és számításokkal derült fény arra, hogy *a kutyák ösztönösen* mindig a számukra legmegfelelőbb pontig futottak és a matematikailag legjobb szögben ugrottak vízbe!

A probléma általánosabban is felvethető, és a megoldás szintén érdekes. A szárazföldön beljebb is lehetünk (mint általában), és innen kell a bajbajutott segítségére sietnünk - futnunk és úsznunk:



Az előző esethez hasonló számítással kapjuk, hogy az optimális szögekre :

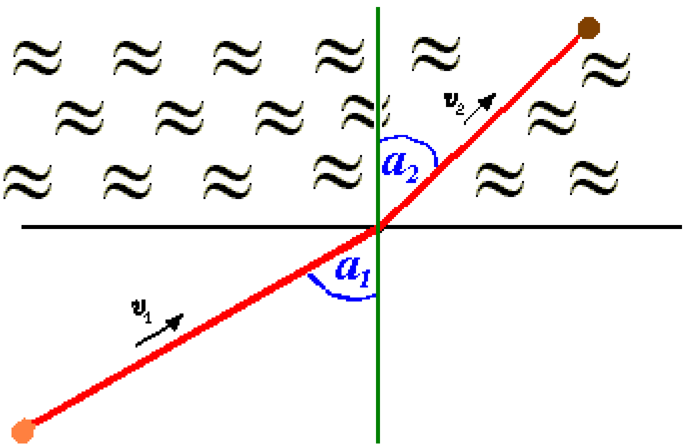
$$\frac{v_p}{v_v} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$$

A kapott összefüggés ismét azt jelenti, hogy a v_p és v_v sebességek ismeretében otthon előre kiszámolható cos(β) és cos(α) aránya, a strandon pedig már csak futnunk és úsznunk kell!

A legutóbbi összefüggés teljesen megegyezik a fizikában a **fénytörésről** tanultakkal:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)}$$

ahol v_1 és v_2 a fény sebessége a különböző anyagokban.



(A legutóbbi képletben csak azért van *sin*(α) míg az előtte levő képletben *cos*(α), mert a fizikában a fénysugár szögét a beesési merőlegeshez mérik, mi pedig a vízparthoz viszonyítottuk rohanási pályánkat.) Ki is próbálhatjuk "szárazon" : http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/MindMusz/Mindennapi-musz-start-2c.html , a 13. "*Kimentés*" fejezetben.

Magasság- és terepmérés

Akár egyszerű kiránduláskor is jól jöhet árnyék és hasonló háromszögek segítségével egy fa, szikla vagy épület magasságát megmérnünk mint Pitagorasz tette több mint 2000 évvel ezelőtt. Nagyon sok példát lehet találni távolság és egyéb adatok számítására a terepen (mint kiskatona, alaposan megtanultam boldog legénykoromban), néha kiránduláskor is használjuk a családdal. Ezeket most nem részletezzük, a középiskolai [GFgy] Geometriai Feladatgyűjteményben nagyon sok jó feladatot találunk megoldással együtt.

7. Térgeometria

A Föld gömbölyű

Misi barátom meghívott Balatonakarattyára, és a családdal néztük a Balatonon *hosszában* közeledő hajókat. Már ekkora vízfelületen is (kb. 70 km hosszú) észrevehetjük, amit eddig általában csak az igazi tengerekről (nem a *Magyar Tengerről*) hallottunk: a közeledő hajóknak először csak a csúcsát látjuk, törzsüket csak utána. Ennek megfelelően a távolodó hajóknak fokozatosan eltűnik a törzse, mintha "tengeri szörnyek nyelnék el őket" (több száz éve valóban ezt hitték sokan).

A könyv utolsó fejezetében részletesen kiszámoljuk, hogy egy *l* magasságú (vagy *l* magasságban levő) személy egy *h* magas hajó árbóccsúcsát meddig tudja szemével követni, illetve a

t=5 , 10, ... , 70 km távol levő hajónak milyen magasnak kellene lennie, hogy a gömbölyű Föld ne takarja el teljesen. Érdemes tehát fára vagy dombtetőre másznunk - ezt már őseink is tudták! Most csak pár rövid, közelítő képletet ismertetünk (bizonyítás nélkül).

8 centis szabály: *Teljesen sima vízfelületen a vízből a szemét éppen kidugó úszó az* **n** kilométer *távolságban lévő vitorláshajónak csak az* $8n^2$ centiméter *feletti részét látja.*

Mivel a síkra kiterített Balatontérkép 70 km-nek megfelelő egyenes szakaszt is tartalmaz, ezért a Balaton esetében 400 méteres magasságú takarások is lehetségesek. Ha Aliga környékén valaki a parton sétál és eltekint Tihany mellett balra, és a szeme mondjuk 2 méterre van a vízszint felett, akkor az illető 5 kilométerre lát rá a vízfelületre; 10 km távolságban már 2 méteres magasságú a takarás, 15 km távolságban már 4 méteres, 20 km távolságban már 8 méteres stb.

Tehát így is fogalmazhatunk: Ha a vízparton állva k km távolságra látunk rá, akkor $2k$ km távolságba ugyanakkora a takarás, mint amennyire mi emelkedünk a vízszint fölé, $6k$ km távolságban pedig már 25-ször akkora.

1,7 méteres szemmagasságot feltételezve sík vidéken vagy tengeren a látóhatár (horizont) távolsága 4,5 kilométer, ezért például a Balaton déli partján álló fürdőző még távcsővel sem látja az északi parton álló társát - és viszont. A közelítő számítás szerint a horizont-távolság a látómagasság négyzetgyökével arányos, azaz például a magasságot megnégyszerezve a horizont megduplázódik. Az előbb említett 4,5 km kevésnek tűnhet, mert a tapasztalat szerint az ennél sokkal messzebb levő épületek, fák, hajók is láthatók. A távolabbi tárgyakat azért láthatjuk, mert egy részük a horizont fölé emelkedik.

Hangsúlyozzuk, hogy a fenti távolsági korlátok, ameddig szemünkkel elláthatunk, nem a jó távcsövek hiánya, hanem a Föld görbültsége miatt vannak! (Ez a probléma semmit sem változott több ezer év alatt!) Csodálkoztam is kiskatona koromban: miért lehet a távcsöves "mesterlövész-puskát" 20-30 km -re "kalibrálni" (beállítani), hiszen legalább 75 *m* (!) magasra kellene másznunk, hogy ekkora távolságig ne akadályozzon bennünket a gömbölyű Föld!

Hajók és repülőgépek

Szintén a Föld gömbölyűsége miatt már több mint száz éve hajós kapitányok és repülőgépen utazók egyike sem csodálkozik azon, hogy az óceánjáró hajók, léghajók és repülőgépek *nem* egyenes vonlban, hanem "valamilyen körív" mentén szelik át az óceánt! Üssük fel csak általános- vagy középiskolás atlaszunkat: a nagyobb tengereken a főbb hajózási útvonalak nem nyílegyenesek! Ez a bizonyos körív a Földnek egy olyan *főkörének* íve, amely összeköti a kiindulási- és a célállomást. Egy (akármilyen) gömb **főköreit** úgy kaphatjuk meg, hogy a gömböt (pl. alma) a középpontján áthaladó síkkal metsszük el (pontosan felezzük el), és ennek a vágásnak a gömb felszínén (almahéj) levő nyomát tekintjük! Mellesleg ezek a körök a gömb felszínére rajzolható körök közül a legnagyobbak.

Tehát a repülőgép optimális pályáját úgy kapjuk meg,hogy a Föld középpontján, valamint a kiindulási- és a célállomásokon (ez három térbeli pont) keresztül fektetett síkkal elmetszük a Földet, és a felszínén megrajzoljuk a vágás nyomát. Ez a legrövidebb távolság a Föld két pontja között. Ha van otthon Földgömbünk, ezt a módszert rögtön ki is próbálhatjuk: válasszuk ki álmaink két pontját, feszítsünk ki ez a két pont között egy gumiszalagot. A gumiszalagot óvatosan kicsit meg kell igazgatnunk, mert szegény tapad, de magától megmutatja a *legrövidebb utat* a két kiválasztott pont között!

Térképen mindez azért nehéz és csalóka, mert egyrészt a papír síkbeli és nem gömb alakú, másrészt pedig nagyon sokféle térkép létezik: ízelítőt a középiskolai földrajzi atlasz elején láthatunk, de ez már legyen a térképészek, hajó- és repülőgép-kapitányok, és a matematikusok baja.

Gömbök

Dörzsölgessünk össze sokáig kettő, egyformán puha követ vagy téglát. Legjobb a "bölcsek köve" (YTONG), de megpuhult régi agyagtégla is megteszi. A dörzsölgetést tetszőleges (összevissza) irányba végezzük, de jó sokáig, hogy legalább 1 cm -es bemélyedés keletkezzen az egyiken. Ami egyik tégladarabon bemélyedés lesz, az a másikon épp *ugyanolyan* kidudorodás. Csak nem *gömbfelszínek*? Igen, de miért? A csiszolás miatt a tégladarabok felszíneinek olyanná kell változniuk, hogy egymásban akadály nélkül könnyen elmozdulhassanak ! Márpedig *csak a gömb* az a felület, amely önmagában bármely irányban akadály nélkül elmozdulhat. Ez egy szép (és nehéz) tétel a felsőbb geometriában, a gyakorlatban pedig már több ezer éve ismert, ugye.

A felfújt lufi, szappanbuborék, rágógumi is azért gömb alakúak, mivel a lehető legkisebb felszínt igyekeznek ezek a rugalmas anyagok felvenni, ami ismét a gömb.

Gömbök térbeli optimális elhelyezésének problémájával a Veszprémi Egyetem (ma Pannon Egyetem) híres tanszékvezető professzora, *Fejes Tóth László* akadémikus foglalkozott, a kutatást ma fia, *Fejes Tóth Gábor* folytatja. Mi csak az áruházakban játszhatjuk a "Ki tud több narancsot hazavinni egy vödörben?" társasjátékot.

Hasábok és poliéderek

"Hasábfával kenegetik" azaz jól elverik, megdobálják (nem lehet kellemes). Sajnos a legtöbb mai gyermek csak a tankönyv lapjain találkozik a **hasáb** magyarázatával *(definíciójával)* és vázlatos rajzával. Nézzünk meg egy igazi fahasábot közelebbről - vagy a faházban vagy a túloldalon:

Ennek is párhuzamos síkok az alja és a teteje, ami nem véletlen, ugyanis fűrészgéppel a rönköket párhuzamosan szeletelik (mint kolbászt a konyhaasztalon). No és az *oldalai* hogyan "készülnek"? Jómagam is kipróbáltam: fejszével *függőlegesen* hasogattam, azaz levágtam a "széleit". Emiatt lett az "alja" és a "teteje" is szabálytalan sokszög, de ugyanolyanok, vagyis *egybevágóak*! No, innen ered a tankönyv meghatározása (definíciója) : "*A hasábok alap- és fedőlapja két egybevágó, tetszőleges sokszög, oldallapjai függőleges téglalapok.*"

Hasonlóan elvont fogalom a **poliéder**, szó szerint *soklapú* test. Pedig konyhában is könnyen találkozhatunk vele: ha a krumplit egyenes (azaz sík-) vágásokkal szeleteljük vagy hámozzuk meg, vagyis nem követjük a krumpli gömbölydedségét. Ha már minden oldala síkbeli (nincs már barna héja), akkor előttünk is van egy poliéder! Vagy figyeljük meg óvodás gyermekünket gyurmázás közben. Ha egy gyurmagombócot többször erősen odacsap az asztalhoz, a gombóc benyomódik, méghozzá oldalai síkok lesznek - megint egy poliéder lesz előttünk!

Locsolócső

Hány liter víz maradt a locsolócsőben? Súlyra ugyan nehéz, a garázsban sem akarunk árvizet,vödörben sem akarom méricskélni, virágoknak kevés ... . Ez egy könnyű matekpélda: a henger hossza 50m, átmérője 3/4"=2,57cm, így sugara r = 1,285cm, vagyis a térfogat liter = dm^3 -ben:

$$V = r^2\pi \cdot h = 0{,}1285^2\pi \cdot 500 = 25{,}937\ \ell\ ,$$

vagyis két és fél vödör !

Érdemes kiszámolnunk (hasonlóan egyszerű), hogy egy csöpögő vízcsap egy nap alatt mennyi vizet pazarol el, vagy egy készenléti állapotban levő TV mennyi áramot fogyaszt - hiába. (A helyes megoldást a könyv végén megtaláljuk.)

Henger alakú poharak

Meddig kell kiinnunk egy henger alakú söröspoharat, hogy a pohár a benne maradt folyadékkal együtt a lehető legstabilabb legyen, vagyis súlypontja a lehető legalacsonyabban legyen? A megoldás természetesen a pohár alakjától és súlyától is függ, néhány egyszerűbb számolást magunk is elvégezhetünk. Az alábbi újságcikk annyiban komoly, hogy Herrmann professzort láttam egy (külföldi) TV show műsorban, a bemutatott kísérletet magunk is elvégezhetjük a konyhában. Egy tálcára egymás mellé tegyünk két azonos, közelítőleg henger alakú poharat (vagy flaskát), súlyuk legyen közepes, vagyis sem műanyag sem ólomkristály nem jó. Töltsük egyiket teli, a másikat körülbelül fele-harmadáig. A tálca egyik végét óvatosan megemelve (másik vége az asztalon marad) döntsük meg fokozatosan a tálcát. A teli pohár kb. 10 foknál eldől, a másik viszont kb. 30 fokig stabil! Hasonlót tapasztalhatunk a teli pohár helyett üres pohárral.

Herrmann professzor igazi kutatási területe természetesen nem ez, hanem gépjárművek automatikus irányítása, pl. parkolás esetén (ld. [HN1] és [HN3]).

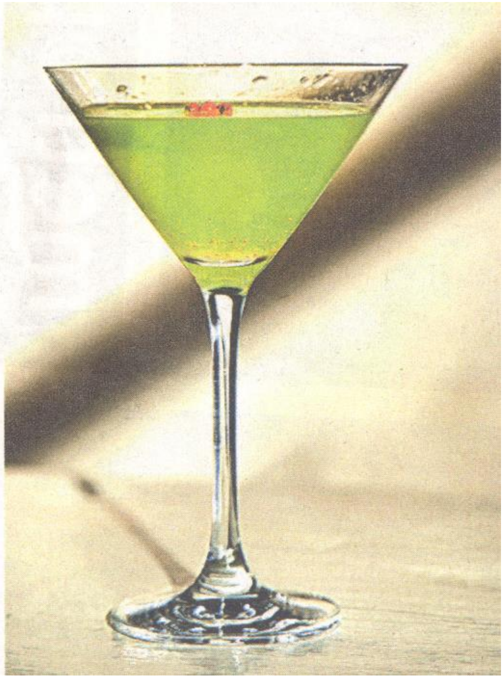
A sörivás sajátos fizikája

Hannover (mti) – A sörivás is felvethet fizikai-matematikai problémákat – véli *Norbert Herrmann,* a hannoveri Alkalmazott Matematikai Intézet tudósa.

Herrmann azt kutatja, menynyi sörnek kell lenni az üvegben vagy dobozban, hogy a felborulás veszélye a legkisebb legyen (ezzel már a nyárra készül). A kutató azt vizsgálja, mennyit kell kiinni ahhoz, hogy a felborulás veszélyének szempontjából ideális helyre kerüljön az üveg vagy doboz súlypontja. „Kutatása” szerint a sör mintegy kétharmadát helyes kihörpölni, mielőtt letesszük az üveget.

Kúpok és poharak

Tekintsünk egy (fordított) kúp alakú poharat, pl. pezsgős-poharat (vagy tölcsért), eredeti térfogatát általában még tudjuk.



a) Ha fele magasságig töltjük, a teljes térfogat hányadrésze van benne? Általában: ha magasságának *x*% részéig van töltve, akkor ez hány % térfogatnak felel meg?

b) Mekkora magasságig töltsük, ha a pohár eredeti térfogatának *felényi* italt szerenénk inni?

c*) Oldjuk meg a feladatot csonkakúp alakú pohárra is (pl. kávéspohár).

Az **a)** kérdésre talán még fejben is tudjuk a választ: a félig töltött folyadék is kúp alakú mint a pohár, hasonló testek térfogatai méreteikkel *köbösen* arányos, tehát az 1/2 magasságig levő folyadék térfogata

$$(1/2)^3 = 1/8 = 0.125 = 12.5\%$$

része az eredeti pohár térfogatának! Alig több, mint a tizede!

Még jobban meglepődünk, ha üveglapot szorítunk **(óvatosan! az üveg veszélyes!)** a pohár szájára, és ezzel az üvegtetővel lefelé fordítjuk a poharat: az alján alig látjuk a vékony folyadékréteget! (Esetleg érdemes egy megfelelő befőttes-üveg-gumit tennünk a pohár szája és az üveglap közé, a szivárgás, azaz a csalás elkerülése végett.) Az így kialakult folyadékréteg vastagságának kiszámolását érettségire készülőknek ajánljuk, az eredményt a könyv végén megtaláljuk.

b) Ha a pohár magasságának x -ed részéig van töltve ($0 \le x \le 1$), akkor hasonlóan a folyadék térfogata a pohár térfogatának arányosan x^3 része, ráadásul $0 \le x \le 1$ miatt $x^3 < x$ Ha tehát fele térfogatnyi folyadékot szeretnénk a pohárba tölteni, akkor az $x^3 = 1/2$ egyenletet kell megoldanunk, ahonnan

$$x = \sqrt[3]{1/2} \approx 0.7937 .$$

Bizony, a magasságának 0.8 azaz **4/5** részéig töltött pohárban csak fele térfogat van !

Már gyermekek is találkozhatnak a fenti problémával: német nyelvterületen az általános iskola 1.osztályába legelső napon belépő tanulókat az osztályban hatalmas, színes papírtölcsér, ún. **Schultüte** (="iskolatölcsér") várja, teli édességekkel. "*Szemmel láthatóan alig hiányzik belőle, pedig a felét már megettem*" , "*tegnap még feléig volt, most üres*" , ... , hasonló kérdésekkel kell a szülőknek megbirkózniuk.

c) Vigyázat: a csonkakúp és henger alakú edényeknél a félig-meddig töltött folyadék már *nem hasonló* az eredeti edényhez, a számítások sokkal bonyolultabbak. Egy speciális esetet a könyv végén ismertetünk.

Hordók, borosüvegek, -kancsók és még bonyolultabb edények térfogatát már felsőfokú módszerekkel is csak közelítőleg tudjuk kiszámítani, még ha színültig is vannak töltve!

