2024. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny

A feladatok megoldása

1. Legyen $G = (S, T; E)$ teljes párosítással rendelkező véges páros gráf. Igazoljuk, hogy létezik olyan $w\colon E \to \mathbb{R}$ injektív élsúlyozás, mely teljesíti az alábbiakat:

(1) Ha e_s a legkisebb súlyú s-re illeszkedő él minden $s \in S$ pontra, akkor $\{e_s \mid s \in S\}$ teljes párosítás G-ben.

(2) Ha e_t a legnagyobb súlyú t-re illeszkedő él minden $t \in T$ pontra, akkor $\{e_t \mid t \in T\}$ teljes párosítás G-ben.

(Bérczi Kristóf)

Megoldás: A megoldáshoz használjuk majd az alábbi jól ismert lemmát, melyet a teljesség kedvéért belátunk.

1.1. Lemma: *Ha egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban csak egy teljes párosítás létezik, akkor létezik a párosítás éleinek olyan $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \ldots, (s_n, t_n)$ felsorolása, hogy $i > j$ esetén s_i és t_j között nem megy él.*

Bizonyítás: Indukcióval bizonyítunk, az $n = 1$ eset triválisan igaz. Ha találunk egy egyfokú csúcsot T-ben, akkor ezt válasszuk t_n-nek, majd töröljük őt és egyetlen szomszédját, és alkalmazzuk az indukciós feltevést. Ha nincs egyfokú csúcs, akkor minden $s \in S$-hez válasszunk egy, a párosításban nem szereplő élet. Ez az n él és a párosítás n éle szükségszerűen tartalmaz kört, ami mentén alternálva egy másik párosítást kaphatnánk, ellentmondva a feltételnek. □

Most rátérünk a feladatra, melyet szintén a csúcsosztályok méretére vonatkozó teljes indukcióval látunk be. Az $n = 1$ eset ismét triválisan igaz. Általános n-re két esetet különböztetünk meg.

1. eset: A gráfban csak egy teljes párosítás létezik.

A lemmát felhasználva ekkor az alábbi súlyozás kielégíti a követelményeket: az (s_i, t_i) élnek adjunk i súlyt, ha pedig $i < j$-re (s_i, t_j) egy él, akkor ennek adjunk egy tetszőleges i és j közti súlyt (az injektivitást figyelembe véve).

2. eset: A gráfban létezik két különböző teljes párosítás.

Ekkor a két párosítás uniója tartalmaz egy C alternáló kört. Legyen $G' = (S', T'; E')$ a G-ből C csúcsait törölve kapott gráf. Az indukció szerint G' éleinek létezik megfelelő súlyozása. Legyenek az így kapott súlyok m és M közötti értékek valamilyen $m < M$ számokra.

Az alternáló C kör két párosításból áll, ezek közül az egyik éleinek adjunk (csupa különböző) tetszőleges $(M+1)$-nél nagyobb súlyokat, a másik éleinek $(m-1)$-nél kisebbeket, a C csúcsai között menő többi élnek pedig tetszőleges m és M közöttieket. A C egy T-beli csúcsát egy S'-beli csúccsal összekötő törölt élnek M és $M+1$ közti súlyt, míg a C egy S-beli csúcsát egy T'-beli csúccsal összekötő törölt élnek pedig m és $m-1$ közti súlyt adjunk. Ez a súlyozás továbbra is megfelel a feltételeknek, tehát az állítást beláttuk. □

Megjegyzés: A feladat egy nyitott sejtés speciális esete, mely szerint bármely két, közös bázissal rendelkező matroid alaphalmaza súlyozható úgy, hogy az egyik matroid legolcsóbb bázisa, illetve a másik matroid legdrágább bázisa mindkét matroidban bázis legyen.

2. Van-e olyan $C \subset [0,1]$ sehol sem sűrű, nemüres kompakt halmaz, melynek minden $x \in C$ pontjára

$$\liminf_{h\to 0+} \frac{\lambda\big(C \cap (x, x+h)\big)}{h} > 0 \qquad \text{vagy} \qquad \liminf_{h\to 0+} \frac{\lambda\big(C \cap (x-h, x)\big)}{h} > 0$$

teljesül, ahol $\lambda(A)$ az A Lebesgue-mértékét jelöli?

(Buczolich Zoltán)

1. Megoldás: Úgy látjuk be, hogy nincs ilyen C halmaz, hogy mindegyikhez legyártunk egy olyan x pontot, amelyre mindkét feladatban szereplő $\liminf$ értéke (azaz C jobboldali és baloldali alsó sűrűsége) 0. Bármely izolált pontja C-nek triviálisan jó x-nek, ezért a továbbiakban feltehetjük, hogy C-nek nincs izolált pontja.

Az x pontot egymásba skatulyázott zárt $J_1 \supset J_2 \supset \ldots$ intervallumok metszeteként fogjuk előállítani. Az alsó sűrűségek nullaságát az fogja garantálni, hogy páratlan n-ekre J_n-hez balról fog csatlakozni C-nek egy J_n-nél legalább n-szer hosszabb I_n kiegészítő nyílt intervalluma, páros n-re pedig jobbról. (C kiegészítő intervallumain C komplementerének korlátos összefüggő komponenseit értjük.) Ekkor világos, hogy mind a bal-, mind a jobb oldali alsó sűrűség nulla lesz x-ben. A fenti feltételből az is következik, hogy a J_n-ek hossza legfeljebb $1/n$, tehát a metszetük 1 pont. Azt, hogy ez a metszet benne van C-ben az garantálja, hogy minden J_n-nek valamelyik végpontja C-ben van és C_n zárt.

Tehát elég a fentieket kielégítő I_n, J_n intervallumsorozatokat legyártani, amit rekurzióval fogunk csinálni. Legyen I_1 tetszőleges kiegészítő nyílt intervalluma C-nek. Legyen J_1 olyan zárt intervallum, amely jobbról csatlakozik I_1-hez és ugyanakkora a hossza. Mivel C-ről feltettük, hogy nincs izolált pontja, és azt is tudjuk, hogy sehol sem sűrű, van C-nek olyan I_2 kiegészítő intervalluma, amely benne van J_1 belsejében. Ezután vegyünk J_1-en belül egy olyan J_2 zárt intervallumot, ami balról csatlakozik I_2-höz és a hossza legfeljebb fele J_2 hosszának. Ezt folyatva megfelelő intervallumsorozatokat kapunk. $\square$

2. Megoldás: Belátjuk, hogy nincs ilyen C. Mivel a C Baire-tér, elég azt megmutatni, hogy tipikus $x \in C$ pontban a baloldali alsó sűrűség nulla, ugyanis a szimmetria miatt ugyanez igaz lesz a jobboldali alsó sűrűségre is. Ehhez azt fogjuk megmutatni, hogy a

$$G_n = \left\{ x \in C \;\middle|\; \exists h \in \left(0, \frac{1}{n}\right) : \frac{\lambda\big(C \cap (x-h, x)\big)}{h} < \frac{1}{n} \right\}$$

halmaz sűrű relatív nyílt C-ben. Világos, hogy ezzel készen vagyunk, mert ha $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, akkor az x-beli baloldali alsó sűrűség nulla.

