

A 2025. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENY
FELADATAI

2025. október 24. – 2025. november 3.

1. Tetszőleges $r, n \geq 1$ egész számok esetén jelölje $P(r, n)$ az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazon definiált ekvivalenciarelációkból álló azon $(E_1, \dots, E_r)$ rendezett r -esek számát, amelyekre $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_r$. Bizonyítsuk be, hogy rögzített r esetén $P(r, n) < n!$, amennyiben n elég nagy.
2. Legyen egy irányított gráf szoros, ha nincs olyan $k > 1$ természetes szám és a gráf csúcsainak c színezése $\mathbb{Z}_k$ elemeivel, amelyre minden (a, b) él esetén $c(b) = c(a) + 1$. Igaz-e, hogy összefüggő, szoros irányított gráfok direkt szorzata is szoros?
3. Legyenek a_1, a_2, a_3, a_4 olyan rögzített pozitív egészek, melyekre $\ln k_0(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$ teljesül, és jelölje φ az Euler-féle függvényt. Mutassuk meg, hogy ha a

$$\varphi(a_1^{x_1}) + \varphi(a_2^{x_2}) = \varphi(a_3^{x_3}) + \varphi(a_4^{x_4})$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van az x_1, x_2, x_3, x_4 nemnegatív egészekben, akkor vannak olyan u, v pozitív egészek, melyekkel az

$$a_1^u = a_3^v, \quad a_1^u = a_4^v, \quad a_2^u = a_3^v, \quad a_2^u = a_4^v$$

egyenlőségek legalább egyike teljesül!

4. Adott pozitív $k \geq 1$ egész esetén definiáljuk az $\{F_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ k -Fibonacci sorozatot az $F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1, F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}$ ($n \geq 2$) rekurzióval. Oldjuk meg az

$$F_{k,n} = 2^m 3^l$$

diofantikus egyenletet a (k, n, m, l) nemnegatív egészekre nézve.

5. Mely $m \geq 2$ természetes számokra vannak olyan $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_m$ természetes számok és olyan a, b pozitív számok, amelyekre a

$$\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a + kb), \quad j = 1, \dots, m-1$$

összegek mind egyenlők?

6. Legyen n adott természetes szám. Egy $P(z) = 1 + z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ ($a_n \neq 0$) polinomra jelölje δ_P a P zérushelyei abszolút értékeinek a legkisebbikét. Határozzuk meg a $\sup_P \delta_P$ számot, ahol a szuprémumot a fenti alakú polinomokra képezzük.

7. Igazoljuk, hogy egy $a_0, \dots, a_n$ valós sorozatra az alábbi két állítás ekvivalens.

- a) Valamely L konstansra teljesül az, hogy ha $\{c_k\}_{k=1}^N$ egy tetszőleges véges valós sorozat és

$$b_k = c_k a_0 + c_{k-1} a_1 + \dots + c_{k-n} a_n, \quad k = 1, \dots, N+n$$

(ahol $c_j = 0$, ha $j \leq 0$ vagy $j > N$), akkor

$$\sum_{k=1}^N \frac{c_k^2}{k} \leq L \sum_{k=1}^{N+n} \frac{b_k^2}{k}.$$

- b) A $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ polinomnak nincs zérushelye az egységkörön.

8. Legyen adott $0 < D < 1/2$ és $0 < \alpha < 1$. Igazoljuk, hogy létezik véges sok, 1 szerint periodikus, $\mathbb{R}$ -en értelmezett, egynél nem nagyobb abszolút értékű $g_1, \dots, g_d$ Lipschitz-függvény és egy D -től független pozitív C konstans, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ -re, ha $D \leq |x - y| < 1/2$, akkor létezik olyan $i \in \{1, \dots, d\}$, amelyre

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k\alpha} g_i(3^k x) - \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k\alpha} g_i(3^k y) \right| \geq C.$$

9. Legyenek $\lambda, \mu \in (0, 1)$ konstansok, $I \subseteq \mathbb{R}$ egy nemüres nyílt intervallum, és legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ egy nemkonstans alulról félig folytonos, $p: I \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy tetszőleges pozitív függvény. Igazoljuk, hogy az

$$f\left(\frac{\lambda p(u)u + (1 - \lambda)p(v)v}{\lambda p(u) + (1 - \lambda)p(v)}\right) \leq \frac{\mu p(u)f(u) + (1 - \mu)p(v)f(v)}{\mu p(u) + (1 - \mu)p(v)}$$

egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül minden $u, v \in I$ esetén, ha f konvex I -n és $\lambda = \mu$.

10. Legyenek N és M rögzített pozitív egész számok, $N \geq M$, $\lambda = M/N$. Legyen P olyan valószínűség a $(0, 1] \times (0, 1]$ egységnégyzeten, melynek marginális eloszlásfüggvényei: F_x a $(0, 1]$ -en egyenletes eloszlás, F_y pedig teljesíti az $F_y(y_2) - F_y(y_1) \leq (y_2 - y_1)/\lambda$, $y_1 \leq y_2$ feltételt. Minden k pozitív egészre jelölje $\mathcal{F}^{(k)}$ az olyan $[0, 1]$ -re koncentrált eloszlások $F^{(k)}$ eloszlásfüggvényeinek halmazát, melyek képe folytonos töröttvonal és bármely $[\frac{i}{kN}, \frac{i+1}{kN}]$ intervallumon $F^{(k)}$ vagy konstans, vagy pedig $1/\lambda$ meredekségű egyenes, $i = 0, 1, 2, \dots$. Igazoljuk, hogy létezik a $(0, 1] \times (0, 1]$ -re koncentrált $P^{(k)}$ valószínűségeknek egy olyan sorozata, melyek a valószínűségi mértékek gyenge konvergenciájának értelmében P -hez konvergálnak, és melyek marginális eloszlásfüggvényeire igaz, hogy $F_x^{(k)}$ a $(0, 1]$ -en egyenletes eloszlás és $F_y^{(k)} \in \mathcal{F}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$.

**A megoldások beküldési határideje 2025. november 3-án (hétfőn)
magyar idő szerint 12:00 óra.**

A megoldásokat magyar nyelven, **elektronikusan, egy e-mailben, pdf formátumban, feladatonként külön fájlban** az **olah.mark@science.unideb.hu** címre kérjük beküldeni. A megoldások készülhetnek szövegszerkesztővel, vagy jól olvashatóan, kézzel írva, jó minőségben szkennelve. Minden megoldáson kérjük feltüntetni a versenyző nevét, e-mail címét és a feladat sorszámát. Továbbá, a megoldásokat tartalmazó e-mailben kérjük megadni a versenyző nevét, iskoláját és évfolyamát, vagy végzettségét.

Más úton, illetve határidő után beadott megoldásokat a versenybizottság nem vesz figyelembe.

A versenyzők tetszés szerinti számú kitűzött feladat megoldását nyújthatják be. A verseny nyertesei között a Társulat Schweitzer Miklós díjakat oszt ki. A feladatokat a versenyzőknek önállóan kell megoldaniuk. Több versenyző együttműködése nincs megengedve. Ha a versenybizottság tudomására jut, hogy valamelyik versenyző ezt a követelményt megszegte, az illetőt a versenyből kizárja. A versenyzők bármilyen felmerülő technikai kérdésüket is a fenti e-mail címre küldhetik.

Jó feladatmegoldást kívánunk!