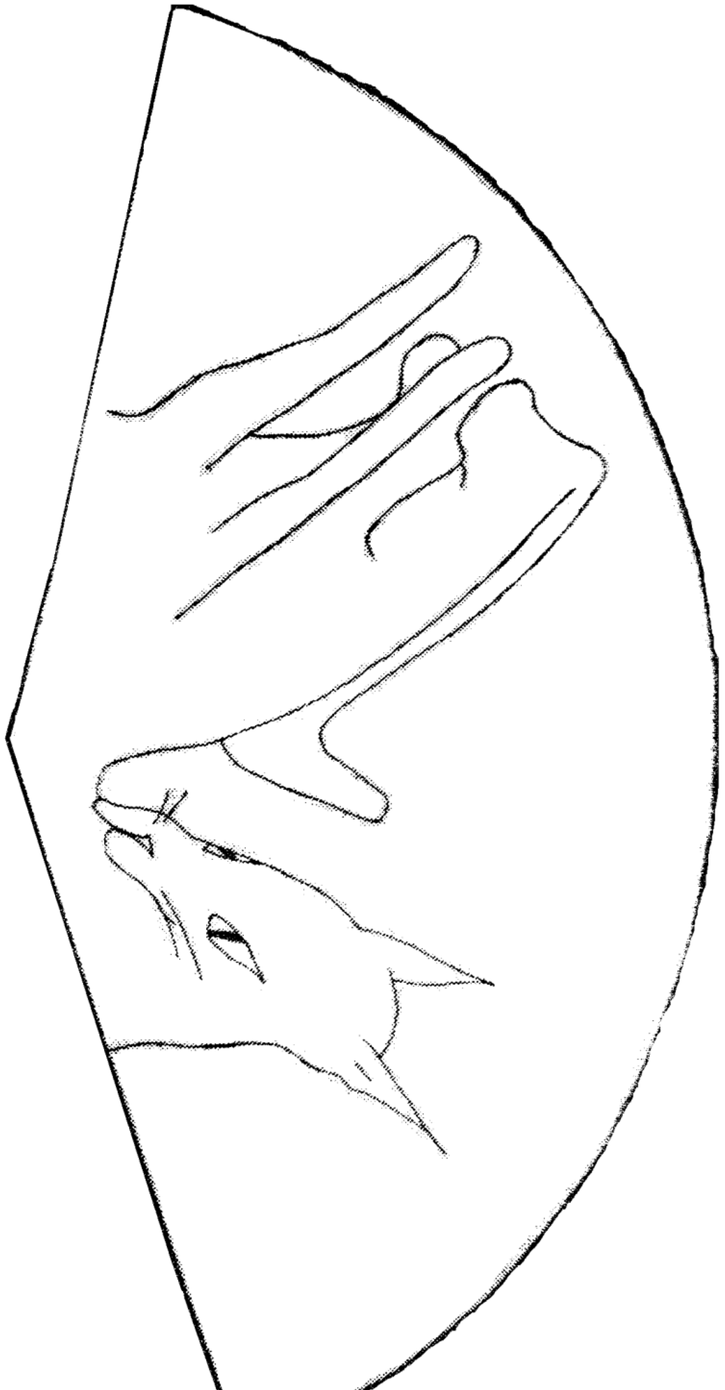
Lyukak

Keményfába, fémbe még fúrógéppel is férfimunka lyukat varázsolni. Ha már a deszkát (lemezt) már majdnem átlyukasztottam, akkor még mennyi munka (térfogat/idő) vár rám? Persze ez függ a deszka vastagságától, a fúróhegy (szakkifejezéssel fúrószár) alakjától: ék vagy gömb végű.

Lámpaernyő és szoknya

Manapság mindent a boltban veszünk és kidobunk, pedig mennyivel kedvesebb egy saját kezünkkel készített lámpa (az 5. fejezet *Hengerpalást* feladatánál említett Ernő nevezetű lakatos ismerősünk készítette), általunk választott színes papír borítással:


Legegyszerűbb persze csak körülbelül kivágni a papírt, valami körszelet-szerűséget, majd a keretre illesztve összeragasztani, a felesleget levágni, de így ajándéknak csúnya lesz. A pontos "szabásmintát" a könyv végén találhatjuk.



A képen látható lámpaernyőn valamilyen macskát ugyan sejtünk, de még összeállítás után is (vágjuk ki és ragasszuk össze!) csak megfelelő irányból: felülről látjuk az igazi, nagyon bájos cicát! Az ilyen optikai trükkökkel pár oldallal lejjebb, az *Anamorfózisok* címszónál foglalkozunk.

Csonkakúpfelületek még a szoknyák is, és nem csak **Jacques Deval:** *A potyautas* című vígjátékában találkozhatunk újságpapírból készült miniszoknyával. Bizony a világháborúk alatt sok öltöny, ruha készült krepp- és kartonpapírból!

Szemben

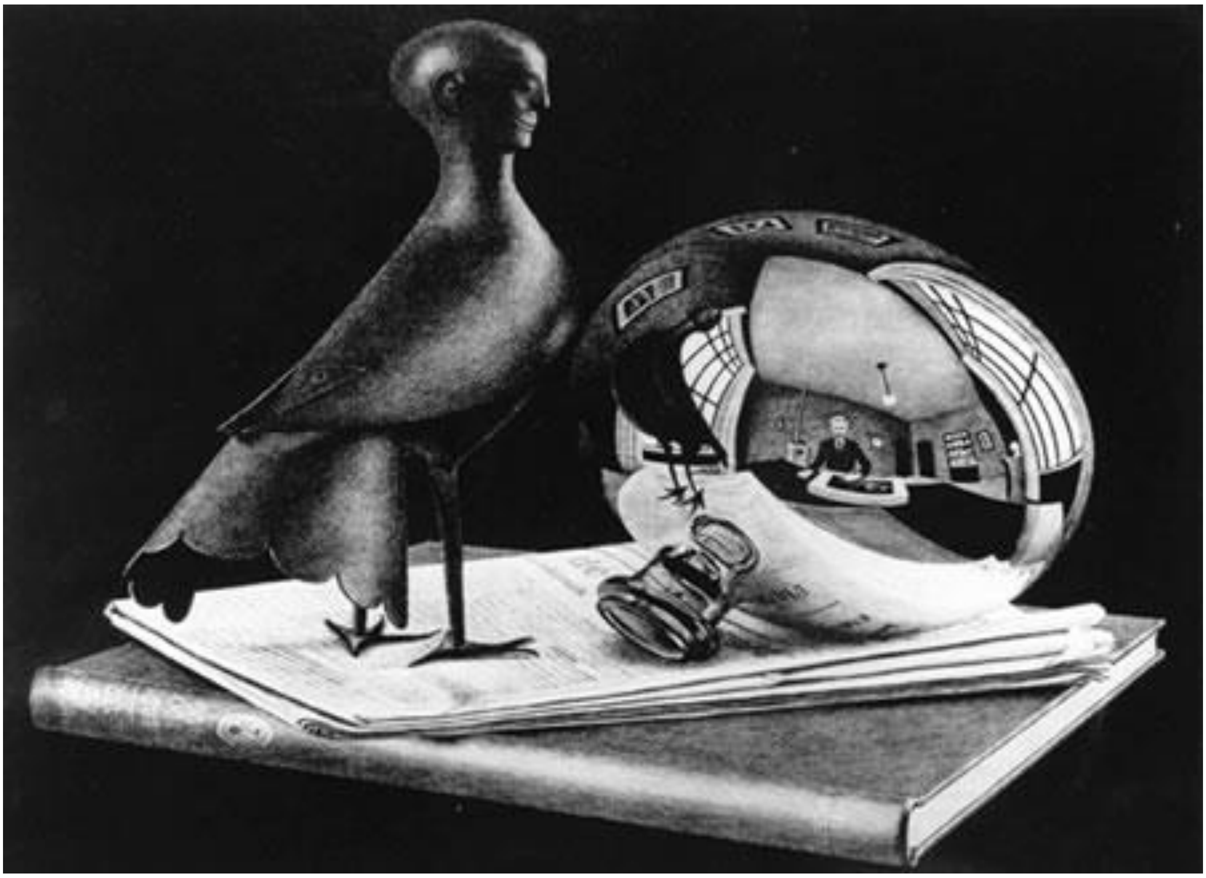
Könnyen kipróbálhatjuk: ha társunk 10-20 méterre áll tőlünk és zseblámpával felénk (de nem szemünkbe!) világít, akkor nem csak ki- be- kapcsolgatással tud villogni nekünk, hanem kicsit fel- le mozgatással is. Ezért tűnik hepehupás úton mindig úgy, hogy a szembejövő autó valamiért villog nekünk. A vezető nem is jelez nekünk, csak az úton le- felfelé imbolyog az autó és vele együtt fényszórója is: ezt látjuk villogásnak!

Az 5. fejezetben a tükrözésekről megállapítottuk, hogy valójában térbeli problémák, ezért itt folytatjuk a különféle felületek tükrözési tulajdonságainak ismertetését.

Egyéb tükröző felületek

Kezdjük a budapesti Vidámpark elvarázsolt kasélyának tükreivel: domború és homorú (vagyis szokásos és kifordított) *henger alakú tükrökben* kövérebbnek illetve soványabbnak látjuk magunkat. Hasonló játéktükröket otthon is könnyen készíthetünk: egy papírhengert (például kakaós doboz) kívülről vagy belülről ügyesen beborítunk alumínium fóliával, vagy ha találunk a garázsban egy rugalmas és fényes fémlemezt, akkor azt (óvatosan) kifelé vagy befelé hajlítgatjuk. Ezek a tükrök azért torzítanak, mert csak egyik irányban (vízszintesen) vannak meghajlítva.

A *gömbtükrök*, mint például a karácsonyfa díszek, borotválkozó tükör, útkereszteződésekben felállított közlekedési gömb



tükrök vagy az autó (domború) visszapillantó tükrei mindkét irányban hajlítottak, ezért képük hasonló az eredetihez (a tükör mindkét irányban ugyanúgy kicsinyít vagy nagyít).
Vigyázat: ezek a tükrök nem csak kicsinyítenek, hanem emiatt a távolságot is nagyobbnak tüntetik fel, ami a közlekedésben nagyon balesetveszélyes!

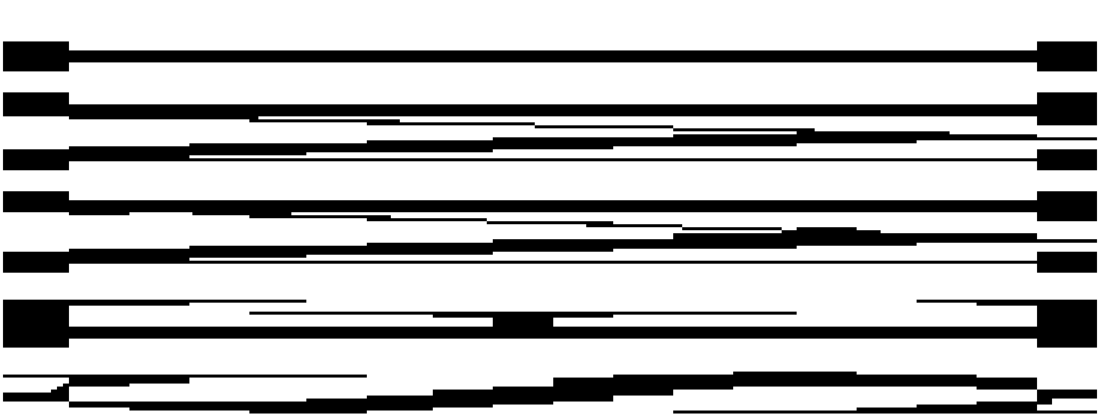
A gömbtükrök torzítását a matematikában *inverziónak* (megfordításnak) nevezik, középiskolai szakkörökön néha tanulják is. Például a Gazsó István [GI] könyvében vagy a Wikipédiában olvashatunk róla bővebben.

Anamorfózisok (*alak-átváltozások, görögül*)

A képzőművészetben, elsősorban a festészetben már több száz éve (tucatjával) készítenek "furfangos" képeket: megfelelő (szélsőséges) nézőpontból a kép jelentéktelen vagy zavaros részletei váratlanul élvezhetővé válnak, "előtűnnek a semmiből". Könyvünkben alább csak ifj. Holbein 1533-ból származó festményét idézzük: szemünket a papír (monitor) síkjához közel tartva, a kép alján látható "maszatból" hirtelen egy koponya lesz. Hasonló gyermek-rejtvényekkel is gyakran találkozhatunk: megnyújtott betűket kell elolvasnunk, mint például az alábbi feliratnál. (Ismét a papír síkjából, oldalról kell néznünk a betűket.)

ifj. Hans Holbein: *A nagykövetek* (1533)

Hasonló módon rejtettünk el egy titkos szót a következő ábrában. *Mi van ide írva ?*

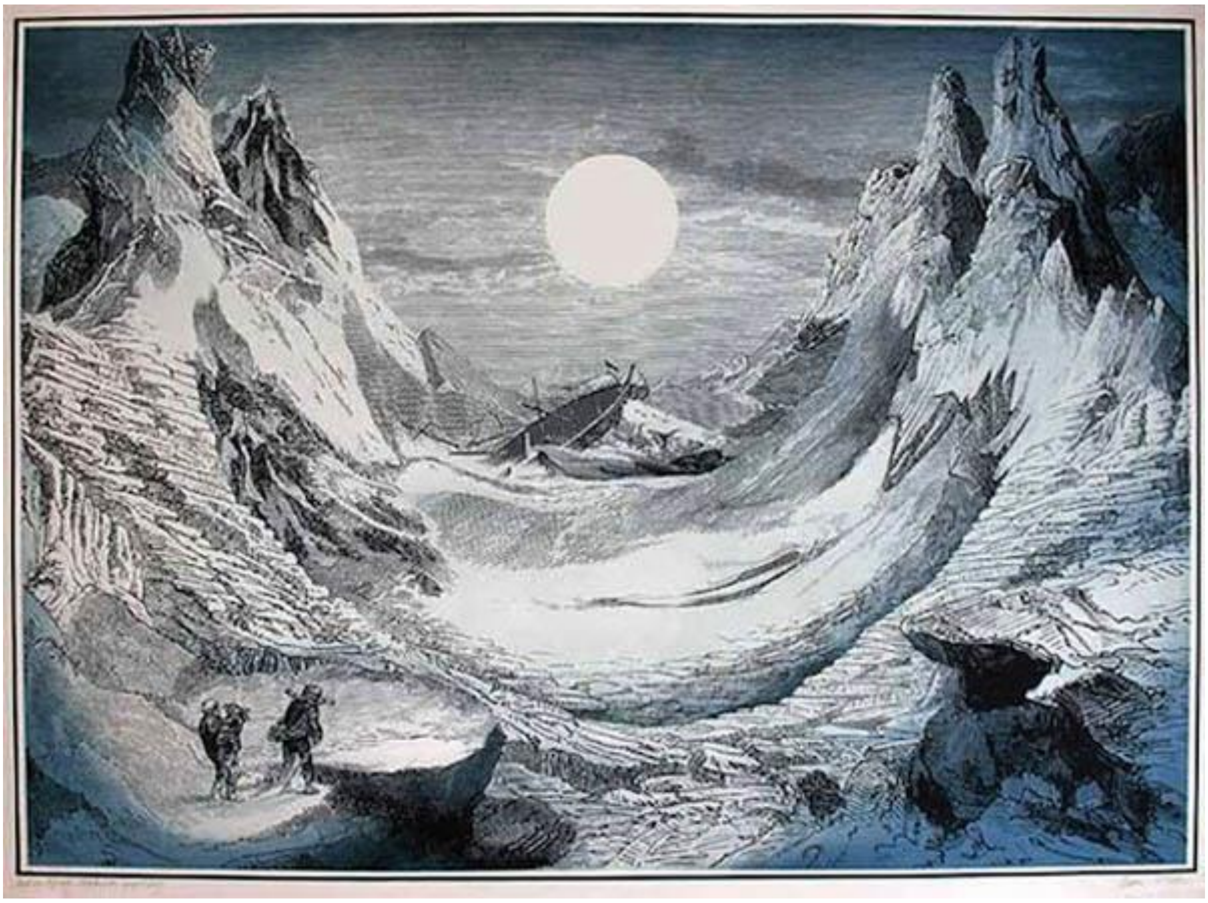


Ezzel a "trükkel" az autósok nap mint nap találkoznak: az úttestre festett jelek, az ún. **útburkolati jelek** is azért olyan elnyúlt betűk és ábrák, mert az alacsony ülésen ülő sofőrök így "méretarányosan" látják a feliratot.

Tanárok és diákok is nap mint nap találkozhatnak e jelenség *fordítottjával*: a táblára írt gyöngybetűket a tábla *mellett* állva, oldalról lehetetlen elolvasni! Ez lehet a gyenge felelet oka?

Cole magyarul is megjelent *Perspektíva* [CA] könyvében is sok meglepő képzőművészeti (optikai) jelenséget, példát és magyarázatot találunk.

Még bonyolultabbak az olyan "trükkök", amikor az "ákombákom" rajzra egy tükröző henger- , kúp- vagy gömbfelületet helyezve tűnik szemünkbe az elrejtett kép. Ezt magunk is kipróbálhattuk pár éve a budapesti *Csodák Palotájában*, az interneten is rengeteg képet találhatunk az "anamorphosis" angol szó keresésével (fényes hengert pedig már pár oldallal előbb mi magunk is készítettünk, vagy vízvezetékszerelőtől kérhetünk). Mindössze csak a nemzetközileg is elismert magyar művész, **Orosz István** egyik képét említjük meg. A hengert a rajz fehér körére (napkorong) téve - tessék kipróbálni !!! - előtűnik maga az író, Jules Verne arcképe:



Orosz István: *Titokzatos sziget*
(illusztráció Jules Verne regényéhez)

Le a kalappal *Orosz István* művészete előtt: az összes többi anamorfózis-kép tükör nélkül csak maszadék, és csak a hengerből nézve lesz élvezhető! Orosz István weboldala [OI]:

http://web.axelero.hu/utisz/page.htm .

Egy másik érdekes cím:
http://scienceblogs.com/bioephemera/2009/05/anamorphic_skulls_and_songbird.php .

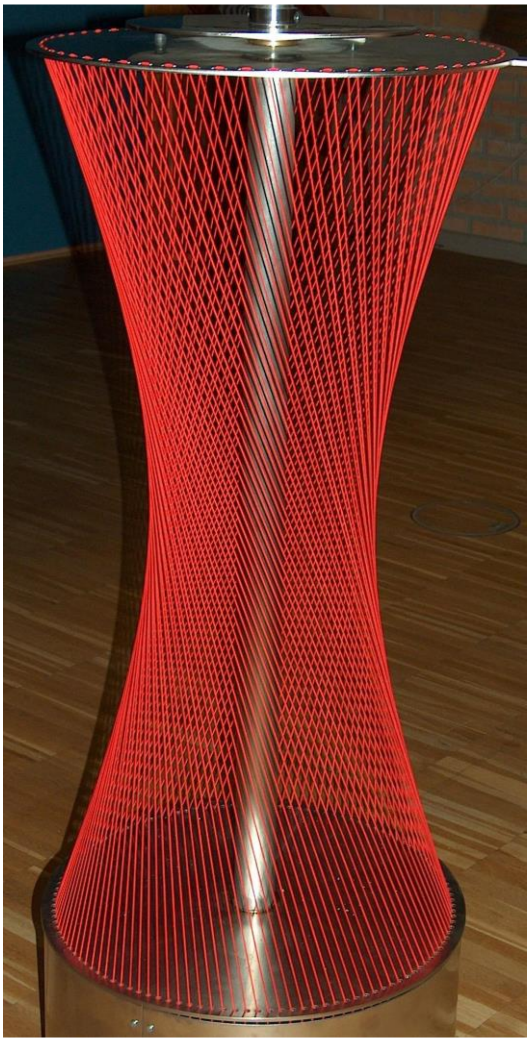
Az iménti optikai jelenség (nem túl bonyolult) matematikai elméletét például **Hickin** [MG00] cikkében találhatjuk meg, ami alapján magunk is szerkeszthetünk (igen, körzővel és vonalzóval) hasonló ábrákat. Még kényelmesebb például **Kent** *Anamorph Me!* ("változtass át engem!") [KP] ingyenes számítógép-programját használnunk:

http://www.anamorphosis.com .