Az könnyen látható, hogy a G_n relatív nyílt, hiszen rögzített h mellett az $x \mapsto \lambda\big(C \cap (x-h, x)\big)$ függvény folytonos. A sűrűség igazolásához vegyünk egy C-t metsző I intervallumot. Mivel C sehol sem sűrű, található egy maximális C-től diszjunkt $J \subseteq I$ intervallum. Az $I \cap C \neq \emptyset$ feltevés miatt a J-t választhatjuk úgy, hogy az $I \cap C$-nek egy tetszőleges pontjától balra van, ekkor a J-nek az x jobb végpontja is I-ben van. Ekkor $x \in G_n$, tehát megmutattuk, hogy a G_n sűrű nyílt halmaz C-ben. $\square$

3. Léteznek-e $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehol sem differenciálható folytonos függvények, melyekre $f \circ g$ differenciálható?

(Buczolich Zoltán)

1. Megoldás: Indirekt bizonyítjuk, hogy nincsenek ilyen függvények.

Egy h differenciálható függvény deriváltjának mindig van folytonossági pontja (mert a deriváltfüggvény Baire-1, Baire-1 függvényekre pedig ez ismert), ezért van olyan I intervallum, melyen h' korlátos, amiből következik, hogy ezen az I intervallumon h korlátos változású. Tehát ha $h = f \circ g$ differenciálható, akkor van olyan I intervallum, melyen korlátos változású.

Mivel g sehol sem differenciálható, ezért nem lehet monoton csökkenő az I intervallumon, ezért van olyan $a, b \in I$, amelyre $a < b$ és $g(a) < g(b)$. Ekkor $f \circ g$ az $[a, b] \subset I$ intervallumon is korlátos változású.

Viszont ha egy f függvény sehol sem differenciálható, akkor semmilyen intervallumon nem lehet korlátos változású, mert a korlátos változású függvények majdnem mindenütt differenciálhatóak (mert előállnak két monoton függvény különbségeként). Tehát f nem lehet korlátos változású $[g(a), g(b)]$-n, azaz bármely M-hez van $g(a) = y_0 < \ldots < y_n = g(b)$ felosztás, amelyre

$$\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(y_{i-1})| > M.$$

Mivel g folytonos, ezért az $x_1, \ldots, x_{n-1}$ számokat egymás után, egyenként megválválasztva készíthetünk olyan $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ felosztást, amelyre $y_i = g(x_i)$ teljesül minden i-re. Ekkor viszont

$$\sum_{i=1}^{n} |f(g(x_i)) - f(g(x_{i-1}))| = \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(y_{i-1})| > M.$$

Mivel M tetszőleges volt, ez ellentmond annak, hogy $f \circ g$ az $[a, b]$ intervallumon korlátos változású. $\square$

2. Megoldás: Egy valós függvény rendelkezik a Banach-féle T_2 tulajdonsággal, ha majdnem minden értéket csak megszámlálható sokszor vesz fel. Ismeretes (Saks: Theory of the Integral), hogy minden $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény rendelkezik a T_2 tulajdonsággal.

Ismert még (A. M. Bruckner, S. H. Jones, Behavior of continuous functions with respest to intersection patterns, Theorem 2), hogy egy sehol sem differenciálható folytonos függvény értékkészletének majdnem minden elemét nem megszámlálható sokszor veszi fel.

A g függvényről csak azt használjuk ki, hogy folytonos és nem konstans, így értékkészlete tartalmaz egy (a, b) intervallumot. Tekintsük az $f|_{(a,b)}$ függvényt. Ez a függvény sehol sem differenciálható, így értékkészletének majdnem minden elemét nem megszámlálható sokszor veszi fel. De akkor ugyanezeket az értékeket $f \circ g$ is nem megszámlálható sokszor veszi fel, így nem rendelkezik a T_2 tulajdonsággal, így nem is lehet differenciálható. $\square$

3. Megoldás: Nem léteznek. Indirekt tegyük fel, hogy léteznek, és legyen $h = f \circ g$.

Először azt bizonyítjuk, hogy elég megmutatni, hogy Lebesgue majdnem minden $x \in \mathbb{R}$-hez létezik $x_n \to x$, hogy $g(x_n) = g(x)$. Valóban, tegyük föl, hogy ezt már tudjuk; akkor persze az ilyen esetekben a $h(x_n) = h(x)$ is teljesül, azaz ha h differenciálható, akkor $h'(x) = 0$ majdnem mindenütt. Legyen $E = \{x \mid h'(x) = 0\}$. A fentiek szerint $\lambda(\mathbb{R} \setminus E) = 0$. Egy differenciálható φ függvény nem feltétlenül abszolút folytonos, vagy korlátos változású, de rendelkezik a Luzin N tulajdonsággal, azaz ha $\lambda(H) = 0$, akkor $\lambda\big(\varphi(H)\big) = 0$ is teljesül. Ismeretes az a valós függvénytani feladat is, hogy ha $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos (vagy mérhető) függvény és $Z = \{x \mid \varphi'(x) = 0\}$, akkor $\lambda\big(\varphi(Z)\big) = 0$. Tehát a mi h függvényünkre $\lambda\big(h(\mathbb{R})\big) \leq \lambda\big(h(E)\big) + \lambda\big(h(\mathbb{R} \setminus E)\big) = 0$. Mivel f és g sehol sem differenciálhatóak, így nincs olyan intervallum, amin konstansak lennének, tehát $\lambda\big(h(\mathbb{R})\big) > 0$, ami ellentmondás.

Most rátérünk annak belátására, hogy Lebesgue majdnem minden $x \in \mathbb{R}$-hez létezik $x_n \to x$, hogy $g(x_n) = g(x)$.

Legyen

$$E_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \delta_x > 0 : g(t) \neq g(x), \text{ ha } t \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \setminus \{x\}\}.$$

Ez a halmaz négy diszjunkt halmazra bontható a szerint, hogy g értéke a kérdéses pont előtt / után kisebb vagy nagyobb a kérdéses pontban felvett értéknél:

$$\begin{aligned}
E_{0,++} &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \delta_x > 0 : g(t) > g(x), \text{ ha } t \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \setminus \{x\}\},\\
E_{0,--} &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \delta_x > 0 : g(t) < g(x), \text{ ha } t \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \setminus \{x\}\},\\
E_{0,-+} &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \delta_x > 0 : g(t) < g(x), \text{ ha } t \in (x - \delta_x, x),\ g(t) > g(x), \text{ ha } t \in (x, x + \delta_x)\},\\
E_{0,+-} &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \delta_x > 0 : g(t) > g(x), \text{ ha } t \in (x - \delta_x, x),\ g(t) < g(x), \text{ ha } t \in (x, x + \delta_x)\}
\end{aligned}$$

Az $E_{0,++}$ és $E_{0,--}$ halmazok a szigorú lokális szélsőértékhelyeknek felelnek meg, így megszámlálható elemszámúak. $E_{0,-+}$ és $E_{0,+-}$ a lokális növekedési és csökkenési pontok halmaza. Ezek (Borel) mérhetőek és ha valamelyik, mondjuk $E_{0,-+}$ pozitív mértékű, akkor kiválasztható egy $\delta > 0$ és egy kompakt pozitív mértékű F halmaz, aminek átmérője kisebb, mint δ, és minden $x \in F$-re $\delta_x > \delta$. Ekkor g monoton nő F-en, és kiterjeszthető egy egész $\mathbb{R}$-en értelmezett monoton ψ függvénnyé, ami majdnem mindenütt differenciálható.

