2020. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny

A feladatok megoldása

1. feladat. Az $x, y\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sorozatokat *teljesen különbözőnek* nevezzük, ha $x(n) \neq y(n)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Legyen F olyan függvény, amely minden természetes számokból álló sorozathoz egy természetes számot rendel úgy, hogy teljesen különböző x, y sorozatok esetén $F(x) \neq F(y)$, valamint a konstans sorozatok esetén $F((k, k, \dots)) = k$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $F(x) = x(n)$ minden x sorozatra.

(Csernák Tamás)

Megoldás.

Lemma. Legyen $S \subseteq \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Ha $x(n) \in S$ minden n-re, akkor $F(x) \in S$.

Bizonyítás. Minden $k \notin S$-re x és $y = (k, k, \dots)$ teljesen különbözőek, így $F(x) \neq F(y) = k$. Ezzel a lemmát bizonyítottuk.

Jelölje e az identitás függvényt: $e(n) = n$. Legyen $F(e) = n_0$. A természetes számok szerepe ebben a problémában szimmetrikus, így feltehető, hogy $F(e) = n_0 = 1$. Megmutatjuk, hogy ekkor tetszőleges z függvényre $F(z) = z(1)$.

- Ha $x(1) = a$ és $x(n) = 1$ $\forall n \geq 2$, akkor $F(x) = a$. Ez $a = 1$ esetén fel van téve, egyébként a lemma szerint $F(x) \in \{1, a\}$, de $F(x) \neq F(e) = 1$, így szükségképpen $F(x) = a$.
- Ha $y(n) \neq 1$ $\forall n \geq 2$, akkor $F(y) = y(1)$, mert egy ilyen y teljesen különbözik az előző pontban tekintett x függvényektől feltéve, hogy $a \neq y(1)$.
- Végül Tetszőleges z esetén az

  $$y(1) := b \neq z(1); \qquad y(n) := z(n) + 1 \quad (n \geq 2)$$

  függgvény rendelkezik az előző pontbeli tulajdonsággal. Továbbá z és y teljesen különbözőek, így $F(z) \neq F(y) = b$. Viszont b bármi lehet $z(1)$-en kívül, így $F(z)$ csakis $z(1)$ lehet.

2. feladat. Igazoljuk, hogy ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos periodikus függvény, és $\alpha \in \mathbb{R}$ irracionális, akkor az $\{n\alpha + f(n\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat modulo 1 sűrű $[0, 1]$-ben.

(Totik Vilmos)

1. megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített, megmutatjuk, hogy a kérdéses sorozat minden ε hosszú $[0, 1]$-beli intervallumban tartalmaz pontot.

Legyen β az f (egy) periódusa, és egy $n \geq 0$ egészre tekintsük a $p_n = (\{n\alpha\}, \{n\alpha/\beta\})$ pontot, ahol $\{\cdot\}$ a törtrészt jelöli. A p_n pontokra tekintsünk úgy, mint az $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ topologikus csoport elemeire. Mivel f folytonos és periodikus, ezért egyeletesen folytonos, rögzítsünk olyan $\delta > 0$ számot, amire

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2. \tag{1}$$

A $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ szokásos metrikáját d-vel jelöljük. Mivel $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ kompakt, ezért van olyan $a < b$, amire $d(p_a, p_b) < \min\{\delta/\beta, \varepsilon/2\}$. Mivel $d(p_a, p_b) = d(p_{a+n}, p_{b+n})$, így

$$d(p_{nk}, p_{(n+1)k}) < \min\{\delta/\beta, \varepsilon/2\}$$

minden n-re, ahol $k = b - a$. Ezt egyrészt $n = 0$-ra alkalmazva kijön, hogy van olyan m egész, amire

$$|k\alpha - m| < \varepsilon/2,$$

másrészt (1) miatt

$$|f((n+1)k\alpha) - f(nk\alpha)| < \varepsilon/2.$$

Most nézzük az $r_n = nk\alpha - nm + f(nk\alpha)$ valós számsorozatot ($n = 1, 2, \ldots$). Egyrészt

$$|r_{n+1} - r_n| \leq |k\alpha - m| + |f((n+1)k\alpha) - f(nk\alpha)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Másrészt $|r_n| \to \infty$, hiszen f korlátos, és $k\alpha - m \neq 0$ az α irracionalitása miatt. Tehát az r_n számok törtrészei valóban minden ε hosszú intervallumból tartalmaznak pontot, és mivel $\{r_n\} = \{nk\alpha + f(nk\alpha)\}$, így bizonyítottuk ugyanezt a feladatban szereplő sorozatra is.