Az utóbbi évtizedekben számtalan közterületen helyeztek el hasonló optikai látványosságokat: Manchester Museum of Science and Technology (USA), Vauxhall station (London), St Peter's Riverside, Sunderland (Anglia), "Sténopé" exhibition, Párizs, stb.

Hiperboloid

Gyárkéményekkel ugyan ritkábban foglalkozunk, mint pezsgőspoharakkal. Azonban az Inotán, Ajkán, Budapesten a Jövő Háza előtti téren, Guangzhou városban a 610m magas Canton Tower, és még a többi ívelt formájú (ú.n. *egyköpenyű forgási hiperboloid,* vagyis tengely körül megforgatott hiperbola alakú) tornyoknál nem csak a XX. századi mérnökök munkáját csodálhatjuk meg, hanem az ókori matematikát is! Ugyanis ők már tudták, hogy *ezt* a felületet egyenesekkel is meg lehet építeni: nem csak a tartóváza, hanem teljes egészét egyenes gerendák alkotják, befedik. **Ezt mi magunk otthon is kipróbálhatjuk a következő kísérlettel.**



Vegyünk elő két azonos átmérőjű (egybevágó) kb. 10-15 cm átmérőjű kartonpapír kört (pl. medvesajtos doboz fedelét és alját), szélükre 15-20 helyen fűzzünk cérnát, így egy kör alaprajzú, henger alakú ketrecet kapunk. Érdemes a két körbe ugyanoda fúrnunk a lyukakat, csak a szép ketrec működik. Az alsó kört az asztalra tesszük, megfogjuk, és a felsőt elforgatjuk, miközben a cérnaszálak kifeszítve legyenek. A cérnák a gyárkémény egyenes gerendái, a forgásfelület pedig a hiperboloid. Eszközünk tökééletes mása lesz a budapesti *Csodák Palotájában* található szerkezetnek!

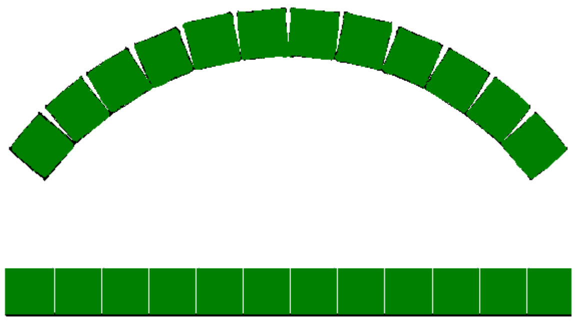
Festékréteg

A festékek dobozán a kiadósságot csak körülbelül szokták megadni, pl. " 10-14m^2 ". Persze, ez hígítástól, hőmérséklettől, a felület milyenségétől, stb. függ - gondoljuk, pedig van még egy jelentős tényező: a felület *alakja*, pontosabban *íveltsége*. Gondoltuk-e volna, hogy azonos méretű (m^2) felületekre kent azonos vastagaságú festékrétegek *térfogata* különböző? Középiskolás feladat megadott azonos felületű (felszínű) sík-lemezre, hengerre és gömbre azonos vastagságban felvitt festékréteg térfogatát kiszámolni. Természetesen a henger és a gömb esetében érdemes kívülről is és belülről is "befesteni" a felületet, hiszen a domború és a homorú felületek festékigénye más! Mit tippel a kedves Olvasó: az azonos felszínű mentőöv, azaz úszógumi (*tórusz*) bemázolásához több vagy kevesebb festék szükséges? Ugyanis a tórusz egyik irányban domború, másik irányban homorú. Pontosan hogyan is néz ki egy úszógumi? Keresztmetszete egy kis kör, de szemből nézve is egy nagy (lyukas) kör, vagyis az előbbi kis kör (a keresztmetszet) van egy nagyobb kör mentén megforgatva. Ha a kis kör sugara ρ és a nagy kör sugara r , akkor a tórusz felszíne

$$A = 4\pi^2 r\rho \,.$$

A festékrétegek vastagságainak részletes számolásait is megtaláljuk a könyv végén.

Számolás nélkül mi magunk is megmagyarázhatjuk, hogy miért és hogyan változik a szükséges festék mennyisége a felület ívelése (görbültsége) miatt. Ha például először egy sík lemezt festünk be festékkel, majd hengerré csavarjuk száradás után, akkor a festék lepattogzik. Miért? "Szeleteljük fel" a sík lemezre kent festéket kis kockákra (mint a süteményt a tepsiben), és figyeljük meg e kis kockák elmozdulását a hajlítás során: kifelé állnak, mint a fogaskerék fogai. A közöttük levő hézagokat kell kitöltenünk még plusz festékkel, ezért nagyobb a hengerpalást festékigénye.

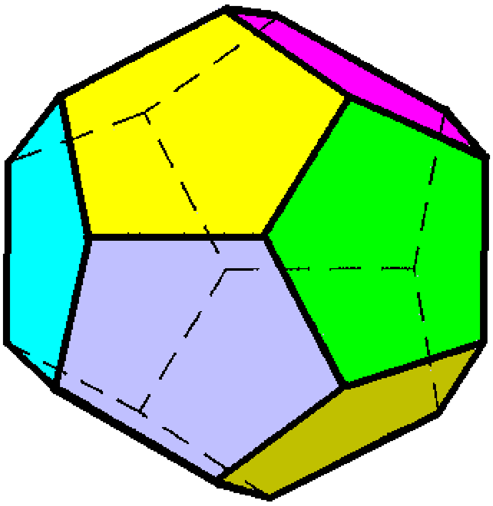


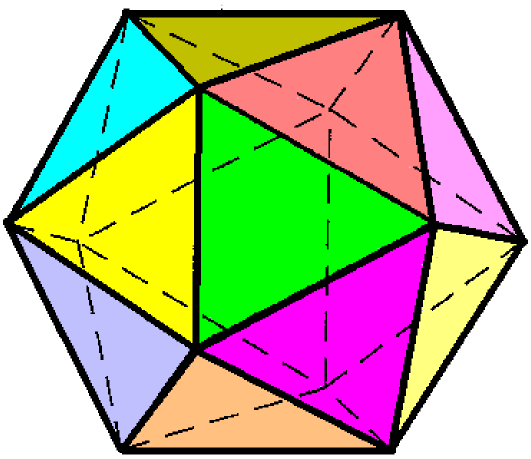
A gömböt pedig úgy kaphatjuk a hengerpalástból, hogy még egy irányban is meghajlítjuk.

Ha pedig a a hengerpalást vagy gömb belsejét kívánjuk befesteni, akkor az előbbi síkot festékes felével befelé kell hajlítanunk. Ekkor a kis kockák egymásba csúsznak, ami azt jelenti, hogy kevesebb festék kell, hiszen egy réteg festékről van szó, a kockáknak megfelelő festék-részeket nem gyömöszölhetjük egymásba ! (A részletes számolásokat megtaláljuk a könyv végén.)

Dobókockák

A *hatoldalú kockát* (**hexaéder**) mindenki ismeri, játszunk is vele már többezer éve. Középiskolában tanultuk a többi szabályos testet is: tetra-, okta-, dodeka- és ikozaéder, *nincs több* (bebizonyított Tétel!).





Dodekaéder (12 lapú) *Ikozaéder* (20 lapú)

Játékboltban néha kaphatók is ilyen dobó alkalmatosságok, oldalain (lapjain) pöttyökkel vagy számokkal kidíszítve. Ezekkel a kis fa- (műanyag-) darabokkal nem csak 1-től 6-ig, hanem 1-től 12-ig vagy 1-től 20-ig lehet véletlenszerűen kapni számokat. Nagyon lényeges, hogy a fenti testek mindegyik lapjukra ugyanolyan gyakran ("gyakorisággal") gurulnak, így a kapott számok egyenlő eséllyel ("egyenletesen") fordulnak elő, ha nagyon sokszor (kb. milliószor) gurítjuk el őket.

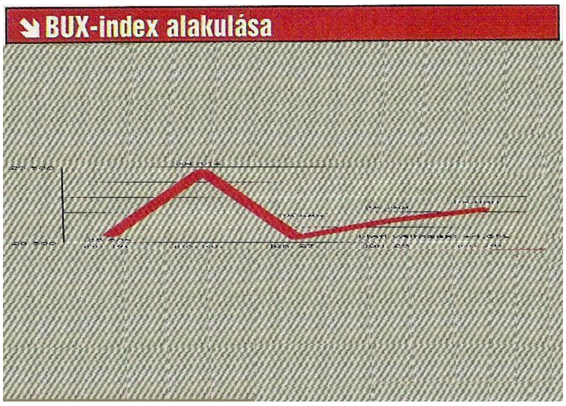
Kisfiam (általános iskolában) óra alatt persze néha unatkozott, játszadozott, és kitalált egy olyan testet, amelynek nem csak 12 vagy 20 lapja lehet, és gurítgatva bármelyik lapján ugyanakkora eséllyel állhat meg. Pontosabban: bármilyen *n* természetes számot mondok neki, pl. n=37, kiszalad a garázsba, és pár perc múlva hozza is az n=37 lapú figurát. Mi a titka? A könyv legutolsó fejezetében eláruljuk!

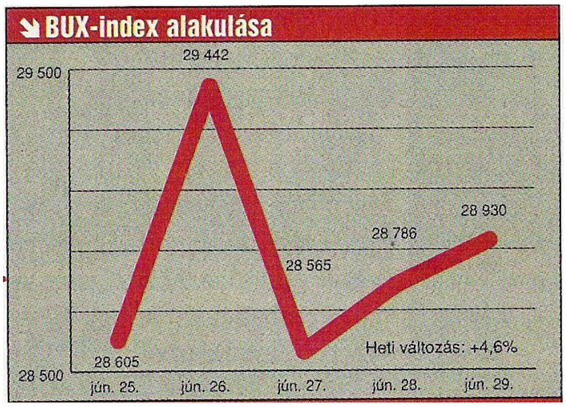
Nagyon sok játéknál (pl. Catan telepesei) kettő vagy több hatoldalú kockával dobunk és a kapott számokat *összeadjuk*. Felhívjuk a figyelmet azonban arra,hogy a kapott számok nem azonos eséllyel fognak szerepelni: például a 6 többféleképpen állítható két szám összegeként mint például a 2 . A 10. fejezetben és a Szerző [SzI11] cikkében találunk még érdekességeket a kockadobásokkal és a véletlenekkel kapcsolatban.

8. Szemléltetés és becsapás

Mennyire ingadozik?

Egyik reggel két különböző hangvételű újságcikkel találkoztam, **ugyanarról** (!) az eseményről szenzációztak, de még hogyan!? "*Már hetek óta alig mozdul!*" - hangoztatta az egyik, és a baloldali ábrán valóban lapos a görbe. "*Ekkora ingadozást régen láttunk*" - így a másik, és a a jobboldali grafikonon valóban hatalmas ugrást és süllyedést látok. Mi tehát az igazság?

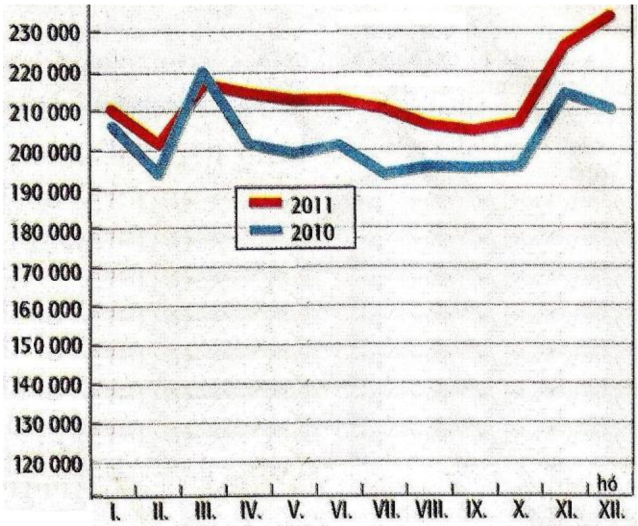




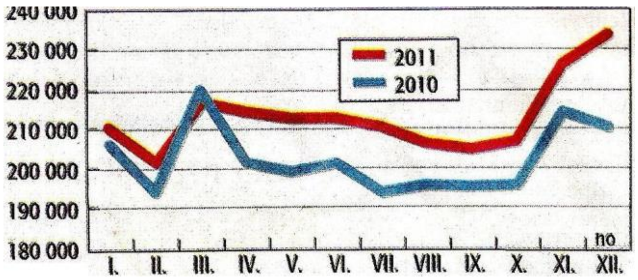
Ha alaposabban szemügyre vesszük a két grafikont, láthatjuk, hogy valóban ugyanazokat az adatokat ábrázolják, csak függőlegesen összenyomva az egyiken, jól széthúzva a másikon. A függőleges tengelyen a beosztások is sűrűbbek vagy ritkábbak (kisebb vagy nagyobb az egység). EZ az optikai csalódás, pontosabban **optikai csalás** magyarázata! A fenti újságcikkek írói vagy maguk is becsapódtak, vagy tudatosan választották az egyik vagy másik grafikon-típust illusztrációnak!

Kedves Olvasóm,a jövőben ne hagyja magát így megtéveszteni! A tengelyeken vett beosztások mellett lényeges a mértékegység is: **ezer** mm ugye nem sokkal több **egyetlen** km -nél?!

Hasonlítsuk össze az alábbi két grafikont is! Amíg az egyiket szemléljük, takarjuk le egy kis papírral a másikat, és fordítva!



Íme a másik (fentit letakarni!):



A beosztások ugyanakkorák a függőleges tengelyeken, sőt a két színes grafikont egymásra is tehetjük, másolhatjuk, egybevágóak. Miért látjuk mégis a felső ábrát kevésbé hullámozni, mint az alsót? Mert az alsó, vízszintes tengelytől messzebb vannak a színes görbék, így jobban érzékeljük az ábrázolt mennyiség nagy méretét és a *hozzá képest* (valóban) aránylag kicsi ingadozást. Az alsó ábrán pedig a függőleges tengely beosztása rögtön 180000 -nél kezdődik, ezért kerülnek a színes görbék nagyon közel a vízszintes tengelyhez, távolodásuk is legalább ennyi, és ezért érezzük a hullámzást aránylag nagynak! A valóságot pedig az első ábra közelíti jobban: minden mennyiséget a 0 -hoz kell viszonyítani! A második ábrát a helytakarékosság indokolja, de tudatában kell lennünk a valóságot torzító hatásával!

A fenti torzítások (manipulációk) széles körben ismertek a szakirodalomban, "hazugságfaktor" -nak (-tényezőnek) nevezik. Ugyanazokat a valós adatokat mutatja mindegyik grafikon, csak más súlyozással, más tálalással! Nekünk sem árt felkészülnünk, alaposan odafigyelnünk a részletekre: - a függőleges tengely beosztásaira!

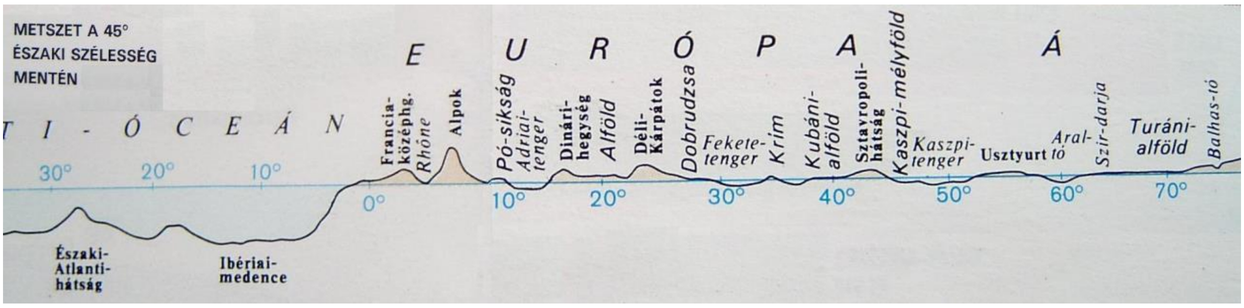
Nagyon sok függvény nagyon "lapos" (majdnem vízszintes) tud lenni, mint például $f(x) = x^3 + 7.5x^2 + 18x$ a $-4<x<-1$ szakaszon (intervallumon). Pontos szélsőértékeit (maximum, minimum) a grafikonon lehetetlen megkeresni, akárhogyan is nyújtjuk meg vízszintesen vagy függőlegesen a grafikont. Emiatt van szükség felsőbb matematikai analitikus eszközökre, például deriválásra.

Az előző problémában említett torzítás nem újkeletű, csak szándékos megtévesztő használata ellen van kifogásunk! Alább néhány "békésebb" felhasználásával foglalkozunk.

Torzítások

A legegyszerűbb torzítás úgy jön létre, hogy egyik és másik irányban a nagyítás mértéke nem ugyanakkora, mint például a 7. fejezetben említett henger alakú tükrök esetében ("Egyéb tükröződő felületek").

Földrajzi atlaszokban találkozhatunk ilyesmikkel a leggyakrabban. Például földrészek vagy tengerek domborzati hosszmetszetében vízszintesen és függőlegesen rendszeresen különböző egységeket választanak. Nyilvánvalóan csak így fér rá a könyv lapjaira, de a hegyek és tengeri árkok vonulatai (felfelé vagy lefelé) és görbületei jól szemléltethetőek. Pontosabban, a többszáz kilométeres (vízszintes) földrész vagy tenger esetében a magassági (függőleges) eltérések összehasonlíthatatlanul aprók: még a 10 kilométert is alig érik el! Ezt a valóságot lekicsinyítve a többszáz cm vonalon kellene észrevennünk az 1-2 cm függőleges ingadozásokat!



Sok helyen láthatunk domború város- vagy Magyarország térképet: itt is a vízszintes (asztallap síkja) és függőleges méreteket szükségképpen módosítani kell a fentiek miatt.

Hasonló okok miatt nem teljesen arányos (hasonló) kicsinyítést alkalmaznak a *játékvasutaknál,* például szemmel láthatóan a sínek és a kerekek peremei aránytalanul nagyok a játékkocsik méreteihez képest. Ez a torzítás onnan ered, hogy az asztali sínpálya aránytalanul rövid az állomásokhoz, tereptárgyakhoz és a vonathoz képest (kicsi az asztal). Ha a kocsik sebessége arányos lenne a sínpályához, akkor nagyon lassan közlekednének a vonatok: legalább 10-20 perc alatt jutnának el az asztal egyik végéről a másik végéig. Tehát a játékvonatok szokásos sebessége aránytalanul nagy, ami miatt meg kellett növelni a kerekek peremeit és a sínek magasságát is - de ez már inkább fizika.