Legyen x_0 az F olyan Lebesgue sűrűségi pontja, ahol ψ differenciálható. Megmutatjuk, hogy g is differenciálható x_0-ban, ellentmondva a feltételnek. Ha (a, b) egy δ-nál rövidebb komplementer intervalluma F-nek, akkor $x \in (a, b)$-re $g(a) < g(x) < g(b)$. Mivel x_0 az F sűrűségi pontja így (a, b) kellően rövid lesz. Használva, hogy F-en $g = \psi$ és ψ differenciálható x_0-ban, így valóban azt kapjuk, hogy g differenciálható x_0-ban. □

Megjegyzés: Ha valaki ismeri a Denjoy–Young–Saks tételt, akkor a folytonosságot is kihasználva a fenti érvelés kicsit rövidíthető.

4. Legyen π az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak egy adott permutációja. Határozzuk meg $\sum_{i=1}^{n} |\pi(i) - \sigma(i)|$ legkisebb lehetséges értékét, ha a σ permutáció az n hosszúságú ciklusok közül választható. A választ a π diszjunkt ciklusok szorzatára való felbontásában szereplő ciklusok (beleértve az egyeleműeket is) számának és hosszának függvényében adjuk meg!

(Prokaj Vilmos)

Megoldás: Jelölje $\nu(\alpha)$ az α permutáció ciklusainak számát. Ismert és könnyű, hogy $n - \nu$ szubadditív, azaz $\nu(\alpha\beta) \geq \nu(\alpha) + \nu(\beta) - n$.

Jelölje

$$d(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha(i) - \beta(i)| = d\left(\alpha\beta^{-1}, \iota\right)$$

az α és β permutációk ℓ_1-távolságát, ahol ι az identikus permutáció. Ha a τ permutáció ciklusainak hossza rendre $k_1, \ldots, k_{\nu(\tau)}$ akkor

$$d(\tau, \iota) = \sum_{i=1}^{n} |\tau(i) - i| \geq \sum_{j=1}^{\nu(\tau)} 2(k_j - 1) = 2(n - \nu(\tau)).$$

Itt az egyenlőtlenség abból következik, hogy egy k-as ciklus legnagyobb és legkisebb elemének különbsége legalább $k - 1$.

Emiatt tetszőleges két permutációra

$$d(\pi, \sigma) = d(\sigma\pi^{-1}, \iota) \geq 2\left(n - \nu\left(\sigma\pi^{-1}\right)\right),$$

ugyanakkor

$$\nu(\sigma) = \nu\left(\sigma\pi^{-1}\pi\right) \geq \nu\left(\sigma\pi^{-1}\right) + \nu(\pi) - n,$$

ahonnan

$$d(\pi, \sigma) \geq 2(\nu(\pi) - \nu(\sigma)).$$

Egy σ permutáció akkor és csak akkor n-es ciklus, ha $\nu(\sigma) = 1$. Ekkor

$$d(\pi, \sigma) \geq 2(\nu(\pi) - 1).$$

Megmutatjuk $\nu(\pi)$ szerinti indukcióval, hogy alkalmas σ n-es ciklusra itt egyenlőség áll, így a jobb oldal a feladatban keresett minimum.

Ha $\nu(\pi) = 1$, akkor $\sigma = \pi$ megfelelő.

Ha $\nu(\pi) \geq 2$, akkor van olyan $\tau = (i - 1, i)$ transzpozíció, amelyre $i - 1$ és i a π-nek különböző ciklusaihoz tartoznak, azaz $\nu(\tau\pi) = \nu(\pi) - 1$. Ugyanakkor $d(\tau\pi, \pi) = 2$. Ha σ olyan n-es ciklus, amelyre $d(\tau\pi, \sigma) = 2(\nu(\tau\pi) - 1) = 2(\nu(\pi) - 2)$, akkor $d(\pi, \sigma) \leq d(\pi, \tau\pi) + d(\tau\pi, \sigma) = 2(\nu(\pi) - 1)$. □

5. Legyen X reguláris topologikus tér és S megszámlálhatóan kompakt sűrű altere X-nek. (A megszámlálhatóan kompakt tulajdonság azt jelenti, hogy S minden végtelen részhalmazának van torlódáspontja S-ben.) Mutassuk meg, hogy ekkor S G_δ-sűrű is X-ben, azaz minden nem-üres G_δ halmazt metsz.

(Juhász István)

Megoldás: Nevezzük a H halmazt *jó* G_δ-nak, ha előáll $H = \bigcap_{n<\omega} U_n$ alakban, ahol az U_n-ek nyíltak, és $\overline{U_{n+1}} \subsetneq U_n$ minden n-re. Ekkor tudunk választani

$$x_n \in S \cap U_n \setminus \overline{U_{n+1}}$$

pontokat minden n-re, és világos, hogy az $\{x_n \mid n < \omega\} \subset S$ halmaz minden torlódási pontja H-ban van, tehát $S \cap H \neq \emptyset$.

Az X tér regularitásából triviálisan következik, hogy minden nemüres G_δ tartalmaz egy nemüres *zárt* G_δ-t, ezért, mivel S sűrű, elég belátni, hogy minden üres belsejű, de nemüres zárt G_δ tartalmaz egy jó G_δ-t.

Legyen tehát $K = \bigcap_{n<\omega} G_n$ üres belsejű, de nemüres zárt G_δ, ahol a G_n-ek nyíltak. Legyen $x \in K$ tetszőleges pont, ekkor x nem lehet izolált. Ezért, X regularitását ismét használva, egyszerű indukcióval tudunk választani x-nek U_n nyílt környezeteit úgy, hogy $\overline{U_{n+1}} \subsetneq U_n \subset G_n$ minden $n < \omega$-ra. Világos, hogy ekkor $H = \bigcap_{n<\omega} U_n \subset K$. $\square$

6. Egy hőterjedési folyamat során egy $x \in \mathbb{R}^n$ pontban a hőmérséklet alakulását *meghökkentő*nek nevezzük, ha végtelen sokszor vált monotonitást. Lehetséges-e, hogy a hőmérséklet alakulása $\mathbb{R}^n$ minden pontjában meghökkentő? Azaz: létezik-e olyan nemnegatív $u \in C^2((0,+\infty) \times \mathbb{R}^n)$ megoldása a $\partial_t u - \Delta u = 0$ hővezetési egyenletnek, melyre $u(t,x) \to 0$ tetszőleges t mellett, ha $|x| \to \infty$, és bármely $x \in \mathbb{R}^n$ esetén létezik pozitív számokból álló monoton (t_k) sorozat, hogy $(-1)^k \partial_t u(t_k, x) > 0$ minden k-ra?

(Maga Balázs)

Megoldás: Ismert, hogy a hőegyenlet alapmegoldása $\Phi(t,x) = \varphi(t,|x|)$ alakú, ahol

$$\varphi(t,r) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-r^2/4t}.$$

Válasszunk egy tetszőleges pozitív valósakból álló, nullához tartó csökkenő $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ sorozatot. Definiálni fogunk egy nemnegatív valósakból álló $\{R_i\}_{i=1}^\infty$ sorozatot is, amely teljesíti az $R_i > 2R_{i-1}$ feltételt. Legyen $A_i = B(0,2R_i) \setminus B(0,R_i)$. A megoldást $u = \sum_{i=1}^\infty u_i$ alakban fogjuk megadni, ahol

$$u_i(t,x) = (a_i \chi_{A_n} * \Phi)(t,x) = a_i \int_{y \in A_i} \varphi(t,|x-y|)\, dy$$

alakú.