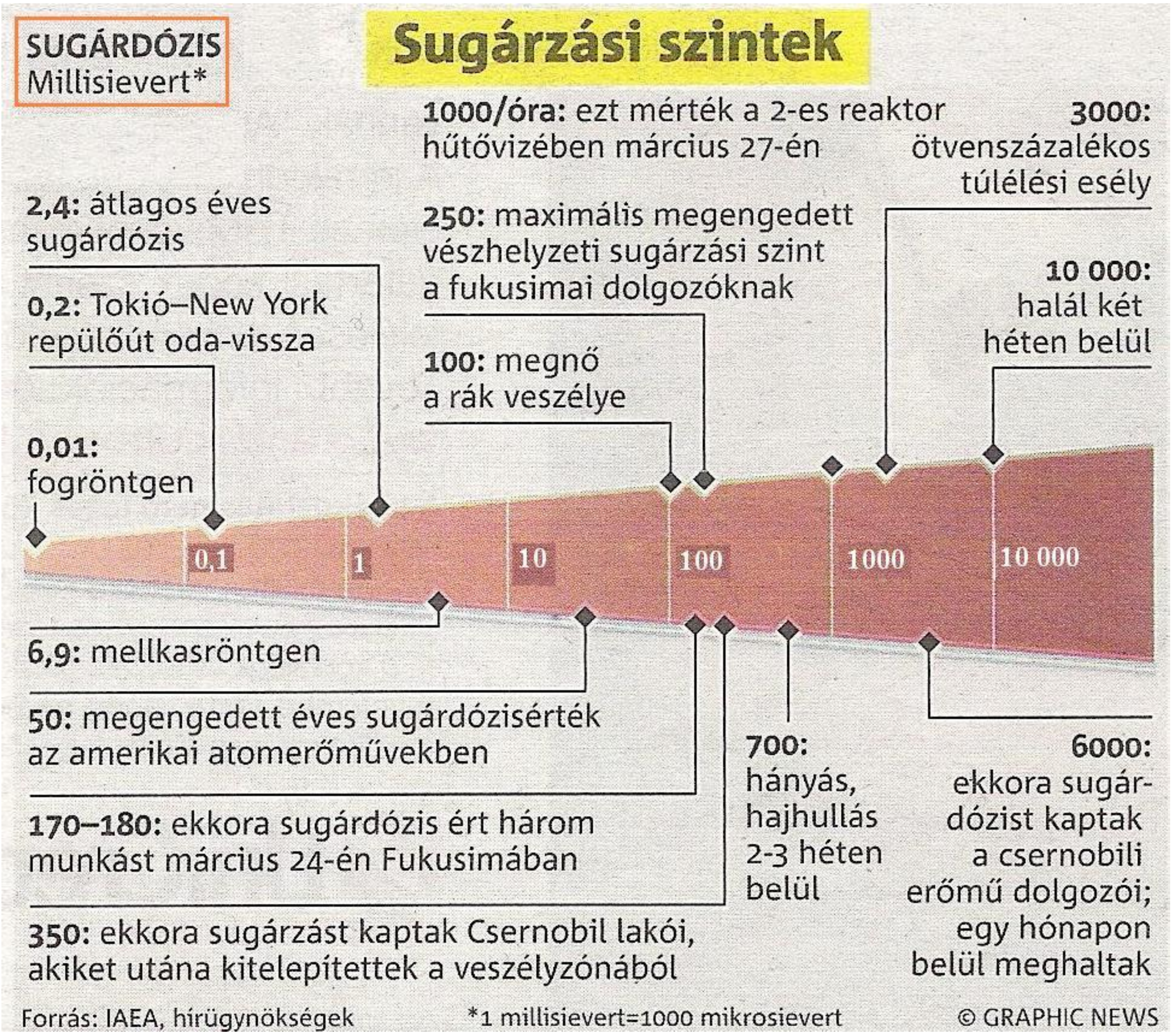
Hasonló problémákkal találkozik az operatőr, aki tengeri csatát filmez viharos fürdőkádban. Ennek technikai és egyéb részleteiről sokfelé lehet olvasni, most inkább evezzünk más vizekre.

Nem egyenletes torzítások

A még nagyobb távolságok (pl. kozmikus méretek) esetén már a tizedére- ezredrészére történő csökkentés sem elegendő. A tér különböző részeit más-más léptékben kell ábrázolnunk, hogy minden lényeges részlet látható legyen. Nem kell Kecskemétre utaznunk (bár érdemes!), hogy a Naprendszer bolygóinak modelljeit a város különböző helyein felkereshessük , elég ismét a földrajzi nagy atlaszt kinyitnunk.

Például a légkör (szférák) ábrájánál a rajz alsó része 10km, a következő (ugyanekkora) rész már 100km, utána (ugyanekkora rajzon) 1000km, stb. következik. Nyilván a légkör felfelé rohamos ritkulása az oka, hogy egyre nagyobb sávot tudunk / kell összesűríteni ugyanakkora rajzon!

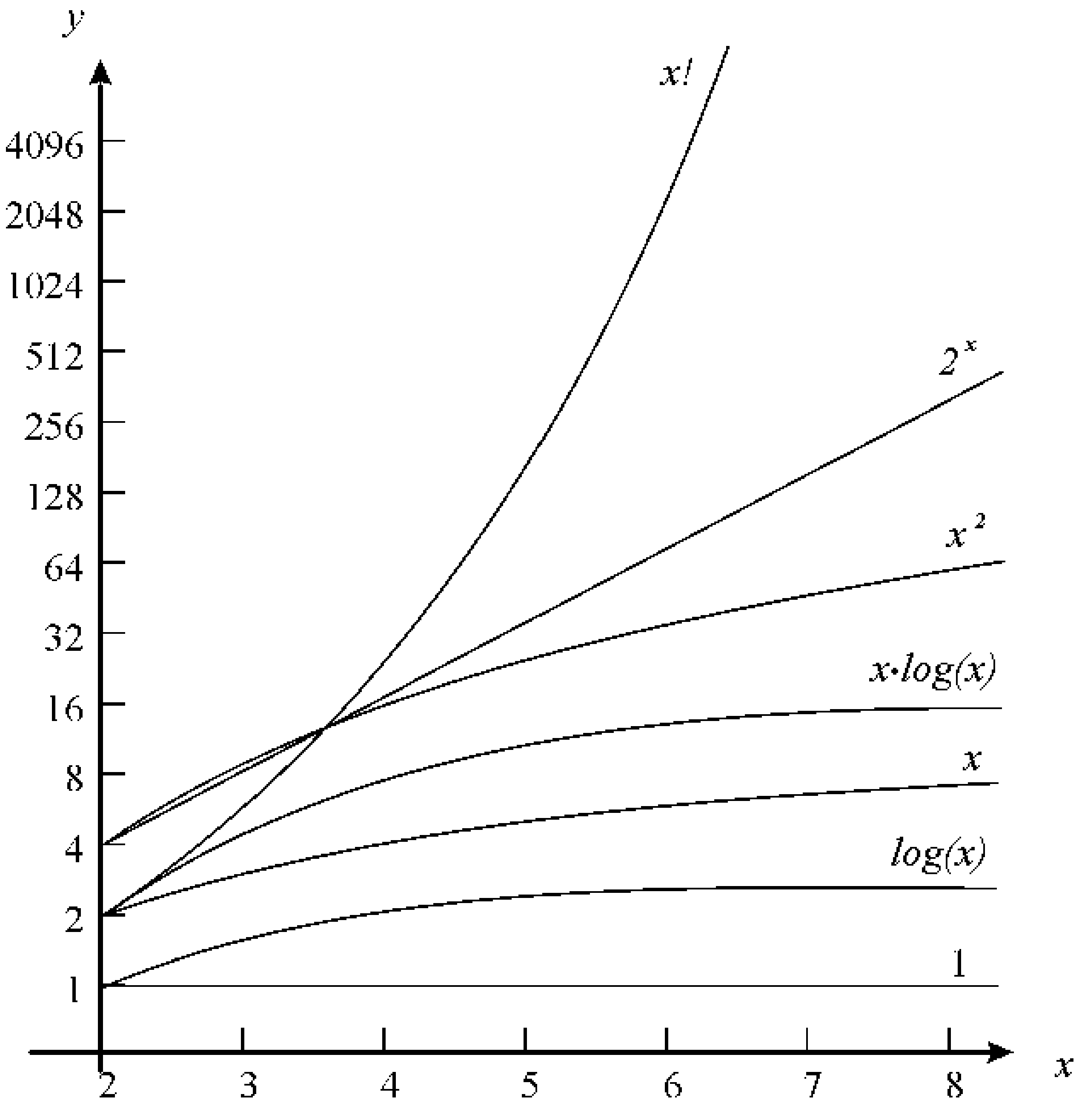
No, és a mindennapokban én mikor utazom a Kozmosz vagy akár csak a légkör magasságaiba? - kérdezi kedves Olvasóm. Nézzük meg *például* az alábbi ismertető ábrát az atom- és röntgen- sugárzásokról, amik ugye gyakran érintenek hétköznapi embereket:



Mindkét sugárzás elég veszélyes, már az 1 millisievert alatti értékeket is pontosan kell mérnünk. Azonban a 100 feletti értékeknél +/- egy-két tucat millisievert már se nem oszt se nem szoroz, itt lehet (sőt kell is) nagyobb léptékben ábrázolni!

Hasonló torzított ábrázolással bizony sokfelé találkozunk, például a hangerősség (decibel) sem egyenletes mértékegység. Minden grafikonon érdemes a skálabeosztást is megnéznünk, ne csak az ábra "szépségében" gyönyörködjünk! A nem egyenletes torzításokat **nemlineáris** ábrázolásoknak hívják (szó szerinti fordítás).

Nem is olyan régen még minden papírboltban kaphattunk a milliméterpapírhoz hasonló logaritmus- és szemi- (félig) logaritmus- papírokat, ma az interneten kell keresnünk ilyesmiket (például a Szerző [SzI 14] cikkében). A mérnököket és a matematikusokat nem lepi meg, hogy az iskolában megismert x , x^2 , 2^x és egyéb függvényeket a hagyományos Descartes-koordinátarendszer helyett például *szemilogaritmikus* rendszerben felrajzolva egészen más görbéket kapunk:



Az előző ábrán láthatjuk, hogy a szokásostól eltérően a vízszintes (x) és függőleges (y) tengelyeken a beosztások távolsága (egység) nem ugyanakkor, sőt az y tengelyen levők felfelé sűrűsödnek. Kb. 1cm vízszintes sáv a rajz alján 1 egységnyi, míg a rajz tetején már 2048 egységnyi "légkört" sűrít 1cm vízszintes sávba. Az y tengelyen levő skála azért logaritmikus, mert minden y valós szám az **1 számtól** $log_2(y)$ cm -re van: például a 32 számot $log_2(32)=5$ cm -re találjuk 1 -től. (Azért kezdünk a 1 számmal, mert $log_2(1)=0$, és 0-nak nincs logaritmusa.)

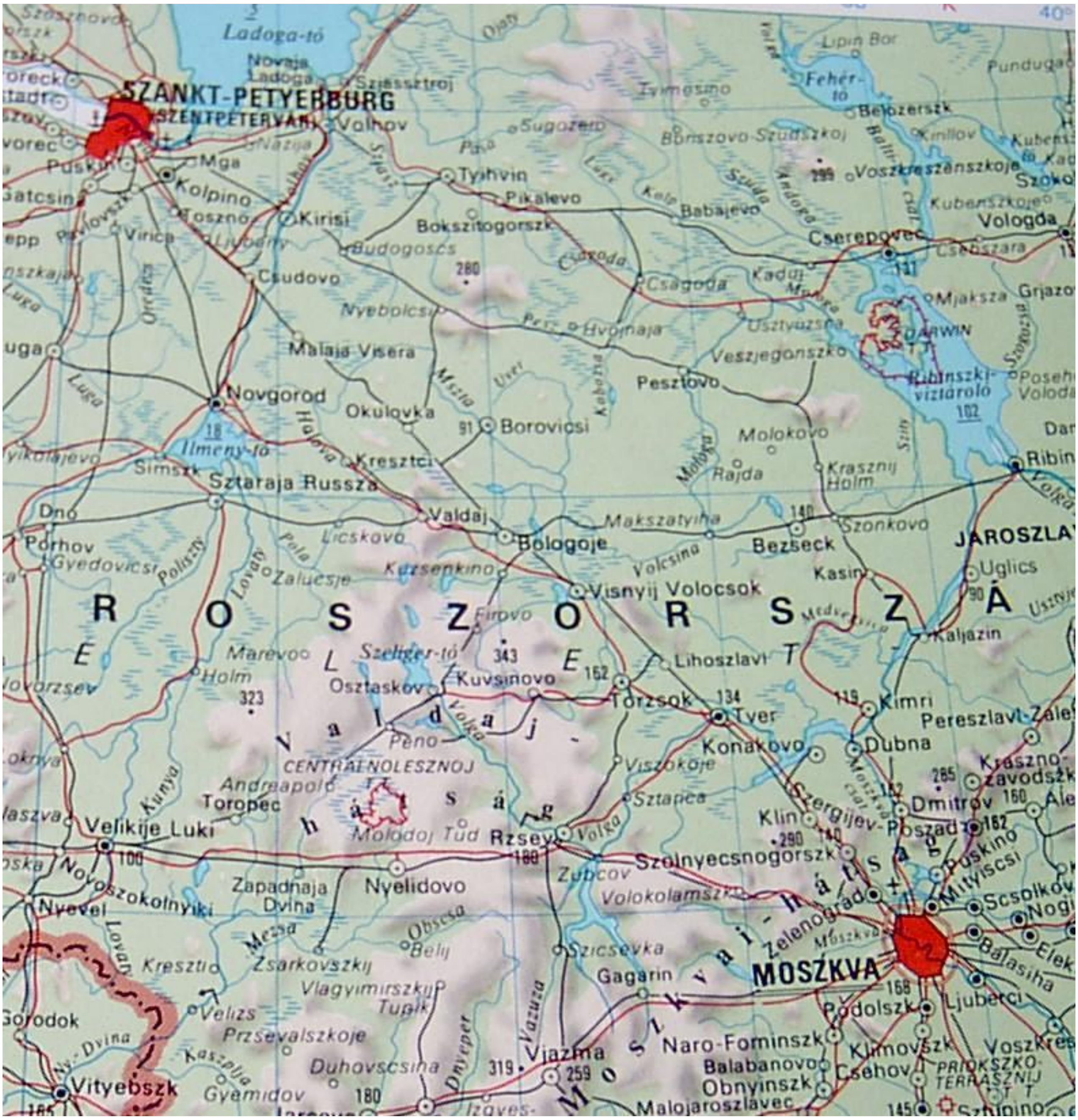
Külön témakör (akár közép- akár felsősokú oktatásban) a **linearizálás módszere**: különböző függvénytípusok grafikonjai megfelelően torzított koordinátarendszerben (papíron) ábrázolva egyenesek, vagyis a függvények "kiegyenesednek". A fenti ábrán például a 2^x "exponenciális" függvény egyenesedett ki, ami a szokásos koordinátarendszerben egy felfelé ívelő görbe. Ez pedig nagy segítség fizikusoknak, vegyészeknek, statisztikusoknak, mérnököknek: a néhány mért és berajzolt értékhez egyszerűen csak egy egyenes vonalzót kell illeszteni, és máris megrajzolható a függvénygörbe, sőt a vizsgált jelenség adatai (paraméterei) is leolvashatók az ábráról. Persze, ma ezt már számítógép végzi (pl. Excell), de az elv még mindig a régi.

(Matematikai) becsapásról és szemléltetésről bővebben olvashatunk a Szerző [SzI 14] cikkében.

Végül két anekdota jut eszembe, az Interneten egyszerű kereséssel több tucat helyen olvashatunk róluk.

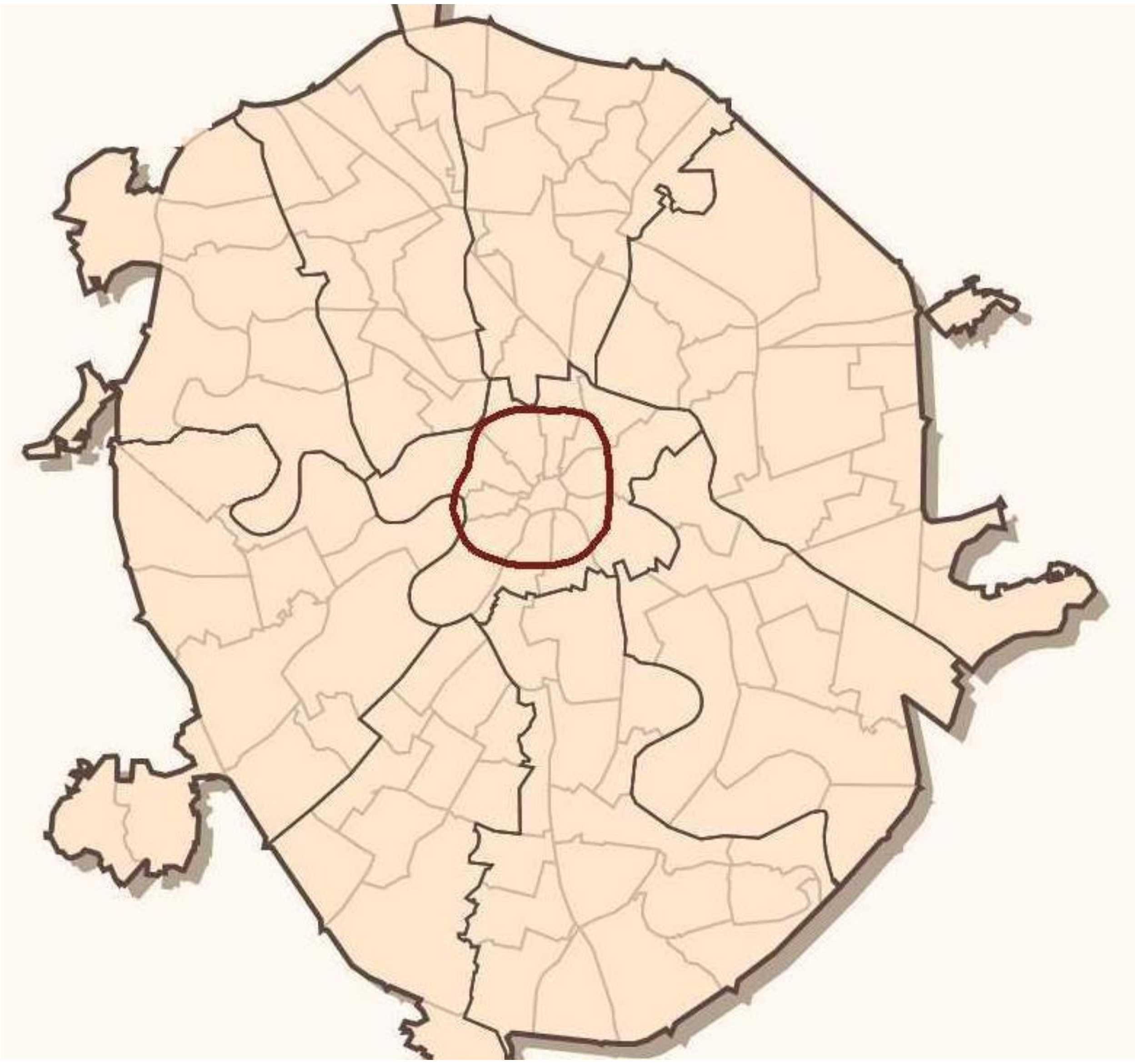
Cárvonalzó

A Moszkva-Leningrád közötti vasútvonalat a térképen is érdemes megszemlélnünk: egy kis *ujjnyi félkör* kivételével egyenes. A hagyomány szerint a Cár tervezte a vasútvonalat: vonalzóval összekötötte a térképen Moszkvát és Leningrádot (Szentpétervárt). Az építkezéskor pedig még azt a vonalat is hűen megvalósították, ahol az atyuska ujja lelógott a vonalzóról ...



Sztálin kávéscsészéje

Moszkvában van egy kör alakú metróvonal, amit barna színnel jelölnek. Ezt a metróvonalat maga Sztálin tervezte, méghozzá úgy, hogy a térképre tette a kávéscsészéjét. Állítólag még ceruza sem kellett neki.