Először ellenőrizzük, hogy ez valóban $\mathcal{C}^2$ megoldása a hőegyenletnek. Mivel $\chi_{A_i} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ és $\Phi \in \mathcal{C}^2((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$, a konvolúció tulajdonságaiból adódik, hogy $u_i \in \mathcal{C}^2((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$. Emiatt csak azt kell megmutatnunk, hogy a $\sum_{i=1}^\infty u_i$ sor, valamint az első és második deriváltjai lokálisan egyenletesen konvergensek.

Legyen D egy valahányadrendű parciális derivált operátor (D lehet az identitás is). A konvolúció tulajdonságai miatt $Du_i = \chi_{A_i} * D\Phi$. Indukcióval ellenőrizhető, hogy $D\Phi(t,x) = \Phi(t,x) \cdot \frac{p(x,t)}{t^k}$ alakú, ahol $p \colon \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ polinom és $k \geq 0$ egész. Rögzítsünk egy $t_0 > 0$-t, és szorítkozzunk a $t > t_0$ tartományra. Ekkor van olyan K konstans, hogy $|D\Phi(t,x)| \leq K e^{-|x|}$. Ebből adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^\infty |Du_i(t,x)| \leq \sum_{i=1}^\infty a_i \int_{y \in A_i} |D\Phi(t,x-y)|\, dy \leq a_1 \int_{y \in \mathbb{R}^n} e^{-|x-y|}\, dy \leq a_1 K \int_{y \in \mathbb{R}^d} e^{-|y|}\, dy < \infty.$$

Itt felhasználtuk azt, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_{A_i} \le a_1$, ugyanis az A_i halmazok páronként diszjunktak az $R_i > 2R_{i-1}$ feltétel miatt. Mivel a kapott felső korlát nem függ x-től és t-től, beláttuk, hogy a $t > t_0$ tartományon a konvergencia egyenletes. Így megmutattuk, hogy $u \in \mathcal{C}^2((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ (sőt, valójában azt is, hogy $\mathcal{C}^\infty$).

Innen már világos, hogy u megoldása a hőegyenletnek, hiszen

$$\partial_t u = \sum_{i=1}^{\infty} \partial_t u_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_{A_i} * \partial_t \Phi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_{A_i} * \Delta \Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta u_i = \Delta u.$$

A következő lépés, hogy ellenőrizzük az $u(t,x) \to 0$ feltételt, ha $|x| \to \infty$. Legyen $|x| > 2R_i$, ekkor $d(x, A_j) \ge |x| - 2R_i$ minden $j \le i$-re. A φ monoton csökkenő r-ben, ezért

$$\begin{aligned} u(t,x) &\le \sum_{j=1}^{i} a_j \int_{y \in A_j} \varphi(t, |x| - 2R_i)\, dy + \sum_{j=i+1}^{\infty} a_j \int_{y \in A_j} \Phi(t, x-y)\, dy \le \\ &\le \left(\sum_{j=1}^{i} a_j \lambda(A_j) \right) \varphi(t, |x| - 2R_i) + a_i \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y)\, dy \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az első tag 0-hoz tart, ha $|x| \to \infty$, a második tag pedig a_i, ugyanis a Φ-re teljesül, hogy $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi = 1$. Mivel $a_i \to 0$, ebből adódik az állítás.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy az R_i megválasztható úgy, hogy minden pont meghökkentő legyen. Definiálni fogjuk az $s_1 < t_1 < s_2 < \dots < s_i < t_i < s_{i+1} < \dots$ pozitív valósakat, valamint egy $c > 0$ konstanst úgy, hogy tetszőleges $x \in B(0,i)$ esetén az alábbi tulajdonságok teljesüljenek:

(1) $\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} u_j(s_i, x) < \frac{ca_i}{2}$

(2) ha $i \ge j$, akkor $u_i(s_j, x) < \dfrac{ca_j}{2^{i-j+2}}$

(3) $u_i(t_i, x) \ge ca_i$

A sorozatokat rekurzívan adjuk meg. Tegyük fel, hogy $i-1$-ig már definiáltuk a sorozatokat. A φ monoton csökkenő r-ben, ezért $u_j(t,x) \le a_j \lambda(A_j) \varphi(t, 0) \to 0$, ha $t \to \infty$. Mivel $j < i$-re az u_j-t már definiáltuk, az $s_i > t_{i-1}$-et elég nagynak választva az (1) feltétel teljesül.

A következő lépésben az R_i-t választjuk meg. Világos, hogy $\lambda(A_i) = c_0 R_i^n$ alakú alkalmas $c_0 > 0$ konstanssal. Ha $R_i \ge i$, akkor minden $x \in B(0,i)$ legalább $R_i - i$ távolságra van A_i-től. Ezt felhasználva adódik, hogy rögzített $t > 0$ mellett

$$u_i(t,x) \le a_i \lambda(A_i) \varphi(t, R_i - i) = \frac{a_i c_0}{(4\pi t)^{n/2}} \cdot R_i^n e^{-(R_i - i)^2/4t} \to 0,$$

ha $R_i \to \infty$. Emiatt az R_i-t elég nagynak választva a (2) feltétel kielégíthető. Továbbá azt is feltehetjük, hogy $R_i > 2R_{i-1}$, $R_i > i$ és $R_i^2 > s_i$.

Végül legyen $t_i = R_i^2$. Ha $x \in B(0,i) \subseteq B(0, R_i)$, akkor minden $y \in A_i$-re $|x - y| < 3R_i$. Ismét a φ monotonitását felhasználva

$$u_i(t_i, x) \ge a_i \lambda(A_i) \varphi(t_i, 3R_i) = \frac{a_i c_0 3^n R_i^n}{(4\pi t_i)^{n/2}} e^{-9R_i^2/4t_i} = \frac{c_0 3^n}{(4\pi)^{n/2}} e^{-9/4} \cdot a_i =: ca_i.$$

Ezzel megmutattuk, hogy a (3) feltétel is teljesül.

Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, és legyen $i > |x|$. Először felső becslést adunk $u(t_i, x)$-re. Az (1) és (2) tulajdonságot felhasználva adódik, hogy

$$u(s_i, x) = \sum_{j=1}^{i-1} u_j(s_i, x) + \sum_{j=i}^{\infty} u_j(s_i, x) < \frac{ca_i}{2} + \sum_{j=i}^{\infty} \frac{ca_i}{2^{j-i+2}} = ca_i.$$

Másrészt a (3) tulajdonság miatt $u(t_i, x) \ge u_i(t_i, x) \ge ca_i$. Ebből következik, hogy az s_i és t_i között valamikor nő az u. Mivel $u(s_{i+1}, x) < ca_{i+1} \le ca_i \le u(t_i, x)$, az is következik, hogy a t_i és s_{i+1} között az u valamikor csökken. Ezzel beláttuk, hogy az x meghökkentő. $\square$

7. Igaz-e, hogy ha $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ egy részcsoportja minden n pozitív egészre n-tranzitív, akkor minden csoportautomorfizmusa kiterjed $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ egy csoportautomorfizmusává?

(Bodor Bertalan)

1. Megoldás: A feladat föltételeit teljesítő részcsoportokat nevezzük $<\omega$-tranzitívnak.

Először is ismert, hogy $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ minden automorfizmusa belső, speciálisan ha $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{N})$, akkor α minden elem stabilizátorát átviszi egy másik elem stabilizátorába. A továbbiakban megkonstruáljuk $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ egy $<\omega$-tranzitív G csoportját, és G egy α automorfizmusát, amelyre egyik egyelemű halmaz stabilizátorának α szerinti képét sem tartalmazza egyik elem stabilizátora sem. Ekkor az előbbi észrevétel szerint α nem terjed ki $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ egy automorfizmusává.