9. Kártyajátékok és bűvésztrükkök

Bármilyen hihetetlen, gyermekkoromban a matematika alkalmazásával legelőször Rodolfo (Gács Rezső, született Gross Rezső, 1911-1987) bűvészkönyveiben találkoztam. Külön kategória az *automatikus* mutatványok műfaja: a bűvésznek semmilyen trükkre nincs szüksége, a kártyalapok a matematika törvényeinek segítségével szórakoztatják a közönséget. Kezdő bűvészinasoknak különösen ajánljuk ezt a fejezetet!

Hókuszpókusz

Kedves barátom, Tamás atya fedte fel előttem nem olyan régen ennek a szónak az eredetét. Alig száz évvel ezelőtt ugyanis minden mise latin nyelven folyt, és *átváltoztatáskor,* az ostya felmutatásakor a pap (néha kicsit halkan) idézte: "*Hoc est corpus meus!*" (=Íme, az én testem), amit nem nehéz hókuszpókusz-nak érteni, főleg nagyotthalló nénikék és bácsikák esetében.

Maria Prope Vivet Mutuo

Nos, ezek a varázsszavak még annyit sem jelentenek, mint a hókuszpókusz, de még halkan sem szabad motyognunk, mert ha a közönség meghallja őket, akkor azonnal rájön a trükkre, amit *Mikó Ernő* nagypapától hallottam. Sajnos csak "francia" kártyával lehet előadni, "magyar" kártyával nem.

Leteszünk az asztalra 20 kártyalapot: 10 figurát, mindegyikből kettőt-kettőt (a szín most nem érdekes), táblázat alakban: négy sorban és öt oszlopban. Egy jelentkezőt megkérünk, hogy válasszon ki egy neki tetsző figurát (pl. Király), de ne árulja el nekünk, hogy mit választott. Csak annyit kérdezünk, hogy melyik sorban vagy sorokban, szerepel ez a figura. Mi *azonnal* rávágjuk, hogy melyik figurát választotta.

A 10 figura két-két példányban nem olyan sok, egy vagy két sorban meg lehet könnyen találni az azonosakat egy jó fejű bűvésznek, mondhatja bárki. Mi azonban nem akárhogyan tettük le a lapokat az asztalra, hanem matematikai meggondolás után:

M	**A**	**R**	**I**	**A**
P	**R**	**O**	**P**	**E**
V	**I**	**V**	**E**	**T**
M	**U**	**T**	**U**	**O**

A fenti táblázatot csak fejünkben idézzük fel, az asztalra pedig mindegyik betű helyett egy neki megfelelő figurát teszünk. A táblázat úgy van megszerkesztve, hogy mindegyik figura *egyértelműen* kitalálható legyen a néző által megmutatott sorokból: az 1. sorban *csak* az **A** betű szerepel kétszer, hasonlóan a 2., 3. illetve 4. sorokban csak a **P**, **V** illetve az **U** betűk szerepelnek kétszer. Az 1. és 2. sorban *csak* az **R** betű közös, hasonlóan csak az **I** betű szerepel az 1.és 3. sorban, és így végig mind a 10 figurán. (Csak a táblázat könyebb megjegyzéséhez kellenek a varázsigék) Ez a trükk magyarázata!
Teljesen mindegy, hogy melyik betűnek nálunk melyik figura felel meg, csak az a fontos, hogy **1 betű = 1 figura** legyen a a megfeleltetés! Például:

E = kettes	**T = Tízes**
V = ötös (V)	**P = Pubi (fiú)**
U = hatus (hatos)	**M = dáma (Mária)**
O = nyolcas	**R = Rex (király)**
I = kilences	**A = Ász**

Párok

Gyermekeimmel sokszor játszottunk "párosítós kártyával": mindegyik lapnak van párja. Például a cseresznye párja a meggy, szék párja az asztal, macilánynak a macifiú, stb. Mindenkinek osztunk öt lapot, majd egyesével húzunk a

pakliból. Ha a pakli elfogyott, egymástól (utána következőtől) húzunk. Eközben, akinek kezében van egy pár mindkét kártyája, azt a párt leteszi maga elé, és az győz, aki több párt gyűjtött.

A Fekete Pétert általában kivettük, hogy bőgés ne legyen. De így is izgultam még, nehogy én (Apa) győzzek, különösen ha csak ketten játszottunk **Balázskával**. Pár tucat parti után csillogó szemekkel megnyugtatott: "*Apu, ha ketten játszunk, akkor mindig döntetlen!*" Pár évvel később már be is bizonyította ezt a tételt, a bizonyítást a könyv végén ismertetjük.

Tétel: *A párosítós kártyajátékban, ha a lapok száma osztható néggyel,akkor két játékosnál a végeredmény mindig döntetlen.*

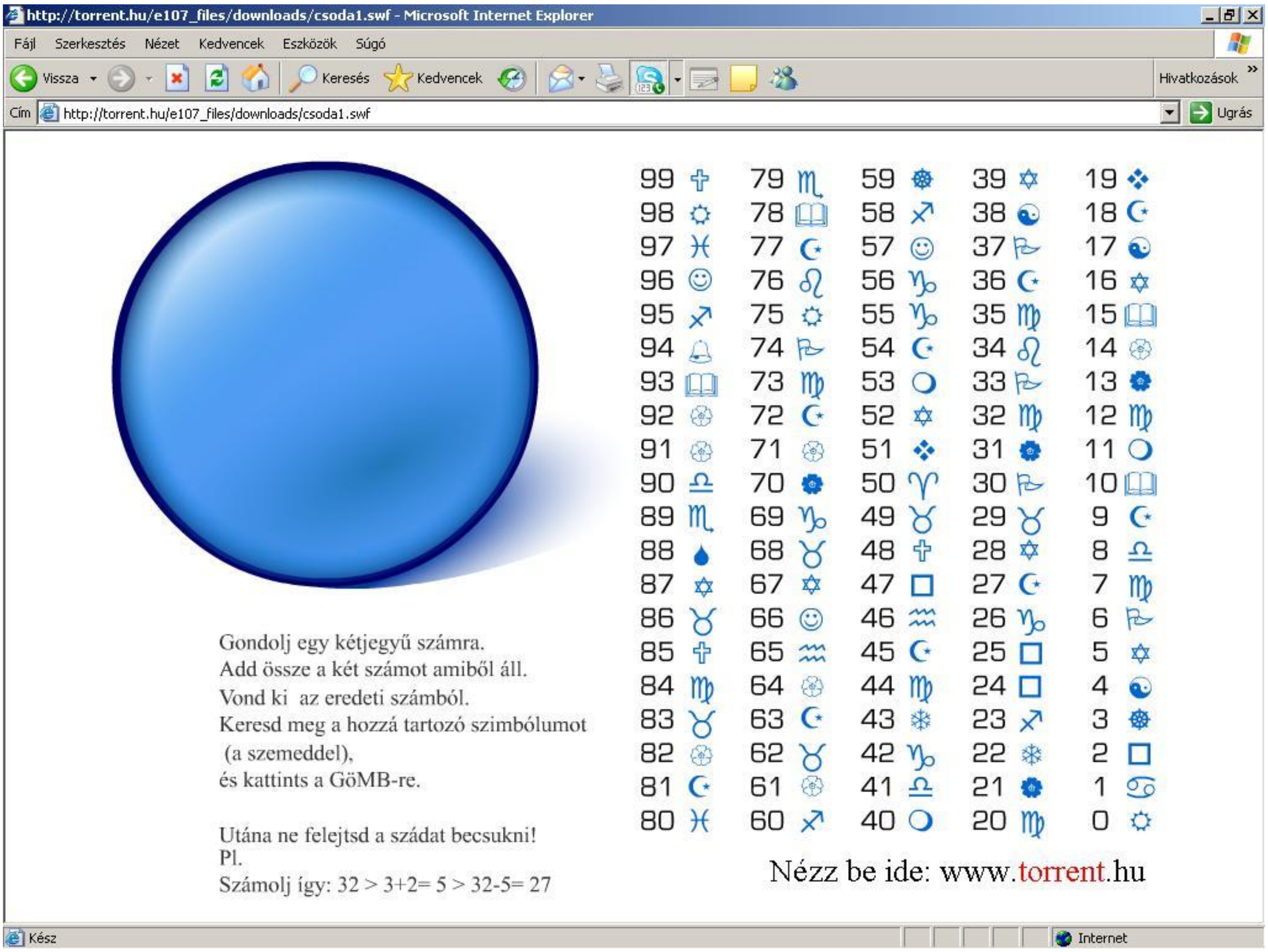
Középen

Előveszek 21 akármilyen (különböző) kártyalapot, megmutatom mindegyiket egy nézőnek aki választ egyet, természetesen nem mondja meg nekem. Tulajdonképpen a bűvészt még a lapok színe sem érdekli, persze mindenféle hókuszpókusszal tereli el a néző figyelmét - a semmiről, hiszen most sem csalok! A lapokat egyesével, színükkel felfelé rakom le az asztalra három pakliba: balra, jobbra, középre, balra, jobbra, középre, ... A nézőnek viszont figyelnie kell, és pontosan meg kell mondania (de csak azt), hogy melyik csomagba került a kiválasztott lapja, mert ezt a csomagot teszem középre. Ráadásul ezt az unalmas szétosztást és összerakást (egy kis Abrakadabrával fűszerezve) még kétszer megismétlem! Íme, láss csodát: kiterítem a 21 kártyát színükkel felfelé egy sorba, a néző által megjegyzett lap ekkor (mindig!) a csomag közepén, a 11. helyen lesz! (Vagyis 10 lap lesz előtte és 10 utána.)

Ennek a trükknek is egyszerű a matematikai magyarázata, kedves Olvasóm, talán Ön már rá is jött?!

Csodagömb

Interneten elég hamar megtaláljuk dédapáink kedvenc játékának önműködő változatát:



" *Gondolj egy kétjegyű számra. Add össze a két számjegyet amiből áll. Vond ki az eredeti számból.*
Például számolj így: 32 => 3+2 = 5 => 32-5 = **27** .
Keresd meg a hozzá tartozó szimbólumot (a szemeddel), és kattints a GÖMB -re. Utána ne felejtsd a szádat becsukni! "
... és a magyarázatot a könyv végén elolvasni ... !

Varázsdiók

Vegyünk elő három kisméretű tárgyat, mondjuk ceruza, kulcs, bicska. Az asztalra teszünk 24 diót, amiből három önkéntjelentkezőnek 1, 2 illetve 3 szemet adunk (marad 18 dió).

Megkérjük őket, hogy távollétünkben rejtsenek el zsebükbe egy-egy tárgyat. Továbbá: aki a ceruzát dugta el, vegyen el még ugyanannyi diót mint amennyit adtunk neki, a kulcs gazdája kétszer annyit vegyen el mint amennyit tőlünk kapott, míg a bicskánkat rejtegető játékos kapott dióinak négyszeresét vegye még el a tálból. A szobába visszatérve csak rápillantunk az asztalon levő diókra és kitaláljuk, hogy kinél milyen tárgy van!

A megoldás kulcsa nem nehéz: minden választási lehetőség esetén más az asztalon maradt diók száma. Ezt kis táblázatban könnyen össze is foglalhatjuk, persze hatásosabb a mutatvány, ha a táblázatot kívülről megtanuljuk!

1 diót kapott	2 diót kapott	3 diót kapott	asztalon
ceruza	kulcs	bicska	**1**
kulcs	ceruza	bicska	**2**
ceruza	bicska	kulcs	**3**
kulcs	bicska	ceruza	**5**
bicska	ceruza	kulcs	**6**
bicska	kulcs	ceruza	**7**

A feladattal Perelman [PJ] szórakoztató könyvében találkoztam, később [SzI10] cikkemben általánosítottam a mutatványt akárhány résztvevőre és eldugott tárgyra. (Az általános módszer lényege a k -alapú számrendszer használata, ahol k a játékosok száma.)

Négy kartonpapír

Gyermekkorom kedvenc, meghökkentő trükkje volt a következő. Megkérem játékostársamat, hogy gondoljon egy (egész) számra 0-tól 80-ig, de ne mondja meg nekem. Ezután odaadom neki a túloldalon levő négy kartonpapírt, és megkérdezem, hogy melyiken *milyen színnel* találta meg a választott számot: feketével, kékkel vagy pirossal. Ezután egy pillanat alatt mindig kitaláltam a választott számot, pedig könnyen bele szoktam zavarodni a sok fekete, piros és kék számba, mert a számokat ráadásul össze-vissza szoktam írni a lapokra!

A

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80			

B

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80			

C

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80			

D

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80			

A gyors válasz titkát már gyerekkoromban is könnyen megértettem: mindegyik lapon a mondott színnel megegyező *legkisebb* számokat kell megkeresni, és ezen a számok összege éppen a társam által gondolt szám! Nagy gonddal őrizgettem sokáig a lapokat, de már évek óta nem találom őket, Szerencsére a "fekete/kék/piros" szavakból eszembe jutott, hogy a *hármas* számrendszerben van három számjegy, és bizony a fenti trükk semmi más, mint a 0-tól 80-ig terjedő számok felírása (kódolása) *hármas* számrendszerben!

Nagyon sok automatikus trükköt (és magyarázatát) találunk mindenféle bűvészkönyvekben, elsősorban **Rodolfo** (*Gács Rezső, 1911-1987*) ismeretterjesztő műveiben! Matematikai vonatkozásaikról pedig a Szerző és társa [SzI 15] cikkében olvashatunk bővebben.

10. Véletlenek

"*Véletlenül törött össze a tányér* - Fogtad volna jobban!", "*Marhának áll a szerencse* - Én még sohasem nyertem a lottón!", "*Véletlenül rossz tételt húztam a vizsgán* - Hát aki csak a felét tanulja meg ... !" . Bizony, nem csak kockadobálgatással és kártyahúzogatással telnek mindennapjaink, mint az iskolai (valószínűségszámítás) órákon és a feladatgyűjtemények lapjain. Alább néhány egyszerű, a mindennapokban is felmerülő problémát említünk.

Felhívjuk a figyelmet, hogy a "valószínűség" (esély) szónak eleve csak nagyszámú (legalább több ezer) kísérlet vagy megfigyelés esetén van értelme! Ha csak egyszer-kétszer dobunk a kockával, töltünk lottószelvényt vagy ülünk autóba, hogyan is tudnánk megmondani, hogy "általában" , "nagy eséllyel" *ez* vagy *az* szokott történni! Csak "hasból", minden komoly alap nélkül! Még az is többször megesett családunkban: a "Catan telepesei" vagy hasonló játékokban a *két kocka összege* a hosszú játék alatt sehogyan sem lett 7, pedig a számítások és a több évszázados tapasztalat szerint éppen a **7** -nek a *legnagyobb a valószínűsége*!

Az alábbiakban néhány, a mindennapokban elhangzó téveszmét, szájhagyományt vizsgálunk meg a matematika eszközeivel - vagy alátámasztjuk vagy megcáfoljuk őket. Emellett az alábbi feladatok az iskolában is jó gyakorló példák. A kedves Olvasó, mielőtt hátralapoz a megoldáshoz, próbálja meg előbb saját maga eldönteni, hogy a leírt "jóslatoknak" (megállapításoknak) mekkora a valószínűsége.

A Cotton gyerekek

Szintén újságban (volt) olvasható a következő, meglepő hír:

Napló, 2007.okt.12.

Minden Cotton gyerek egy napon született

Marysville *(mti)* – Nem nehéz megjegyeznie gyerekei születésnapját egy szülői párosnak az Egyesült Államokban: immár harmadik porontyuk született október 2-án.

Cottonék – *Jenna és William Cotton* – 2007. október 2-án egy lánnyal szaporodtak, 2003 és 2006 októberének második napján pedig egy-egy fiúval.

Az Ohio Egyetem statisztikaprofesszora szerint annak az esélye, hogy egy háromgyermekes családban mindegyik utód más-más év ugyanazon napján lássa meg a napvilágot, egy a 133 ezerhez.

Nem kell ohioi professzornak lennünk ahhoz, hogy az

$$1 : x$$

arányt *pontosan* kiszámoljuk, minden középiskolás képes erre. Ez valóban kicsi esély, nem is olvasunk gyakran ilyen híreket. De álljunk csak meg egy kicsit: a világon nagyon sok háromgyermekes család van, többszázezer, ezek szerint nem is egyedi a Cotton család esete. Várjuk a következő hasonló (de pontosabb) újsághíreket!

A témához kapcsolódik még a Logika fejezetben megismert **Ikertestvérek** probléma is!

Gyermekek nemei

Könyvünkben csak fiúkkal és lányokkal foglalkozunk, bár hallottunk híreket másféle (ausztráliai) törvényekről is!

"**Csak egyfélét tud**" szokták vádolni az apukákat. Mert állítólag a legtöbb kétgyermekes családban azonos neműek a gyermekek. (Pedig nagyon praktikus.) Matematikailag a feladat a következő:

a) *Ha fiúk és lányok születéseinek esélye egymástól (és az apától is) függetlenül* p *illetve* q=1-p , *mondjuk* p=0.51 *és* q= =1-p=0.49 , *akkor egy kétgyermekes családban melyiknek nagyobb az esélye*: azonos *vagy* különböző *neműek a gyermekek?*

a*) *Mi a helyzet a háromgyermekes családokban?*

Természetesen a *p* és *q* valószínűségeket nem úgy kell érteni, hogy minden többgyermekes családban *p*:*q* a fiúk és lányok aránya, hanem nagyon sok (több százezer) szülés után számoljuk össze a kisfiúkat és kislányokat, akár országos, többévi statisztikák alapján. Persze ez a *p*:*q* arány földrészenként és országonként, sőt országrészenként, is eltérő, sőt pusztítóbb háborúk után is nagyobb volt a fiúk születési aránya.

A másik gyermek neme

b0) A kétgyermekes családban tudjuk, hogy a nagyobbik fiú. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindkettő fiú?

b1) *Ha* egy kétgyermekes családról annyit már tudunk, hogy van legalább egy **fiú**, *akkor* mekkora eséllyel mondhatjuk, hogy mindkettő **fiú**?

b2) Mi a helyzet a **lányokkal** ?

c1) *Ha* egy háromgyermekes családról annyit már tudunk, hogy van legalább egy **fiú**, *akkor* mekkora eséllyel várhatjuk, hogy **lány** is van a családban?

c2) Cseréljük fel a fiúkat és lányokat a fenti kérdésben!

c*) Tegyük fel az összes lehetséges kérdést.