A konstrukciónk alapja a *véletlen páros gráf* (lásd például Dugald Macpherson: A survey of homogeneous structures). Ez az izomorfia erejéig az egyetlen olyan megszámlálható $\mathfrak{G}$ gráf, amely csúcsainak létezik olyan (P, Q) partíciója, hogy $\mathfrak{G}$ összes éle P és Q között megy, és $\mathfrak{G}$ rendelkezik az alábbi *kiterjesztési tulajdonsággal*:

(1) tetszőleges $a_1, \ldots, a_k \in P$ és $I \subset \{1, \ldots, k\}$ esetén létezik olyan $b \in Q$, hogy a_i és b között pontosan akkor megy él, ha $i \in I$;

(2) tetszőleges $b_1, \ldots, b_k \in Q$ és $I \subset \{1, \ldots, k\}$ esetén létezik olyan $a \in P$, hogy b_i és a között pontosan akkor megy él, ha $i \in I$.

A $\mathfrak{G}$ gráfnak több konstrukciója is ismert. Az egyik például, hogy veszünk két diszjunkt megszámlálhatóan végtelen P és Q halmazt, és minden lehetséges $(a, b) \in P \times Q$ párra egymástól függetlenül pénzérmedobással eldöntjük, hogy behúzunk-e köztük élt vagy nem. Ekkor 1 valószínűséggel az előbbi $\mathfrak{G}$ gráffal izomorf gráfot kapunk.

Jelöljük $\mathfrak{A}$-val a $\mathfrak{G}$ gráfnak a P és Q egyváltozós relációkkal való bővítését. Ismert (lásd például az előbbi hivatkozást), hogy $\mathfrak{A}$ struktúra *homogén*, azaz tetszőleges véges $F \subset A := P \cup Q$ és $\alpha \colon F \to A$ esetén, ha α egy gráfbeágyazás, ami megőrzni a P és Q relációkat, akkor α kiterjed $\mathfrak{A}$ egy automorfizmusává.

Legyenek $G := \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})|_P$ és $H := \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})|_Q$. A fenti észrevételből azonnal következik, hogy G egy $<\omega$-tranzitív részcsoport. A véletlen páros gráf egyértelműségéből azonnal következik, hogy a G és H csoportok izomorfak mint permutáció csoportok, azaz létezik olyan $\iota \colon P \to Q$ leképezés, hogy $g \in G$ pontosan akkor, ha $\iota \circ g \circ \iota^{-1} \in H$.

Azt állítjuk, hogy minden $g \in G$-re pontosan egy olyan $h \in H$ létezik, amelyre $g \cup h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$. Az, hogy legalább egy létezik következik a G és H csoportok definíciójából. Tegyük fel most, hogy $g \cup h_1, g \cup h_2 \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$. Ekkor $\mathrm{id}(P) \cup (h_2^{-1} \circ h_1) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}))$. Amennyiben $(h_2^{-1} \circ h_1) \neq \mathrm{id}(Q)$, akkor létezik olyan $b \in Q$, hogy $b' := (h_1 h_2^{-1})(b) \neq b$. Ekkor a fentebb leírt kiterjesztési tulajdonság miatt azonban tudjuk, hogy létezik olyan $a \in P$, hogy a össze van kötve b-vel, de nincs összekövetve b'-vel. Ez azonban ellentmond annak, hogy $\mathrm{id}(P) \cup (h_2^{-1} \circ h_1)$ automorfizmusa az $\mathfrak{A}$ struktúrának. Ez az ellentmondás mutatja, hogy $h_2^{-1} \circ h_1 = \mathrm{id}(Q)$, azaz $h_2 = h_1$.

Jelöljük β-val azt a $G \to H$ leképezést, amely minden $g \in G$-hez hozzárendeli, az előbbi állítás szerint egyértelműen létező $h \in H$-t, amelyre $g \cup h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$. A definícióból világos, hogy β izomorfizmus. Rögzítsünk egy $a \in P$ elemet. Az $\mathfrak{A}$ struktúra homogenitásából azonnal következik, hogy $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ tranzitívan hat a $\{b \in Q \mid (a, b) \in E(\mathcal{B})\}$ és a $\{b \in Q \mid (a, b) \notin E(\mathcal{B})\}$ halmazokon. A kiterjesztési tulajdonságból azonnal következik az is, hogy az előbbi két halmaz végtelen. Ebből következik, hogy $\beta(G_a)$-nak két orbitja van, és mindkettő végtelen. Legyen most

$$\alpha \colon G \to G, g \mapsto (u \mapsto (\iota^{-1} \circ \beta(g) \circ \iota)(u)).$$

Ekkor α automorfizmusa G-nek, hiszen egy $G \to H$ és egy $H \to G$ izomorfizmus kompozíciója. Ugyanakkor az előbbiek szerint $\alpha(G_a)$-nak csak végtelen orbitjai vannak, speciálisan $\alpha(G_a)$-t nem tartalmazza egyetlen P-beli elem stabilizátora sem, így a P halmaz megfelelő átcímkézéssel G és α egy megfelelő ellenpélda. $\square$

2. Megoldás: Belátjuk, hogy az állítás nem igaz.

Jól ismert, és könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ egy topologikus csoporttá válik, ha $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (az $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvények) részhalmazának tekintjük, $\mathbb{N}$-et ellátjuk a diszkrét topológiával, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-et pedig a szorzattopológiával. Szintén jól ismert, hogy $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ minden csoportautomorfizmusa folytonos (sőt, belső). Világos, hogy egy részcsoport pontosan akkor n-tranzitív minden n-re, ha sűrű.

Konstruálunk egy H sűrű részcsoportot, aminek van nem folytonos csoportautomorfizmusa, ez nyilván nem terjed ki $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ csoportautomorfizmusává. Ehhez megmutatjuk, hogy vannak $g_0, g_1, \ldots \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ elemek, amelyek egyfelől sűrű halmazt alkotnak, másfelől szabad csoportot generálnak. Ez elegendő, hiszen egy sűrű halmaznak van nem folytonos bijekciója önmagával, másfelől egy szabad csoport generátorainak tetszőleges bijekciója önmagával kiterjed csoportautomorfizmussá.

A $g_0, g_1, \ldots$ sorozat konstrukcióját rekurzívan végezzük. A sűrűséget úgy érjük el, hogy a rekurzió kezdete előtt az $\mathbb{N}$ véges részei között menő bijekciókat felsoroljuk, és rögzítjük, hogy g_i kiterjeszti az i-ik véges bijekciót. Minden lépésben minden g_i-nek véges sok értéke lesz csak definiálva. Egyfelől ügyelünk, hogy a kialakuló függvények végig injektívek maradjanak, másfelől elérjük, hogy minden i-re és k-ra valamely lépés után már a $g_i(k)$ és $g_i^{-1}(k)$ értékek értelmezve legyenek: rögzíthetjük, hogy adott k-ra a k-adik lépésben ezek mindegyikét megadjuk. Ezek már biztosítják, hogy a rekurzió után minden g_i valóban $\mathbb{N}$ egy permutációja lesz.

Utolsó feladatunk biztosítani, hogy a $g_0, g_1, \ldots$ elemek szabad csoportot generáljanak. Ehhez azt kell elérni, hogy ha $W(x_0, \ldots, x_{m-1})$ egy egyszerűsíthetetlen szó a csoportelmélet nyelvén (pl. ${x_3}^4 {x_5}^{-9} {x_3}^2$), valamint $i_0, \ldots, i_{m-1} \in \mathbb{N}$ különbözőek, akkor $W(g_{i_0}, \ldots, g_{i_{m-1}}) \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Mivel megszámlálhatóan sok $(m, W(x_0, \ldots, x_{m-1}), i_0, \ldots, i_{m-1})$ konfiguráció létezik, ezeket felsoroljuk, és a k-ik lépésben a k-ik ilyen konfigurációval foglalkozunk. A k-ik lépésben tehát el kell érnünk, hogy egy konkrét $W(g_{i_0}, \ldots, g_{i_{m-1}}) \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ fennálljon. Válasszunk egy $N \in \mathbb{N}$ számot, ami nagyobb minden már definiált $g_{i_j}(n)$ és $g_{i_j}^{-1}(n)$ $(j = 0, \ldots m-1)$ értéknél. Ezen az N számon a $W(g_{i_0}, \ldots, g_{i_{m-1}})$ kompozíció értékét „lényegében tetszőlegesen” definiálhatjuk, azért ügyelve, hogy a kiértékelés során minden érték N felett legyen, valamint, hogy az injektivitásokat megőrizzük. Például úgy választjuk az értékeket, hogy a kiértékelés során szigorúan növekedjenek. Ezzel $W(g_{i_0}, \ldots, g_{i_{m-1}})(N) \neq N$, amivel a bizonyítást befejeztük. □

8. Igazoljuk, hogy bármely véges, páros síkgráf csúcsaihoz hozzárendelhető egy-egy körvonal úgy, hogy ezek egy síkban legyenek, bármely két szomszédos csúcshoz rendelt körvonalak érintsék egymást, míg bármely két különböző, nem szomszédos csúcshoz rendelt körvonalak két pontban messék egymást.

(Damásdi Gábor)

Megoldás: A Koebe–Andrejev–Thurston körpakolási tétel szerint bármely véges síkgráfnak a csúcsaihoz hozzárendelhető egy-egy körlemez úgy, hogy ezek egy síkban vannak, bármely két szomszédos csúcshoz rendelt körlemezeknek egyetlen közös pontja van, míg bármely két különböző, nem szomszédos csúcshoz rendelt körlemezek diszjunktak. Vegyük a feladatbeli $G = (S, T; E)$ gráf egy ilyen reprezentációját, és jelöljük a v csúcshoz tartozó körlap középpontját kissé pongyolán egyszerűen v-vel, a sugarát pedig r_v-vel. Ekkor bármely két különböző u és v középpont távolságára $d(u, v) \geq r_u + r_v$ teljesül. Itt pontosan akkor áll egyenlőség, ha $uv \in E$.

Jelöljön $R \geq 0$ olyan (később alkalmasan választandó) számot, amely nagyobb mindegyik r_s sugárnál $(s \in S)$. Minden $s \in S$ esetén tekintsük az s középpontú, $\varrho_s = R - r_s$ sugarú C_s körvonalat, és minden $t \in T$ esetén tekintsük a t középpontú, $\varrho_t = R + r_t$ sugarú C_t körvonalat.

Bármely két különböző u és v csúcsra

$$|\varrho_u - \varrho_v| = |(R \pm r_u) - (R \pm r_v)| = | \pm r_u \mp r_v| \leq r_u + r_v \leq d(u, v).$$

Az utolsó egyenlőtlenségben pontosan akkor áll egyenlőség, ha $uv \in E$. Ebben az esetben a megelőző egyenlőtlenség is egyenlőséggel teljesül, hiszen u és v a páros gráf két különböző osztályához tartozik. Ekkor tehát a C_u és C_v körvonalak közül az egyik (mégpedig az S-beli középpontú) belülről érinti a másikat.

Ha $uv \notin E$, akkor $|\varrho_u - \varrho_v| < d(u,v)$. Ha R-et olyan nagynak választjuk, hogy a $\varrho_u + \varrho_v > d(u,v)$ háromszög-egyenlőtlenség teljesüljön bármely két u és v csúcs esetén, akkor bármely két különböző, nem szomszédos csúcs esetén a ϱ_u, ϱ_v és $d(u,v)$ szakaszokból háromszög szerkeszthető, azaz a C_u és C_v körök két pontban metszik egymást. (Ehhez elegendő, ha R legalább akkora, mint a nem-szomszédos középpontok távolságainak maximuma). $\square$

Megjegyzés: A fenti bizonyításban minden érintés belső, mindig a páros gráf egyik osztályába eső csúcshoz tartozó kör érinti belülről a másik osztályba eső csúcshoz tartozó kört. Valójában az is elérhető, hogy bármely két szomszédos csúcshoz rendelt körvonalak kívülről érintsék egymást, de annak bonyolultabb a bizonyítása. Pontosan azoknak a gráfoknak létezik ilyen reprezentációja, amelyek vagy páros síkgráfok, vagy olyan, nem páros gráfok, amelyek lerajzolhatók a projektív síkba úgy, hogy minden tartományt páros sok él határol.

9. Legyen $q > 1$ egy 2-hatvány. Legyen $f\colon \mathbb{F}_{q^2} \to \mathbb{F}_{q^2}$ affin leképezés $\mathbb{F}_2$ felett. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^{q+1}$ egyenletnek legfeljebb $2q-1$ megoldása van.

(Nagy Gábor Péter)

Megoldás: Ha az x és y megoldásokra $x - y = a \in \mathbb{F}_q$, akkor

$$f(x) - f(y) = x^{q+1} - y^{q+1} = x^q(x-y) + (x^q - y^q)y = x^q a + a^q y = a(x^q + y).$$

Ha tehát az x, y, z, w megoldásokra $x - y = z - w = a \in \mathbb{F}_q$, akkor (mivel f affin leképezés $\mathbb{F}_2$ felett)

$$0 = f(x) - f(y) - f(z) + f(w) = a(x^q + y - z^q - w) = a((x-z)^q + x - z),$$

tehát $a = 0$ vagy $x - z \in \mathbb{F}_q$ (mert a karakterisztika 2).

Ha tehát a megoldások halmazán tekintett $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{F}_q$ ekvivalenciareláció osztályai $H_1, \dots, H_k$, akkor a $H_i - H_i \subseteq \mathbb{F}_q$ különbséghalmazok közül bármely kettőnek a metszete $\{0\}$. Így a megoldások száma

$$\sum_{i=1}^{k}|H_i| \le \sum_{i=1}^{k}|H_i - H_i| = \sum_{i=1}^{k}(|(H_i - H_i)\setminus\{0\}| + 1) = k + \sum_{i=1}^{k}|(H_i - H_i)\setminus\{0\}| \le q + (q-1) = 2q - 1. \quad \square$$

10. Legyen $A > 0$ és $B = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)A$. Mutassuk meg, hogy az $a_k = \lfloor k/\sqrt{2} \rfloor$ $(k \in (A,B) \cap \mathbb{Z})$ véges sorozatban a páros és a páratlan tagok száma legfeljebb 2-vel tér el.

(Kós Géza)

Megoldás: Az A, B számokat egy kicsit növelhetjük vagy csökkenthetjük úgy, hogy A és B ne legyen egész.