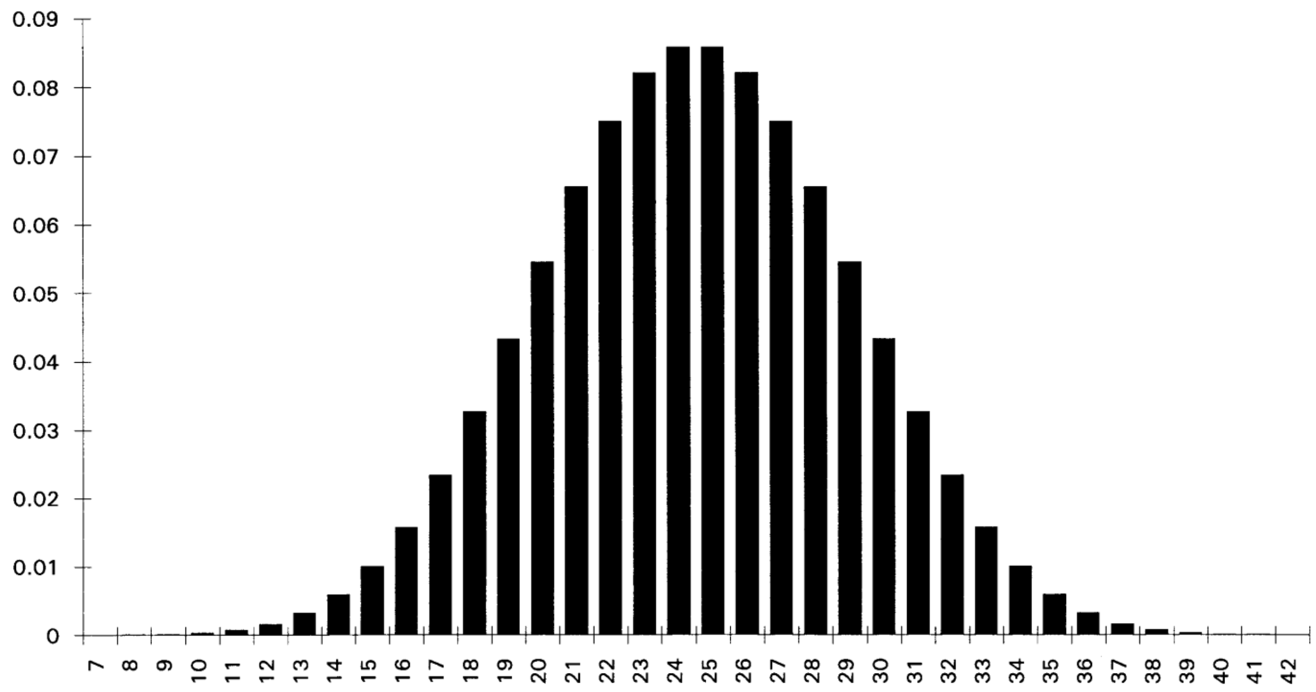
Pénzérme

Gyermekek egymás utáni születése (matematikailag) megegyezik egy pénzérme feldobásával, a statisztikusok szerint ehhez olyan érme kell, amelyre $P(fej)$=0.49 és $P(írás)$= 0.51. Az Olvasó persze próbálkozhat hagyományos (50-50%) pénzérmével is. *Egy pénzérmét feldobtunk kilencszer és mind a kilencszer "fej" jött ki. Feldobjuk tizedszer is. Mennyi a valószínűsége, hogy most "írás" jöjjön ki?*

Két dobókocka

Nagyon sok társasjátéknál (például Catan telepesei) kettő vagy több kockával dobunk egyszerre és a felül levő számokat *összeadjuk*. Ha otthon csak egy kockánk van, semmi baj: matematikailag (és a gyakorlatban is) egy kockát kétszer elgurítva ugyanazt az eredményt kapjuk, mint két kockát egyszerre. Természetesen több (akárhány) kockát is helyettesíthetünk egyetlen kockával, csak a kísérlet (játék) lesz hoszabb.

A fenti módszerekkel persze 2-12 -ig kapunk számokat, DE vigyázat: nem ugyanakkora eséllyel "jönnek ki" a számok: a 2 és a 12 szinte soha, a 7 pedig nagyon gyakran. Az egyes számok esélyeit a könyv végén részletesen kiszámoljuk. Az alábbi grafikonon *hét kocka összegét* látjuk: a vízszintes tengelyen a lehetséges összegeket látjuk, az oszlopok magasságai pedig a megfelelő valószínűségek. Láthatjuk, hogy bizony a szélsőségesen kicsi vagy nagy összegek esélyei majdnem 0 -val egyenlőek, legtöbbször a középmezőnyben levő értékekre számíthatunk. A Szerző honlapjának *Valószínűségszámítás* részében további grafikonokat találhatunk kockadobásokkal kapcsolatban: http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/ .



Ismét hangsúlyozzuk, hogy a fenti (akár elméleti, akár gyakorlati tapasztalati) "jóslások" csak nagyszámú kísérlet körülbelüli végeredményeit jelentik! Számtalan esti társasjátékon ki sem jött egyik vagy másik nagyesélyű összeg, míg a kis esélyűek (néha) az egész partiban végig jelen voltak!

A Térgeometria fejezet **Dobókockák** problémájának megoldásában egy olyan módszert mutatunk be, amellyel bármilyen *n* szám esetén *egyenlő eséllyel* lehet 1 és *n* közötti számokat "kigurítani" .

Három ajtó

A közismert showműsorban három ajtót látunk, egyik mögött hatalmas nyeremény, a másik kettő pedig csak "NEM NYERT" feliratot takar. Választunk egy ajtót, amit még nem nyitunk ki. A játékvezető a másik két ajtó közül kinyitja az egyiket, ami mögött biztosan nincs nyeremény. A hatás fokozása érdekében hosszasan kérdezgeti, hogy eredeti választásunkat nem akarjuk-e megváltoztatni, hiszen most már csak két ajtó közül kell választanunk (50-50%), míg a játék elején csak 1/3 vagyis 33% volt az esélyük.

"*Minek változtassak, hiszen az általam eredetileg választott ajtó és a még csukott ajtó mögött ugyanakkora eséllyel lehet a nyeremény!*" - morfondírozik a legtöbb játékos. Ez hihető is, hiszen *ebben az egyetlen játékban* ez tényleg így van, játékosunk nem kísérletezhet többszáz játékban!

Éppen ezért meglepő, hogy a nagy számban elvégzett kísérletek mást mutatnak: érdemes váltanunk. Ezt úgy kell értenünk, hogy nagyon sokszori (legalább többszáz) játékban ha véletlenszerűen (pl. kockadobással) teszik az ajándékokat az ajtók mögé, mi vakon választunk, a játékvezető véletlenszerűen nyit ki egy (nem nyerő!) ajtót, akkor az "ezután választó" játékosok többször nyernek, mint a "maradok" kontroll játékosok. Még pontosabban: az előző mondatunk csak nagy eséllyel igaz.

Hogyan? Egy matematikus kijelentése csak "*nagy eséllyel igaz*?" - kérdezi kedves Olvasóm? Bizony, ha a véletlenről nyilatkozunk, akkor a nyilatkozat is csak nagy eséllyel *lehet* igaz!

Tanulság

Kedves Olvasóm, ha eddig figyelmesen követett, bizonyosan egészen másképpen szemléli a mindennapokat, kevesebbszer tudják becsapni, és például **Tove Jansson**: *Muminbocs és az üstökös* [TJ] meséjében, a 94-103. oldalakon is megérti nem csak a matematikai hátteret, hanem a (mesebeli) kereskedő emberi (mumini) nagyságát is!

Megoldások

1. Elemi számolások

Tulajdonrészek

Ha az apa hal meg előbb, akkor a két gyermek **3/13 - 3/13** részt kap, az anyának marad 7/13 rész. Ha az anya hal meg előbb, akkor a két gyermek **7/26-7/26** részt kap, az apának marad 6/13 rész.

Választókörzetek

Jelölje $\mathbf{x_1, y_1}$ az I. kerületben az X ill. Y pártra szavazók számát, hasonlóak legyenek az $\mathbf{x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4}$ számok. A kívánt összefüggések:

(1) $x_1 + x_2 > y_1 + y_2$, $x_3 + x_4 > y_3 + y_4$

és

(2) $x_1 + x_3 < y_1 + y_3$, $x_2 + x_4 < y_2 + y_4$.

Az (1) illetve (2) egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk:

(3) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > y_1 + y_2 + y_3 + y_4$,

és

(4) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > y_1 + y_2 + y_3 + y_4$.

nyilvánvalóan (3) és (4) ellentmondanak egymásnak.

A fenti számolás azt mutatja, hogy az általunk tekintett egyszerű *"négy városi → kettő választási kerület"* modellben nem lehet egyszer az egyik, máskor a másik párt kétszer nyerő. Bonyolultabb modellekben ez viszont lehetséges.

Autókölcsönzés

n napi használatot és *k* kilométer futást feltételezünk. Ekkor

az **X** cégnek fizetünk $8900*n+75*k$ Ft-ot,

az **Y** cégnek fizetünk $11900*n+49*k$ Ft-ot,

a kérdés: $11900*n+49*k < 8900*n+75*k$,

átrendezés után $3000*n < 26*k$,

elosztva 26 -tal (kerekítve) $115*n < k$,

vagy másképpen $\mathbf{115 < k/n}$.

Ez azt jelenti, hogy **átlagos napi 115 km** -nél nagyobb furikázás felett éri meg az **Y** céget választanunk!

A tervezett napok száma egyedül nem befolyásolja választásunkat, csak az *átlagos* napi furikázásunk, mint előbb láttuk.

Fényképek

o) 919-24*5=**799,-Ft** egy-egy tekercs előhívása.

a) kisfilmes gép:

24 kép össz. 500+799+24*5=1419 Ft, átlag 1419/24 ≈ 59.10 Ft/kép,
36 kép össz. 500+799+36*5=1479 Ft, átlag 1479/36 ≈ 41.10 Ft/kép,
72 kép össz. 500+799+72*5=1659 Ft, átlag 1659/72 ≈ 23.00 Ft/kép,

digitális gép:

24 kép össz. 199+24*39=1135 Ft, átlagosan 1135/24 ≈ 47.30 Ft/kép,
36 kép össz. 199+36*39=1603 Ft, átlagosan 1603/36 ≈ 44.50 Ft/kép,
72 kép össz. 199+72*39=3007 Ft, átlagosan 3007/72 ≈ 41.80 Ft/kép.

b) $x \le 72$ kép esetén a digitális olcsóbb, ha

$$199+39*x < 500+799+5*x\ ,$$

aminek megoldása $\boldsymbol{x} < 1100/34 \approx 32.35$. Ez azt jelenti, hogy **33 vagy több** kép esetén már a hagyományos fényképezőgép képei az olcsóbbak.

2. Zsebszámológép, pontosság

Műveletek sorrendje (precedencia)

$\frac{373+287}{42+18}$ kiszámítása zárójelekkel: **`(373+287)/(42+18)= 11`** ,

egyszerű géppel zárójelek nélkül:

`OFF ON/C`	vagy	**`0 MRC MRC 0`** (törlés)
`42+18 = M+`		(nevező a memóriába)
`ON/C`		(törlés)
`373+287 = / MRC =`		(kész).

Számrendszerek, maradékok

A parkolóőr problémája: $14+\frac{49}{60}+\frac{75}{60}$ kiszámítása *egyszerű géppel*:

`OFF ON/C`	(törlés)
`14 M+ 49/60 M+ 75/60 M+`	**(összeadás a memóriában)**
`MRC`	(látjuk az időt: 16.0666)
`- 16 =`	(kivonjuk az órát: 0.0666)
`* 60 =`	(megkapjuk a percet: 4.)

Egyenletrendszerek

Az (I) és (II) egyenletrendszerek pontos megoldása:

(I): $x = -7.873637750653879686137750654$,
$y = -13.789396251089799476896251090$,

(II): $x = 6.625908372827804107424960505 52$,
$y = 5.6259083728278041074249605052$.

3. Százalékszámítás

ÁFA

2008 előtt fizettünk x*1.15 Ft -ot, ezután fizetünk x*1.20 Ft -ot, tehát részünkre a teljes árváltozás

$$(x*1.20) / (x*1.15) \approx 1{,}0435$$

vagyis az áremelkedés nekünk kb. **4.3 %** .

2008 előtt fizettünk x*1.25 Ft -ot, ezután fizetünk x*1.27 Ft -ot, tehát részünkre a teljes árváltozás

$$(x*1.27) / (x*1.25) = 1{,}016$$

vagyis az áremelkedés nekünk **1.6 %** .

10% után 10%

$x*1.10*1.10 = x*1.21$ miatt pontosan **21 %** .

MÁV

$x*1.16*1.17 = x*1.357$ ami majdnem **36 %** áremelkedés a hirdetett 33% helyett !

Gáz

$x*1.30*1.05 = x*1.365$ tehát összesen **36.5 %** .

Kamatadó

1 millió Ft után *kapunk* 1 000 000 * 0.05 = 50 000 Ft kamatot (az eredeti tőkénk megmarad!), ennek 20% -a a kamatadó:

$$50\,000 * 0.20 = 10\,000 \text{ Ft} ,$$

ennyit fizetünk az Államnak. Százalékosan, tőkénkhez viszonyítva ez

$$x * 0.05 * 0.20 = 0{,}01 \quad \text{azaz} \quad \mathbf{1\ \%} .$$

Mindenképpen a (bennünket megillető) kamat 1/5 részét adjuk az Államnak!

Adóbevallás

Az $(x - 1\,050\,000)*0.40 + 267\,000 = x*0.30$ egyenletet rendezve

$$x*0.10 = 1\,050\,000*0.40 - 267\,000$$

amelynek megoldása **x = 1 530 000 Ft**.

Nyugdíj

Ha most havi nyugdíjunk x Ft, akkor négy év alatt összesen mennyi pénzt kapunk:

a mostani emeléssel: $x*1.04*12*4 =$ **x*49.92 Ft** ,

a négy év utáni egyszeri emeléssel: $x*12*4 + x =$ **x*49,- Ft** .

A számolásban nem szerepel sem az időközbeni infláció, sem az esetleges megtakarítás (vagy elkerült hitel) banki kamata, amik szintén a **mostani emelés** javára billentik a mérleget.

Szuperbruttósítás

$x*1.27*0.17 =$ ***x**0.2159** ami körülbelül **21.6%** adót jelent.

Vásárlás

Hát persze, hogy **igaz:** nagyobb vásárlásnak nagyobb az árengedménye, bár az is igaz, hogy többet is kell **fizetnünk** a kasszánál ...

Cipó és kenyér

Ha a *kenyér* tömege m, akkor $0{,}85m$ -et fogyasztunk el. A *cipó* tömege $0{,}75m$, ezt mind megesszük. Az elfogyasztott kenyér és cipó tömegének aránya tehát: $0{,}85m:0{,}75m = 17:15$. Ha ugyanakkora fogyasztást akarunk elérni, akkor cipóból 17/15 -ször több kell mint kenyérből, és a cipó ára 1,2-szerese a kenyér árának, azaz $17/15*1{,}2 = 1{,}36$. Vagyis, ha ugyanakkora fogyasztás mellett kenyér helyett cipót veszünk, akkor **36%** -kal többet kell költenünk. (KöMaL C.560. feladat [K99a], 1999.)

20% -nak 80% -a

= ez eredetinek éppen $0.2*0.8=0.16$ része, vagyis **16%** -a.

4. Logika

Adóellenőr

Az adószabály nyelvtani és matematikai alakja:

(5) *kis kereset* $\rightarrow$ *van jóváírás*

ami alapján (matematikailag) a jóváírást igénybe *nem* vevőket kellene ellenőrizni, hátha elfelejtették igénybe venni (kötelező) jóváírásukat!

Azonban az adótörvény a gyakorlatban azt *is* szokta még jelenteni, hogy a nagy keresetűeknek nem szabad jóváírást igénybe venniük, vagyis

(6) $$\textit{Nagy kereset} \rightarrow \textit{nincs jóváírás}\ .$$

Ezért szokták inkább az APEH -nál a jóváírást igénybe vevőket ellenőrizni, nehogy nagy keresetű legyen közöttük. **Hangsúlyozzuk:** a (6) következtetés *matematikailag* nem következik (5) -ből!

Létezik és minden iv) állítás

Az állítás szerkezete:

$\forall$ *adózó* $\forall$ *papír* $\exists$ *oldal* $\exists$ *sor* $\forall$ *számjegy* $\exists$ *irány* *kilóg* ,

tagadása tehát

$\exists$ *adózó* $\exists$ *papír* $\forall$ *oldal* $\forall$ *sor* $\exists$ *számjegy* $\forall$ *irány* *nemkilóg*

vagy olvashatóbban:

"*Van olyan adózó, akinek valamelyik beadott papírjának minden oldalának minden sorában legalább egyik számjegye egyik irányba sem lóg ki a négyzetecskéből.*"

Szárnyas állatok

Helyes válasz: **F**. Ugyanis a feltételből nem következik, hogy egyáltalában léteznek szárnyas állatok, holott a C állítás ezt is tartalmazza. Mindez jobban érthető, ha a fogalmakat kicseréljük. Például minden hétfejű állat tüzet okád és minden sárkány tüzet okád, mégsem igaz, hogy néhány (azaz legalább egy) tűzokádó lénynek hét feje van. Az üres halmaz elemeire minden tulajdonság teljesül; a *minden* kvantorból nem következik a *létezik* kvantor. Az A-D állítások egyike sem következik a feltételből, ezáltal az E is hamis, az F pedig igaz.
([K05] KöMaL Tesztverseny 2005.)

Szemben

Mikszáth Kálmán megoldása: "*Hát lássa, Önből nem lesz jó vállalkozó, mert Ön nem látja tisztán maga előtt a dolgok következményeit már a második fokon sem. A pozsony-brassói úton ott vannak az előző tíz napon elindult szekerek is, meg a mostani tíz napon elindultak. E-szerint a pozsony-brassói úton negyven szekér van. Ami pedig az Ön mostani útját illeti, ne haragudjék, de azon csak egy kosár van.*"

(Ugyanis Horváth apuka a feladatot lánya kérőjének adta fel!)

Ikerterstvérek

Szintén nem szökőévben születtünk éjfél előtt és után, a Howland szigeten, és anya ágyát véletlenül áttolták a dátumválasztón ...

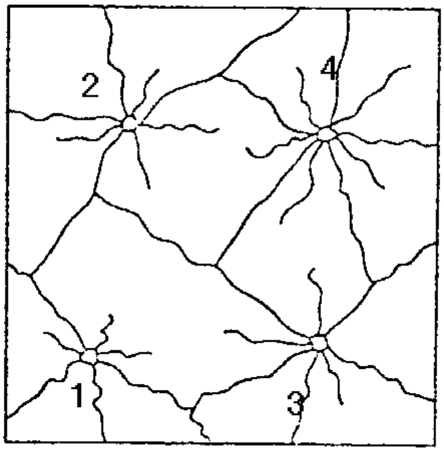
5. Síkgeometria

Ellipszisek

A rajzszög+cérna, a henger (szalámi) 45° -os vágása és a teleszkópos körzővel történő szerkesztések igazi ellipsziseket adnak, ez a kúpszeletek elméletéből könnyen következik. Azonban a hengerre (borosüvegre) körzővel rajzolt görbe csak hasonlít az ellipszisre, de nem pontos ellipszis. Ez utóbbit például a "The Mathematical Gazette" [MG02] újságban számolják ki részletesen.

Kavicsok

Induljunk ki abból, hogy minden újabb kavics, ami valamelyik üvegdarabra esett, olyan törésvonalakat eredményezett, amelyek az adott üvegdarabnak teljesen a széléig terjednek!



Téglalaplefedések

Ha levesszük az A négyzetet, akkor előbukkan D teljes életnagyságában (mert A -n kívül más nem takarhatja). A jobb alsó sarokban E nem takarhatja F -et, hiszen akkor nem tud "bekanyarodni", tehát az F felette van E -nek, és csak az ábrán jelölt módon helyezkedhet el. Hasonlóan a többi sarokban C letakarja a B-t, H letakarja G-t. Az ábráról ekkor leolvasható a négyzetek (visszafelé) *levételének* sorrendje: A, D, C, B, H, G, F, E .