Bármely p irracionális szám és $C > 0$ esetén legyen

$$S(C,p) = \sum_{0<k\le C} (-1)^{\lfloor kp \rfloor}.$$

Azt fogjuk igazolni, hogy

$$S\left(B, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - S\left(A, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \{0, 1, 2\}.$$

10.1. Lemma: *Ha $p, q > 1$ irracionális számok és $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, akkor a*

$$\left(\lfloor kp \rfloor : k = 1, 2, \dots\right) \quad \text{és} \quad \left(\lfloor \ell q \rfloor : \ell = 1, 2, \dots\right)$$

Beatty-sorozatok együttesen minden pozitív egész számot pontosan egyszer tartalmaznak. (Közismert.)

Bizonyítás: Bármely K egész szám előfordulásainak száma a két sorozatban

$$\left\lfloor \tfrac{K+1}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \tfrac{K}{p} \right\rfloor, \quad \text{illetve} \quad \left\lfloor \tfrac{K+1}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \tfrac{K}{q} \right\rfloor.$$

Ezek összege $K - (K-1) = 1$. $\square$

10.2. Lemma: *Ha $p, q > 0$ irracionális számok, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, és $C > 0$, akkor*

$$S\Big(\tfrac{C}{p}, p\Big) + S\Big(\tfrac{C}{q}, q\Big) \in \{0, -1\}.$$

Bizonyítás: Vizsgáljuk meg, hogy egy adott n egészt hányszor kapunk meg $\lfloor kp \rfloor$, illetve $\lfloor \ell q \rfloor$ alakban, ha $k \leq \frac{C}{p}$, illetve $\ell \leq \frac{C}{q}$. Világos, hogy csak $n \leq C$ lehet.

Ha $n + 1 \leq C$, akkor az n előfordulásainak száma a már látott $\left\lfloor \frac{n+1}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$, illetve $\left\lfloor \frac{n+1}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$. A kettő összege 1.

Ha $n \leq C < n+1$, vagyis $n = \lfloor C \rfloor$, akkor az n előfordulásainak száma $\left\lfloor \frac{C}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$, illetve $\left\lfloor \frac{C}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$. Az $\left\lfloor \frac{C}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{q} \right\rfloor$ értéke $\lfloor C \rfloor$ vagy $\lfloor C \rfloor - 1$, és $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor = n - 1 = \lfloor C \rfloor - 1$, tehát az előfordulásszámok összege 0 vagy 1. Összességében

$$S\Big(\tfrac{C}{p}, p\Big) + S\Big(\tfrac{C}{q}, q\Big) = \left(\sum_{n=1}^{\lfloor C \rfloor} (-1)^n \text{ vagy } \sum_{n=1}^{\lfloor C \rfloor - 1} (-1)^n \right) \in \{0, -1\}. \qquad \square$$

10.3. Lemma: *Bármely a egész esetén*

$$S(C, 2a + p) = S(C, p) \quad \textit{és} \quad S(C, 2a - p) = -S(C, p).$$

Bizonyítás: Az első triviális. A második következik abból, hogy $\lfloor kp \rfloor + \lfloor k(2a - p) \rfloor = 2ak - 1$. $\square$

A feladat megoldása: A 2. lemmát kétszer fogjuk alkalmazni: előbb a $p_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $q_1 = 3 + \sqrt{2}$ párra, majd a $p_2 = 3 - \sqrt{2}$, $q_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ párra; ezekre valóban

$$\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = \frac{1}{2 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{3 \pm \sqrt{2}} = 1.$$

$$\begin{aligned}
&\text{3. lemma:} \quad && S\Big(B, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big) + S\Big(B, p_1\Big) = 0 && (1)\\
&\text{2. lemma:} && S\Big(B, p_1\Big) + S\Big(\tfrac{p_1}{q_1} B, q_1\Big) = \varepsilon_1 \in \{0, -1\} && (2)\\
&\text{3. lemma:} && S\Big(\tfrac{p_1}{q_1} B, q_1\Big) + S\Big(\tfrac{p_1}{q_1} B, p_2\Big) = 0 && (3)\\
&\text{2. lemma:} && S\Big(\tfrac{p_1}{q_1} B, p_2\Big) + S\Big(\tfrac{p_1 p_2}{q_1 q_2} B, q_2\Big) = \varepsilon_2 \in \{0, -1\} && (4)\\
&\text{3. lemma:} && S\Big(\tfrac{p_1 p_2}{q_1 q_2} B, q_2\Big) = S\Big(\tfrac{p_1 p_2}{q_1 q_2} B, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big) = S\Big(A, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big); && (5)
\end{aligned}$$

az utolsó lépésben

$$\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} = \frac{(3 - \sqrt{2})(2 - \frac{1}{\sqrt{2}})}{(3 + \sqrt{2})(2 + \frac{1}{\sqrt{2}})} = 3 - 2\sqrt{2} = \frac{A}{B}.$$

Az (1) és (3) összegéből kivonva (2)-t és (4)-et, majd behelyettesítve (5)-öt, azt kapjuk, hogy

$$S\Big(B, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big) - S\Big(A, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big) = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \in \{0, 1, 2\}. \qquad \square$$

11. Egy urnában kezdetben egy piros és egy kék golyó van. Minden lépésben választunk egy véletlen golyót az urnából az egyenletes eloszlás szerint. Ha piros, akkor egy újabb piros és egy újabb kék golyót teszünk az urnába. Amikor pedig a k-adik alkalommal választunk kék golyót, akkor egy kék és $2k + 1$ piros golyót helyezünk az urnába. (A választott golyókat nem vesszük ki, továbbra is az urnában maradnak.)
Jelölje G_n az urnában lévő golyók számát n lépés után. Igazoljuk, hogy alkalmas $0 < c, \alpha < \infty$ konstansok esetén 1 valószínűséggel teljesül, hogy $\frac{G_n}{n^\alpha} \to c$.

(Abért Miklós, Maga Balázs)

Megoldás: Jelölje S_n az első n lépés során húzott kék golyók számát. Mivel a maradék $n - S_n$ lépésben piros golyót húztunk, ezért n lépés után az urnában lévő piros golyók száma:

$$G_n^{\mathrm{p}} = 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{S_n}(2k+1)}_{=S_n^2} + (n - S_n) = S_n^2 - S_n + (n+1).$$

A kék golyók száma minden lépésben 1-gyel nő, így n lépés után $G_n^{\mathrm{k}} = n + 1$, vagyis az összes golyó száma:

$$G_n = G_n^{\mathrm{p}} + G_n^{\mathrm{k}} = S_n^2 - S_n + 2(n+1).$$

Úgy is gondolhatunk a folyamatra, hogy van egy véletlen 0-1 sorozatunk $X_1, X_2, \ldots$, ahol $X_n = 1$, ha az n-edik lépésben kék golyót húzunk. Ekkor S_n éppen az $X_1 + \ldots + X_n$ részletösszeg. Ha az első n tag már adott, akkor X_{n+1}-et

$$p_{n+1} \coloneqq \frac{G_n^{\mathrm{k}}}{G_n} = \frac{n+1}{S_n^2 - S_n + 2(n+1)}$$

valószínűséggel választjuk 1-nek, hiszen ez a kék golyók aktuális aránya az urnában.