Tehát az eredeti lerakási **sorrend: E, F, G, H, B, C, D, A** volt.

Holdig

Egy papírlap vastagsága 0.1mm. 1,2,3,...,*n*,... félbehajtás után 2, 4, 8,..., 2^n, ... réteg lesz egymáson, aminek vastagsága $2^n \cdot 0.1$ mm.
A Föld-Hold távolság átlagosan 384 000 km = 384 000 000 000 mm.
Tehát annak a feltétele, hogy hajtogatott papírunk a Holdig felérjen:

$$2^n \cdot 0.1 \;>\; 384\,000\,000\,000\,,$$

az egyenlőtlenség megoldása $n \geq \log_2(3.84 \cdot 10^{12}) \approx 41.804$, ami azt jelenti, hogy **42** félbehajtás után papírlapunk (-oszlopunk) már a Holdig ér! Eközben a papírlap eredeti *területe*

$$1 / 2^{42} \;=\; 1 / 4\,398\,046\,511\,104 \quad \text{-ed}$$

részére zsugorodott, a téglalap oldalai pedig

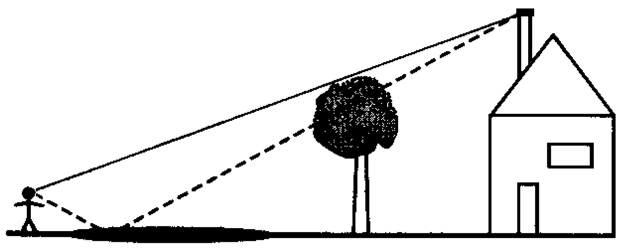
$$1 / 2^{21} \;=\; 1 / 2\,097\,152 \quad \text{-ad}$$

részükre, vagyis az eredetileg 840mm × 1188mm méretű téglalapból 0,0004mm × 0,00056 mm (!) "méretű" lap lesz, hiszen

$$840 / 2\,097\,152 \approx 0{,}0004 \quad \text{és} \quad 1188 / 2\,097\,152 = 0{,}00056\,.$$

Víztükör

A rajz mindent megmagyaráz: a tóban tükörképet létrehozó fénysugaraknak (szaggatott vonal) már útját állja a fa. (Részletesebb indoklást olvashatunk a KöMaL 2011. májusi számában a P.4348 fizika feladat megoldásánál, *Woynarovich Ferenc* tollából.)



Papírszalvéta

Vegyünk elő egy papírlapot ...

Két tükör meg egy harmadik

A régebbi kerékpárprizmák belűlről kis kockák csúcsait mutatják, a csúcsokban találkozó kis lapocskák felelnek meg a feladat három tükrének. Az autó fényszórójának fénye visszaverődés után mindig a vezető szemébe érkezik, ezért látja akárhonnan a kerékpár prizmáját sötétben. Manapság azonban inkább kis félgömböcskék vannak a kis kockák helyett, talán csak az olcsóbb gyártási technológia miatt.

Szélkerék

A propeller **nem** fogja súrolni a földet, mert a torony tetején a propeller *középpontja* van, vagyis csak a *sugara* (=45m) "lóg" lefelé.

Egy vonallal

A négydimenziós kocka csúcsait az alábbi sorrendben kell összekötni: C, D, H, G, F, E, M, P, H, E, A, I, L, D, A, B, C, G, O, K, J, N, F, B, J, I, M, N, O, P, L, K, C .

Kirakó

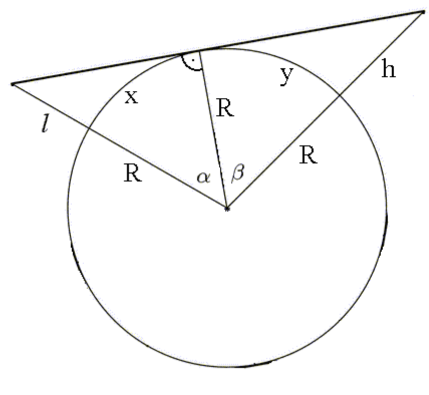
Az összes elem kifelé és befelé álló füleinek összeszámolásából kapjuk, hogy a *hiányzó* darabnak három kifelé álló füle van. Így csak **B lehet** a hiányzó darab.

6. A Szinusz és a szögfüggvények

Ácsok

A valódi *szög* = *arctg*(*a*cm/45cm) , tehát
a=20 cm => *szög* = *arctg*(20/45)= 23,96fok = 23fok 58perc,
a=30 cm => *szög* = *arctg*(30/45)= 33,69fok = 33fok 41perc,
a=40 cm => *szög* = *arctg*(40/45)= 41,63fok = 41fok 38perc,
a=50 cm => *szög* = *arctg*(50/45)= 48,01fok = 48fok 01perc,
a=60 cm => *szög* = *arctg*(60/45)= 53,13fok = 53fok 08perc.
Hát talán ennyit a tető elbír ... .

7. Térgeometria



A Föld gömbölyű

a) A Föld sugara R = 6 370 000 m.
Legyen a személy magassága l = 2m,
a hajó magassága h = 10m. Ekkor

$$\cos(\alpha) = \frac{R}{R+\ell} = \frac{6370000m}{6370002m} \approx 0.999\,999\,686,$$

α = arccos(0.999 999 686) ≈ 0.045 403° ≈ 0.000 792 rad,

$x = 2R\cdot\pi\cdot\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \approx 5.048$ km, $\cos(\beta) = \frac{R}{R+h} = \frac{6370000m}{6370010m} \approx 0.999\,998\,430$,

β = arccos(0.999 998 430) ≈ 0.101 524° ≈ 0.001 772 rad,

$y = 2R\cdot\pi\cdot\frac{\beta^\circ}{360^\circ} \approx 11.287$ km,

tehát a h = 10m magas hajót x+y ≈ **16.335 km** távolságban már egyáltalában **nem** látjuk, távcsővel, szélcsendes időben sem!

b) Ha a hajó x+y = 70 km távolságban van, akkor
y = 70-x ≈ 70-5.048 ≈ 64.952 km,
β = y/R = 64.952/6370 ≈ 0.010 197 rad ≈ 0.584 219°,
cos(β) ≈ 0.999 948 ,
a $\cos(\beta) = \frac{R}{R+h}$ összefüggés alapján $h = \frac{R(1-\cos(\beta))}{\cos(\beta)}$ ≈ **331.157 m**.

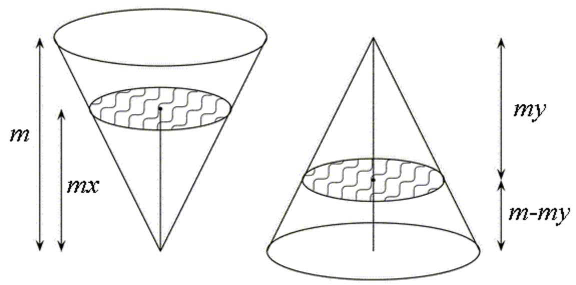
Tehát 70km távolságban már csak a **331.16 m** (kb.100 emelet!) -nél magasabb hajót nem takarná el a Föld !

Locsolócső

Ha egy (kisebb) csepp kb. 1/10ml és percenként csöppen a csap, akkor ez naponta 1/10*60*24 = 144ml, havonta 144*30 = 4320ml = 4.32liter. Természetesen sűrűbb csöpögés vagy nagyobb csöppek esetén a végeredmény arányosan nagyobb! Például másodpercenkénti csöppenés esetén már 4.32*60 = 259.2 liter ≈ 1/4 köbméter ! a pazarlás havonta! Évente pedig ... (hf.)

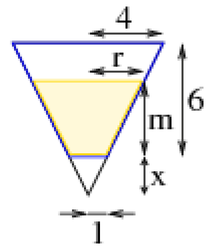
A TV készenléti állapotban 1W áramot fogyaszt, ez naponta 24Wh, havonta 720Wh=0.72kWh, a mai energiadíjak mellett kb. 20 Ft/hó.

Kúpok és poharak



a) Ha a poharat eredetileg x -ed rész magasságig töltöttük, akkor
$V_{folyadék} = x^3 * V$,
$V_{levegő} = V - x^3 * V = (1-x^3) * V$,
megfordítás után
$V_{levegő} = (1-x^3) * V = y^3 * V$ ahonnan $y = \sqrt[3]{1-x^3}$,
tehát a folyadék magassága a megfordított pohárban
$h = m - my = m*(1-y) = m*(1-\sqrt[3]{1-x^3})$. Ez általában nehezen értelmezhető, de pl. x=1/2 esetén $y=\sqrt[3]{7/8}$ ≈0.956 és így h=m*0.044, vagyis az eredetileg feléig töltött pohárban felfordítás után a magasság kb. 0.044 részéig, vagyis 4.5% -ig lesz csak folyadék!

c) Csonkakúp alakú poharakkal például a KöMaL C.1079 feladatában [K11] találkozunk. Legyen az alapkör sugara r=1cm, a fedőkör sugara R=4cm, a magassága M=6cm. *Milyen* ***m*** *magasságig töltsünk, hogy félig legyen a pohár?*



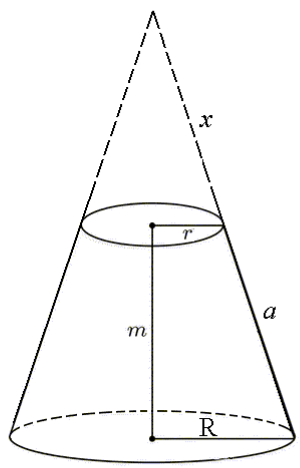
A csonkakúpot egy olyan kúppal egészítjük ki, amely alapkörének sugara 1cm, magassága x, térfogatát jelölje V_1 . A kiegészítő kis kúp és a poharat tartalmazó nagy kúp hasonlóak, a hasonlóság aránya éppen az alapkörök (sugarainak) aránya, vagyis 1:4. Ezért magasságaik aránya x:(6+x)=1:4, ahonnan x=2(cm), a folyadékkal töltött részekre a hasonlóság r:1=(m+2):2 . Ezért

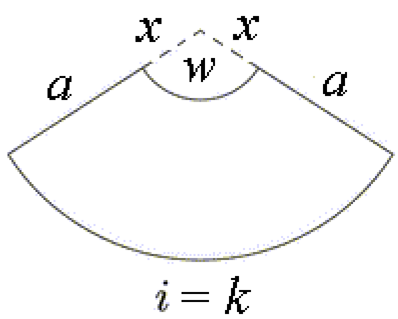
$$V_{pohár} = \pi/3*(4^2*8-1^2*2) = 42\pi \text{ cm}^3 ,$$

$$V_{folyadék} = 21\pi \text{ cm}^3 = \pi/3*((m+2)^2/4*(m+2)-1^2*2)$$

ahonnan $\boldsymbol{m \approx}$ **4,38cm**, ami az eredeti magasság kb. **2/3 része**.

Lámpaernyő és szoknya





Csonkakúp adatai:
- R = alapkör sugara,
- r = fedőkör sugara,
- m = magasság,
- a = alkotó ,

Kivágott körcikk adatai:
- x+a = nagy sugár,
- x = kis sugár,
- w = nyílásszög.

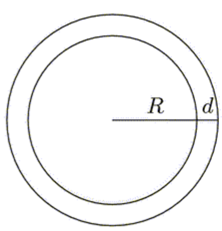
r:R = x:(x+a) $\Rightarrow$ rx+ra = xR $\Rightarrow$ $\mathbf{x = ar/(R\text{-}r)}$,
$2r\pi = w^{(rad)}*(a+x) \Rightarrow w^{(rad)} = 2r\pi/(a+x)$, $\boldsymbol{w^o = 2r\pi/(a+x)*\frac{180}{\pi}}$ **.**

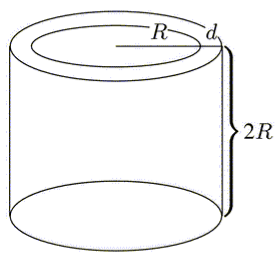
Anamorfózisok - Mi van ide írva?

A könyv lapját balról, majdnem a papír síkjából nézve olvashatjuk: SEMMI .

Festékréteg

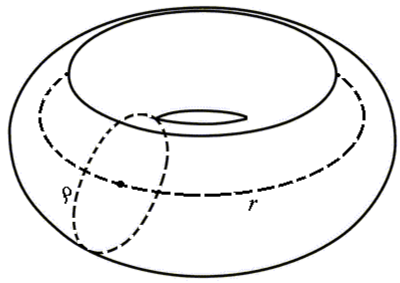
Könnyen belátható, hogy a következő testek *felszíne* azonos: egy R sugarú **gömb**, egy R alapkörű és $2R$ magasságú **henger palástja**, és





egy $2R\times 2R\pi$ méretű **sík téglalap,** a közös terület $4R^2\pi$.

Ha a **tórusz** keresztmetszete $\rho=R/\pi$ sugarú kör, amely egy $r=R$ sugarú kör mentén van megforgatva, akkor felszíne az $\mathbf{A_t = 4\pi^2 r\rho}$ képlet alapján ismét $4R^2\pi$. Mindegyik felületet d vastag festékréteggel vonjuk be, *kívülről* (F_k) és *belülről* (F_b).



Síklemez mindkét oldala: $F_{S,b} = F_{S,k} = T*d = 4R^2\pi d = \mathbf{4\pi d*R^2}$.

Gömb: *külső* festés esetén az $R+d$ sugarú gömb térfogatából vonjuk ki az R sugarú gömb térfogatát, míg *belső* festés esetén az R sugarú gömb térfogatából az R-d sugarú gömb térfogatát:

$F_{G,k} = 4\pi/3*((R+d)^3-R^3)= 4\pi/3*(3R^2d+3Rd^2+d^3)= \mathbf{4\pi d*(R^2+Rd+d^2/3)}$,

$F_{G,b} = 4\pi/3*(R^3-(R-d)^3)= 4\pi/3*(3R^2d-3Rd^2+d^3) = \mathbf{4\pi d*(R^2-Rd+d^2/3)}$.

Henger: Hasonlóan a térfogatok különbsége:

$F_{H,k} = 2R*((R+d)^2\pi-R^2\pi) = 2R\pi*(2Rd+d^2) = \mathbf{4\pi d*(R^2+Rd/2)}$,

$F_{H,b} = 2R*(R^2\pi-(R-d)^2\pi) = 2R\pi*(2Rd-d^2) = \mathbf{4\pi d*(R^2-Rd/2)}$.

Tórusz: térfogata $\mathbf{V_t=2\pi^2 r\rho^2}$, így

$F_{T,k} = 2\pi^2 r((\rho+d)^2-\rho^2) = 2\pi^2R*[(R/\pi+d)^2-(R/\pi)^2] =$
$= 2\pi^2R*[2Rd/\pi+d^2] = 2\pi*[2R^2d+\pi Rd^2] = \mathbf{4\pi d*(R^2+\pi Rd/2)}$,

$F_{T,b} = 2\pi^2 r(\rho^2-(\rho-d)^2) = 2\pi^2R*[(R/\pi)^2-(R/\pi-d)^2] =$
$= 2\pi^2R*[2Rd/\pi-d^2] = 2\pi*[2R^2d-\pi Rd^2] = \mathbf{4\pi d*(R^2-\pi Rd/2)}$.

Mindegyik végeredményből elhagyhatjuk a közös $4\pi d$ szorzótényezőt és nyilván $R>d>0$.

Külső festésekre kaptuk:

$$R^2+\pi Rd/2 \;>\; R^2+Rd+d^2/2 \;>\; R^2+Rd/2 \;>\; R^2$$

(7) $$\boldsymbol{F_{T,k} > F_{G,k} > F_{H,k} > F_{S,k}} ,$$

belső festésekre:

$$R^2-\pi Rd/2 \;<\; R^2-Rd+d^2 \;<\; R^2-Rd/2 \;<\; R^2 ,$$

(8) $$\boldsymbol{F_{T,b} < F_{G,b} < F_{H,b} < F_{S,b}} .$$

Legyen például $R=r=10$cm és $d=0.5$mm$=0.05$cm, így $\rho=R/\pi \approx$ 3.1831cm. Ekkor

$F_{S,k} = F_{S,b} = T*d = 4R^2\pi*d = 4*10^2\pi*0.05 \qquad \approx \mathbf{62.8319\ cm^3}$,

$F_{G,k} = 4\pi/3*((R+d)^3-R^3) = 4\pi/3*(10.05^3-10^3) \qquad \approx \mathbf{63.1465\ cm^3}$,

$F_{G,b} = 4\pi/3*(R^3-(R-d)^3) = 4\pi/3*(10^3-9.95^3) \approx \mathbf{62.5182\ cm^3}$,
$F_{H,k} = 2R\pi*((R+d)^2-R^2) = 2*10\pi*(10.05^2-10^2) \approx \mathbf{62.9889\ cm^3}$,
$F_{H,b} = 2R\pi*(R^2-(R-d)^2) = 2*10\pi*(10^2-9.95^2) \approx \mathbf{62.6748\ cm^3}$ **,**
$F_{T,k} = 2\pi^2 r((\rho+d)^2-\rho^2)=2\pi^2*10*(3{,}2331^2-3{,}1831^2) \approx \mathbf{63.3254\ cm^3}$ **,**
$F_{T,b} = 2\pi^2 r(\rho^2-(\rho-d)^2)=2\pi^2*10*(3{,}1831^2-3{,}1331^2) \approx \mathbf{62.3383\ cm^3}$ **,**
tehát (7) és (8) ebben az esetben (további kerekítések után)

$$63.33\ cm^3 > 63.15cm^3 > 62.99cm^3 > 62.83cm^3$$

és

$$62.52cm^3 < 62.67cm^3 < 62.83cm^3 < 62.34\ cm^3 .$$

Az eredeti probléma a KöMaL [K99a] C536 feladata, itt kibővítettük a felületek belső festésével, valamint a síklemez és a tórusz festésével is.

Dobókockák

Jusson eszünkbe a ceruzánk, melynek 6 oldala van, elgurítva bármelyik lapján megállhat. Tehát vegyünk elő egy henger alakú puhafa botot (pl. "tiplifát" kérjünk a barkácsboltban), és egy ***n* oldalú (lapú) ceruzát** (hasábot) faragjunk vagy csiszoljunk (smirglizzünk) belőle.

9. Kártyajátékok és bűvésztrükkök

Előrebocsájtjuk a több évezredes tapasztalatot: *Ha egy trükk megfejtését ismerjük, akkor már nem is szórakoztat maga a trükk* ! Így sok kellemes baráti, családi vagy művész estét lehet elrontani! Tehát a továbbiakat csak nagyon kíváncsi (majdnem matematikus) Olvasóknak ajánljuk, és kérjük: társaságban ne akarják mindenáron "lelőni a poént" !

Párok

Tekintsük a játéknak azt a pillanatát, amikor éppen elfogy az asztal közepén levő pakli, és a két játékos ezután már csak egymás kezéből húz. Ekkor mindegyik, még le nem tett kártya párja a másik játékosnál van, emiatt mindkét játékosnál ebben a pillanatban *ugyanannyi* lap van. A játék kezdetén mindketten ugyanannyi lapot kaptak, felváltva ugyanannyit húztak, most ugyanannyi van kezükben, tehát ugyanannyi lapot tettek le az asztalra maguk elé, vagyis már eddig ugyanannyi párt gyűjtöttek. Így az asztalon levő lapok száma 4-gyel osztható. Mivel eredetileg is 4-gyel osztható volt a lapok száma, ezért most a játékosok kezeiben levő lapok száma összesen szintén 4-gyel osztható, fele itt, fele ott.