Azt állítjuk, hogy 1 valószínűséggel

$$\frac{S_n}{n^{2/3}} \to s, \text{ ahol } s \coloneqq (3/2)^{1/3}.$$

Ebből a fentiek alapján következne, hogy

$$\frac{G_n}{n^{4/3}} \to s^2 = (3/2)^{2/3}.$$

Alsó korlátot bizonyítunk, azaz megmutatjuk, hogy 1 valószínűséggel $\liminf_{n\to\infty} S_n/n^{2/3} \geq s$. (A felső korlát ugyanazon módszerekkel hasonlóan megcsinálható.) Rögzítsünk $0 < c < s$ valós számot. Tekintsük a következő A eseményt $c_0 < c$ valós számra és $N_0 < N_1$ pozitív egészekre:

$$A = A_{c_0,c,N_0,N_1}: \quad S_{N_0} \geq c_0 N_0^{2/3}, \text{ illetve } S_n \leq c n^{2/3} \ \forall n \in [N_0, N_1).$$

A célunk, hogy felső becslést adjunk ennek az eseménynek a $\mathbb{P}(A)$ valószínűségére.

Vegyük észre, hogy

$$M_n \coloneqq S_n - \mathbb{E}\big(S_n \,|\, X_1, \ldots, X_{n-1}\big)$$

egy martingál, melyre

$$M_{n+1} = M_n + \big(X_{n+1} - p_{n+1}\big),$$

hiszen p_{n+1} kifejezhető S_n (és így $X_1, \ldots, X_n$) függvényeként illetve

$$\mathbb{E}\big(X_{n+1} \,|\, X_1, \ldots, X_n\big) = p_{n+1}.$$

Továbbá, $M_{n+1} - M_n = X_{n+1} - p_{n+1}$ mindig az 1 hosszú $[-p_{n+1}, 1 - p_{n+1}]$ intervallumba esik. Ennélfogva a martingálokra vonatkozó Azuma–Hoeffding egyenlőtlenség alkalmazható a $\sum_{n=N_0+1}^{N_1}(X_n - p_n)$ összegre. Ezt valójában egy M_n^* megállított martingálra fogjuk alkalmazni, amit M_n-ből a következő megállási idő alkalmazásával kapunk: álljunk meg n lépés után, ha $n \geq N_0$ valamint $S_n > cn^{2/3}$. Ekkor az Azuma–Hoeffding egyenlőtlenség szerint tetszőleges $t > 0$ esetén:

$$\exp\left(\frac{-2t^2}{N_1 - N_0}\right) \geq \mathbb{P}\big(M_{N_1}^* - M_{N_0}^* < -t\big) \geq \mathbb{P}\big(A \text{ fennáll és } M_{N_1} - M_{N_0} < -t\big), \qquad (*)$$

ugyanis A fennállása mellett a megállási idő legalább N_1, és így $M_n^* = M_n$ minden $n \leq N_1$ esetén. Az a célunk, hogy olyan t értéket válasszunk, amelynél az A esemény mellett $M_{N_1} - M_{N_0} < -t$ már automatikusan teljesül, mert ekkor a fenti kifejezés felső becslést nyújt $\mathbb{P}(A)$-ra.

Mivel $c < s$, ezért $c^3 < 3/2$, azaz $\frac{3/2}{c^2} > c$, és így $\varepsilon > 0$ választható úgy, hogy

$$\frac{3/2}{c^2+\varepsilon} > c. \quad \text{Legyen továbbá } \delta := \frac{3/2}{c^2+\varepsilon} - c > 0.$$

Először vegyük észre, hogy A mellett minden $n \in [N_0, N_1)$ esetén

$$p_{n+1} \geq \frac{n+1}{c^2 n^{4/3} - c n^{2/3} + 2(n+1)} > \frac{n^{-1/3}}{c^2+\varepsilon} = \frac{2}{3}(c+\delta)n^{-1/3},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség elég nagy N_0 esetén teljesül. Ebben az esetben

$$\sum_{n=N_0}^{N_1-1} p_{n+1} \geq \sum_{n=N_0}^{N_1-1} \frac{2}{3}(c+\delta)n^{-1/3} > (c+\delta)\int_{N_0}^{N_1} \frac{2}{3}x^{-1/3}\,dx = (c+\delta)\big(N_1^{2/3} - N_0^{2/3}\big).$$

Ekkor A mellett

$$M_{N_1} - M_{N_0} = \underbrace{S_{N_1}}_{\leq c N_1^{2/3}} - \underbrace{S_{N_0}}_{\geq c_0 N_0^{2/3}} - \sum_{n=N_0}^{N_1-1} p_{n+1} \leq -\Big(\underbrace{\delta\big(N_1^{2/3} - N_0^{2/3}\big) - (c-c_0)N_0^{2/3}}_{t:=}\Big).$$

Ha az így definiált t pozitív, akkor A mellett $M_{N_1} - M_{N_0} < -t$ már automatikusan teljesül és $(*)$ becslést ad $\mathbb{P}(A)$ valószínűségre.

Ebből egyrészt $N_1 \to \infty$ mellett azonnal következik, hogy 0 a valószínűsége annak, hogy $S_n \leq c n^{2/3}$ fennáll minden elég nagy n-re. Vagyis 1 valószínűséggel végtelen sok n-re $S_n > c n^{2/3}$.

Másrészt $c_0 = c$ mellett $t = \delta\big(N_1^{2/3} - N_0^{2/3}\big)$ pozitív, és a következő felső becslést kapjuk $A = A_{c,c,N_0,N_1}$ valószínűségére: minden rögzített $c < s$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy elég nagy N_0-ra és tetszőleges $N_1 > N_0$ esetén

$$\mathbb{P}\big(A_{c,c,N_0,N_1}\big) \leq \exp\left(\frac{-2\delta^2\big(N_1^{2/3} - N_0^{2/3}\big)^2}{N_1 - N_0}\right).$$

Ebből $N_1 = \gamma N_0$ választással ($\gamma > 1$ konstans) kapjuk, hogy minden elég nagy N_0 esetén

$$\mathbb{P}\big(A_{c,c,N_0,\gamma N_0}\big) \leq \exp\left(\frac{-2\delta^2\big(\gamma^{2/3}-1\big)^2}{\gamma - 1} N_0^{1/3}\right) = \exp\left(-\delta' N_0^{1/3}\right)$$

egy pozitív δ' konstanssal. Ezeknek a valószínűségeknek az összege véges, ezért a Borel—Cantelli-lemma szerint 1 valószínűséggel csak véges sok N_0-ra fordulhat elő az $A_{c,c,N_0,\gamma N_0}$ esemény.

Most tegyük fel indirekt, hogy $\liminf_{n\to\infty} S_n/n^{2/3} < c' < c$. Mivel a korábbiak szerint végtelen sok n-re $S_n > c n^{2/3}$, ezért ekkor találnánk végtelen sok diszjunkt $[N_0, N_1)$ intervallumot úgy, hogy A_{c,c,N_0,N_1} fennáll és $S_{N_1} < c' N_1^{2/3}$. Ekkor

$$c N_0^{2/3} \approx S_{N_0} \leq S_{N_1} < c' N_1^{2/3},$$

amiből

$$\frac{N_1}{N_0} > \big(c/c'\big)^{3/2} =: \gamma > 1.$$

Következésképp $N_1 > \gamma N_0$, és így az $A_{c,c,N_0,\gamma N_0} \subset A_{c,c,N_0,N_1}$ esemény is fennáll, ami azonban nem történhet meg végtelen sok N_0-ra, ellentmondás. Tehát szükségképpen 1 valószínűséggel $\liminf_{n\to\infty} S_n/n^{2/3} \geq c$, és ez minden rögzített $c < s$ esetén igaz, végeztünk. □