Ezután a játékosok egymástól húznak felváltva, ezért ugyanannyi párt fognak gyűjteni a játék hátralevő részében is. A játék döntetlen!

Csodagömb

Bármelyik számból kivonva számjegyeinek összegét, mindig 9 -cel osztható számot kapunk. Például kétjegyű számoknál: $(10*a+b)-(a+b) = 9*a$. Nézzük meg alaposabban a Csodagömb ábráit: 0, 90 és 99 kivételével minden 9 -cel osztható számnál *ugyanaz* a jel szerepel, és a gömbre kattintva is ez a jel tűnik elő! (A 0, 90 és 99 számoknál azért szerepelhetnek más jelek, mert $1 \le a \le 9$ miatt a $9*a$ végeredmény mindig 9 és 91 között lesz. Végső soron tehát akármelyik számra is gondoltunk eredetileg, *ugyanez* a jel fog előtűnni minden esetben!

10. Véletlenek

A **P(A)** jelölés az A állítás **valószínűségét,** esélyét (angolul *probability*) jelöli.

A Cotton gyerekek

P(egy napon születtek) = 365 / összes lehetőség = $365/ 365^3$ =
= **1 / 133225** ,
tehát az újságcikkben szereplő "133ezer" körülbelül helyes.

Gyermekek nemei

"**Csak egyfélét tud**"

a) Kétgyermekes családokban:

P(azonos neműek) = P(fiú,fiú)+P(leány,leány) =
= P(fiú)·P(fiú)+P(leány)·P(leány) = $p{\cdot}p+q{\cdot}q = 0.51^2+0.49^2$ =
= 0,5002 = 50.02% ,

P(különböző neműek) = P(fiú,leány)+P(leány,fiú) =
= P(fiú)·P(leány)·2 = $p{\cdot}q{\cdot}2 = 0.51{\cdot}0.49{\cdot}2$ = **0,4998 = 49.98% .**
(Ellenőrzés: 0,5002+0,4998=1.0000.)

Megjegyzés: Láthatjuk, hogy két azonos nemű gyermeket "jósolni" valóban nagyobb eséllyel lehet (bár csak kis eltéréssel), mint különböző neműeket. Figyeljük meg, ez a megállapítás nem az apa, hanem a

$$p^2+q^2 > 2{\cdot}p{\cdot}q \quad \text{vagyis} \quad (p-q)^2 > 0$$

egyenlőtlenség miatt teljesül *tetszőleges* $p \neq q$ azaz $p \neq ½$ esetén! Az eltérés pedig annál nagyobb, minnél jobban különbözik p és q egymástól, vagyis ½ -től !

a*) Háromgyermekes családokban:

P(azonos neműek) = P(fiú,fiú,fiú)+P(leány,leány,leány) =
= P(fiú)·P(fiú)·P(fiú)+P(leány)·P(leány)·P(leány) = $p \cdot p \cdot p + q \cdot q \cdot q$ =
= $0.51^3 + 0.49^3$ **= 0,2503** ,

P(két fiú és egy lány) = P(fiú,fiú,leány) + P(fiú,leány,fiú) +
+P(leány,fiú,fiú) = $3 \cdot p \cdot p \cdot q$ = $3 \cdot 0.51^2 \cdot 0.49$ **= 0,382347 ,**

P(egy fiú és két lány) = P(fiú,leány,leány) + P(leány,fiú,leány) +
+P(leány,leány,fiú) = $3 \cdot p \cdot p \cdot q$ = $3 \cdot 0.51^2 \cdot 0.49$ = 3*0.51*0.49*0.49 =
0,367353 ,

Ellenőrzés: 0,2503+0,382347+0,367353 = 1 .

A másik gyermek neme

b0) A feladat azt kérdezi, hogy P(második fiú) =? . A feladat elején leszögeztük, hogy a gyermekek nemei egymástól függetlenek, így

$$P(\textit{mindkettő fiú}) = P(\textit{második fiú}) = P(\textit{fiú}) = p \ .$$

b1) A feltételes valószínűség

$$P(X \text{ ha } Y) = \frac{P(X \text{ és } Y)}{P(Y)} \qquad (9)$$

képletét kell használnunk:

$$P(\textit{két fiú HA van fiú}) = \frac{P(\textit{két fiú ÉS van fiú})}{P(\textit{van fiú})} = \frac{P(\textit{két fiú})}{1 - P(\textit{nincs fiú})} = \frac{p \cdot p}{1 - q \cdot q} \ .$$

Speciálisan, p=0.51 és q=0.49 esetében

$$P(\textit{két fiú HA van fiú}) = \frac{0.51 \cdot 0.51}{1 - 0.49 \cdot 0.49} \approx 0.3423 \approx 34.23 \ \% \ ,$$

$p=q=½$ esetében pedig

$$P(\textit{két fiú HA van fiú}) = \frac{0.50 \cdot 0.50}{1 - 0.50 \cdot 0.50} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \approx 0.3333 \approx 33.33 \ \% \ .$$

b2) Ismét a (9) képletet használjuk:

$$P(\textit{két lány HA van lány}) = \frac{P(\textit{két lány ÉS van lány})}{P(\textit{van lány})} = \frac{P(\textit{két lány})}{1 - P(\textit{nincs lány})} =$$

$$= \frac{q \cdot q}{1 - p \cdot p} \ .$$

Speciálisan, p=0.51 és q=0.49 esetében

$$P(\textit{két lány HA van lány}) = \frac{0.49 \cdot 0.49}{1 - 0.51 \cdot 0.51} \approx 0.3245 \approx 32.45 \ \% \ ,$$

p=q=½ esetében pedig természetesen

$$P(\textit{két lány HA van lány}) = \frac{0.50 \cdot 0.50}{1-0.50 \cdot 0.50} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \approx 0.3333 \approx 33.33\ \%\ .$$

c1) A (9) képletet alapján:

$$P(\textit{van lány HA van fiú}) = \frac{P(\textit{van lány ÉS van fiú})}{P(\textit{van fiú})} =$$

$$= \frac{1-P(\textit{csak fiú})-P(\textit{csak lány})}{1-P(\textit{nincs fiú})} = \frac{1-p \cdot p \cdot p - q \cdot q \cdot q}{1-q \cdot q \cdot q} = 1 - \frac{p \cdot p \cdot p}{1-q \cdot q \cdot q}\ .$$

Speciálisan, p=0.51 és q=0.49 esetében

$$P(\textit{van lány HA van fiú}) = 1 - \frac{0.51 \cdot 0.51 \cdot 0.51}{1-0.49 \cdot 0.49 \cdot 0.49} \approx 0.84966 \approx 0.85\ \%\ ,$$

p=q=½ esetében pedig

$$P(\textit{van lány HA van fiú}) = 1 - \frac{1/8}{1-1/8} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} \approx 0.8571 \approx 85.71\ \%\ .$$

c2) Csere esetén természetesen

$$P(\textit{van fiú HA van lány}) = \frac{P(\textit{van fiú ÉS van lány})}{P(\textit{van lány})} =$$

$$= \frac{1-P(\textit{csak fiú})-P(\textit{csak lány})}{1-P(\textit{nincs lány})} = \frac{1-p \cdot p \cdot p - q \cdot q \cdot q}{1-p \cdot p \cdot p} = 1 - \frac{q \cdot q \cdot q}{1-p \cdot p \cdot p}\ .$$

Speciálisan, p=0.51 és q=0.49 esetében

$$P(\textit{van lány HA van fiú}) = 1 - \frac{0.49 \cdot 0.49 \cdot 0.49}{1-0.51 \cdot 0.51 \cdot 0.51} \approx 0.8643 \approx 86.43\ \%\ ,$$

p=q=½ esetében pedig

$$P(\textit{van fiú HA van lány}) = 1 - \frac{1/8}{1-1/8} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} \approx 0.8571 \approx 85.71\ \%\ .$$

Ismételten hangsúlyozzuk, hogy a fenti számítások csak országos átlagra vonatkoznak, és nem a mi családunk következő szülésére, hiszen az mindenképpen *p* eséllyel fiú és *q* eséllyel leány !

Pénzérme

Az egymás utáni dobások egymástól függetlenek (az érmének nincs memóriája), tehát minden további dobás, az előzőektől függetlenül 50% eséllyel fej és 50% eséllyel írás.

Két dobókocka

Két kockával 6*6=36 féle dobás lehetséges (mindkettő a másiktól függetlenül lehet 1,2,3,4,5,6 bármelyike). A két kockát mindenképpen meg kell különböztetnünk: hiába hívjuk mi őket "két azonos fehér" kockának, a valósában ez fizikailag két külön kocka! Nézzük meg, hogy a különböző összegeket hányféleképpen lehet "kigurítani" :

2 = 1+1 ⇒ P(*összeg*=**2**) = 1/36 ,
3 = 1+2 = 2+1 ⇒ P(*összeg*=**3**) = 2/36 ,
4 = 1+3 = 2+2 = 3+1 ⇒ P(*összeg*=**4**) = 3/36 ,
5 = 1+4 = 2+3 = 3+2 = 4+1 ⇒ P(*összeg*=**5**) = 4/36 ,
6 = 1+5 = 2+4 = 3+3 = 4+2 = 5+1 ⇒ P(*összeg*=**6**) = 5/36 ,
7 = 1+6 = 2+5 = 3+4 = 4+3 = 5+2 = 6+1 ⇒ P(*összeg*=**7**) = 6/36 ,
8 = 2+6 = 3+5 = 4+4 = 5+3 = 6+2 ⇒ P(*összeg*=**8**) = 5/36 ,
9 = 3+6 = 4+5 = 5+4 = 6+3 ⇒ P(*összeg*=**9**) = 4/36 ,
10 = 4+6 = 5+5 = 6+4 ⇒ P(*összeg*=**10**) = 3/36 ,
11 = 5+6 = 6+5 ⇒ P(*összeg*=**11**) = 2/36 ,
12 = 6+6 ⇒ P(*összeg*=**12**) = 1/36 .

Három ajtó

Jelölések: *Ny*=nyer, A_1,A_2,A_3 = melyik ajtót választja eredetileg. Legyen a nyeremény az A_1 ajtó mögött.

Ha **nem vált**, akkor $P(Ny)=1/3$.

Ha **vált**, akkor

$P(Ny) = P(Ny \text{ és } A_1)+P(Ny \text{ és } A_2) +P(Ny \text{ és } A_2) = 0 + 1/3 + 1/3 = 2/3$

(precízebb matematikai képletekkel:

$$P(Ny) = P(Ny|A_1)\cdot P(A_1)+P(Ny|A_2)\cdot P(A_2)+P(Ny|A_2)\cdot P(A_2) =$$
$$= 0\cdot 1/3 + 1\cdot 1/3 + 1\cdot 1/3 = 2/3 \text{)}.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha a nyeremény eredetileg az A_2 vagy az A_3 ajtó mögött volt.

TEHÁT (valószínűség szerint, vagyis **sok kísérlet** esetén) : *váltáskor a gyakoriság (valószínűség) kétszeresére emelkedik*.

Néhány mértékegység átváltása

1 inch (hüvelyk) = 2.54 cm
1 foot (láb) = 30.48 cm
1 mile (mérföld) = 1.6093 km
1 square foot (négyzetláb) = 0.929 m^2 (négyzetméter)
1 acre (angol hektár) = 0.4047 ha
1 square mile (négyzetmérföld) = 2.590 km^2 (négyzetkilométer)

1 cubic inch (köbhüvelyk) = 16.38 köbcentiméter
1 gallon = 3.783 liter

1 ounce (uncia) = 28.35 gr
1 pound (font) = 0.4536 kg

Irodalom

Ajánlott művek

[CA] **Cole, Alison**: *Perspektíva* ("Szemtanú" sorozat), Park Kiadó, Budapest, 1993.

[CsB] **Csákány Béla**: *Diszkrét matematikai játékok*, Polygon--könyvtár sorozat, JATE Bolyai Intézet, Szeged, 1998.

[DJ] **Deval, Jacques**: *A potyautas*, vígjáték.

[GG] **Gárdonyi Géza**: *Nagyapó tréfái*, Tóth Kiadó, Debrecen, 2000.

[GI] **Gazsó István:** *Transzformációk* (Általános iskolai szakköri füzet), Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

[GJ] **Grätzer József**: *Sicc (Szórakoztató Időtöltések, Cseles csalafintaságok)*, Móra Kiadó, Budapest, 1977,
Új kiadás: Nyitott Könyvműhely Kiadó 2012.

[GGy1] **Grätzer György:** *Elmesport egy esztendőre*, Nyitott Könyvműhely Kiadó 2012.

[GGy2] **Grätzer György:** *Rébusz*, Nyitott Könyvműhely Kiadó, megjelenés alatt

[HK] **Hujter Mihály** (szerk): *Haladvány Kiadvány*, http://www.math.bme.hu/~hujter/halad.htm

[HN1] **Herrmann, Norbert**: *Mathematik ist überall* [Matematika mindenütt], Oldenbourg Verlag, München, 2007. http://www.mathematikistuberall.de

[HN2] **Herrmann, Norbert**: *Können Hunde rechnen?* [Tudnak a kutyák számolni?] Oldenbourg Verlag, München, 2007.

[HN3] **Herrmann, Norbert**: *The Beauty of Everyday Mathematics* [A mindennapi matematika szépségei], Springer Verlag, Berlin, 2011.

[JT] **Jansson, Tove**: *Muminbocs és az üstökös*, Napkút Kiadó, Budapest, 2006, 94-103.oldalak.

[KK] **Kovács Klára**: *Megérteni valamit*, Matematikai Lapok 2010/3, 51-55.old.

[KP] **Kent, Philip:** *Anamorph Me!* [Alakíts át engem!], ingyenes számítógép-program, http://www.anamorphosis.com

[LS] **Loyd, Sam**: *Cyclopaedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums* [5000 rejtvény, trükk és találós kérdés lexikona], The Lamb publ.Co., New York, 1914. http://www.mathpuzzle.com/loyd/

[MK] **Mikszáth Kálmán**: *Különös házasság*, 5.fejezet: "*A talányok embere*".

[MGy] **Miholcsa Gyula**: *Labirintus*, Appendix Kiadó, Marosvásárhely, 2001.

[OI] **Orosz István** weboldala: http://web.axelero.hu/utisz/page.htm

[PJ] **Perelman, Ja.I.**: *Matematikai történetek és rejtvények,* Gondolat Kiadó, Bp. 1979.

[SzL] **Székely J. Gábor**: *Paradoxonok a véletlen világából,* Typotex Kiadó, Budapest.

[ZB] **Zerkovitz Béla** kupléi, pl. http://gramofon.nava.hu .

KöMaL újság feladataiból:

[K50] **Molnár József:** *Síkgörbék fonalas szerkesztése,* KöMaL 1950/2., 3. 4. számaiban

[K89] **Pelikán József:** *Az arányos képviselet matematikája,* KöMaL 1989/5, 193-201.old.

[K95] KöMaL C 376 feladat, 1995/7, 400-401.old.

[K99a] KöMaL C 560 feladat, 1999/10, 544.old. és 2000/szept., 346.old.
[K99b] KöMaL C 536 feladat, 1999/3, 168.old., és 1999/9, 519.old.
[K02] KöMaL C 682. feladat, 2002/6, 348.old.
[K05] KöMaL tesztverseny 2005.
[K11] KöMaL C.1079 feladat, 2011. április.

Szalkai István műveiből:

[SzI0] **Szalkai István**: *Algebra és számelmélet feladatgyűjtemény*, Pannon Egyetemi Kiadó, Veszprém, 2005.
[SzI1] **Szalkai István**: *Szemléletes analízis*, megjelenőben http://www.tankonyvtar.hu , 2011.
[SzI2] **Szalkai István, Koltay László**: *Analízis feladatgyűjtemény*, Pannon Egyetemi Kiadó, Veszprém, 2009.
[SzI3] **Szalkai István, Mikó Teréz**: *A közgazdaságtan matematikai alapjai*, 2011. http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Anal-Tk1B-c.pdf
[SzI4] **Szalkai István**: *Szemléletes analízis feladatgyűjtemény I.*, megjelenőben http://www.tankonyvtar.hu , 2011.
[SzI5] **Szalkai István, Dósa György**: *Kalkulus példatár informatikusoknak, II.*, megjelenőben, 2010, http://www.tankonyvtar.hu http://tananyagfejlesztes.mik.uni-pannon.hu
[SzI6] **Szalkai István, Dósa György**: *Algoritmikus számelmélet*, megjelenőben, 2011, http://www.tankonyvtar.hu http://tananyagfejlesztes.mik.uni-pannon.hu
[SzI7] **Szalkai István**: *Diszkrét matematika feladatgyűjtemény*, Pannon Egyetemi Kiadó, Veszprém, 1995.
[SzI8] **Szalkai István**: *Diszkrét matematika és algoritmus elmélet alapjai*, Pannon Egyetemi Kiadó, Veszprém, 2000.
[SzI9] **Szalkai István**: *Mesés feladatok a valószínűségszámításban*, Haladvány Kiadvány,

http://www.math.bme.hu/~hujter/halad.htm,
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/cikkValszaMese+.doc

[SzI 10] **Szalkai István**: *Számrendszerek alkalmazásáról*, Polygon (Szeged), 7.kötet (1997), 85-88.old.

[SzI 11] **Szalkai István**: *Egymásba ágyazott FOR-ciklusok alkalmazása*, Polygon IX (1999), 55-58.

[SzI 12] **Szalkai István, Velleman,D.J.:** *Versatile Coins* [Rugalmas pénzérmék], Amer.Math.Monthly 100 (1993) pp.26-33.

[SzI 13] **Szalkai István, Velleman,D.J.:** *Rugalmas pénzérmék*, Matematikai Lapok, 1992/3-4 (1995), 23-38. old.

[SzI 14] **Szalkai István:** *Szemléltetés és becsapás*, Haladvány Kiadvány, 2012, http://www.math.bme.hu/~hujter/120415.pdf http://www.math.bme.hu/~hujter/halad.htm

[SzI 15] **Szalkai István, Szalkai Balázs:** *Kártyajátékok és bűvésztrükkök*, Polygon, XXI (2013) 89-100.

Felhasznált művek

[A07] *Abacus* újság 2007 Barkács matek

[ÉT63/28] *Élet és Tudomány* újság, 1963/28. szám 896.old. Geometria a kocsiúton

[ÉT63/34] *Élet és Tudomány* újság, 1963/34.szám.

[ÉT63/39] *Élet és Tudomány* újság, 1963 /39.,40,42. számok

[MG00] **Hickin, Philip:** *Anamorphosis* [Anamorfózisok], The Mathematical Gazette, Vol.76. No.476 (July 1992), pp. 208-221.

[MG01] **Tony Robin:** *Decimalisation?* [Tízes számredszer?], The Mathematical Gazette, No.525, (2008), p. 436.

[MG02] **Nick Lord:** *When is an oval not an ellipse?* [Egy ovális mikor nem ellipszis?] The Mathematical Gazette, Vol.86. No.505 (2002), pp. 92-94.

[OÉ] **Mihálykóné Orbán Éva:** *Valószínűségszámítási példatár informatikusoknak*, Typotex Kiadó, Budapest, 2011, http://www.tankonyvtar.hu http://tananyagfejlesztes.mik.uni-pannon.hu

[WE] **Weisstein, Eric W.:** *Ehrhart Polynomial* [Ehrhart-polinomok], MathWorld-A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/EhrhartPolynomial.html

- - - vége - - -