2. megoldás (kitűző). Legyen β az f (egy) periódusa, és tekintsük a $g(x) = f(\beta x)$ függvényt. Ez 1-periodikus, és $n\alpha + f(n\alpha) = n\alpha + g(n\alpha/\beta)$. Az 1-periodikusság miatt így az is igaz, hogy

$$\{n\alpha + f(n\alpha)\} = \{n\alpha\} + g(\{n\alpha/\beta\}) \qquad \mathrm{mod} 1$$

(itt $\{\cdot\}$ a törtrészt jelöli).

I. eset: $1, \alpha, \alpha/\beta$ racionálisan függetlenek. Ekkor az $(\{n\alpha\}, \{n\alpha/\beta\})$, $n = 1, 2, \ldots$, vektorsorozat sűrű $[0,1]^2$-ben, így minden $x \in (0,1)$-hez van olyan részsorozata a természetes számoknak amely mentén ez a vektor az $(x, 1/2)$-hez konvergál. Ezen részsorozat mentén $n\alpha + f(n\alpha)$ mod 1 az $x + g(1/2)$ számhoz tart, és mivel itt $x \in (0,1)$ tetszőleges, az állítás adódik.

II. eset: $1, \alpha, \alpha/\beta$ nem racionálisan függetlenek. Ekkor valamilyen nem csupa 0 egész p, q, r számokkal

$$p + q\alpha + r\frac{\alpha}{\beta} = 0,$$

és itt α irracionalitása miatt $r \neq 0$. Feltehető, hogy $r \geq 1$, és tekintsük az $n = rm$, $m = 1, 2, \ldots$, alakú egészeket. Ilyenekre (használva hogy g 1-periodikus)

$$n\alpha + f(n\alpha) = mr\alpha + g(mr\alpha/\beta) = mr\alpha + g(-qm\alpha).$$

Bármely $x \in (0,1)$-hez van olyan részsorozata az m-eknek, amely mentén $\{m\alpha\} \to x$, és ekkor nagy $n = mr$-re $n\alpha + f(n\alpha)$ mod 1 közel van az $rx + g(-qx)$ számhoz. Márpedig a $h(x) = rx + g(-qx)$, $x \in [0,1]$, folytonos függvény mod 1 vett értékkészlete tartalmazza a $(0,1)$ intervallumot, mivel $h(1) = r + g(0) \geq 1 + g(0) = 1 + h(0)$, és ebből az állítás azonnal adódik.

Megjegyzés. Az adott sorozat nem szükségképpen lesz egyenletes eloszlású modulo 1.

3. feladat. Egy egész számokból álló $n \times n$-es A mátrixot *reprezentatívnak* nevezünk, ha minden egész számokból álló $\mathbf{v}$ vektorra található vektoroknak egy véges $0 = \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell = \mathbf{v}$ sorozata úgy, hogy minden $0 \leq i < \ell$ esetén fennáll, hogy $\mathbf{v}_{i+1} = A\mathbf{v}_i$, vagy $\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i$ a standard bázis egyik eleme (azaz egyetlen nemnulla koordinátája van, és az 1). Mutassuk meg, hogy A pontosan akkor nem reprezentatív, ha $A^\top$-nak van egy nemnegatív sajátértékhez tartozó, nemnegatív valós számokból álló sajátvektora.

(Carl Schildkraut)

Megoldás. Legyen A egy tetszőleges egész számokból álló $n \times n$-es mátrix. Vezessük be a következő jelöléseket.

- Legyenek $e_1, \ldots, e_n$ a standard bázis elemei. Jelölje $S \subseteq \mathbb{Z}^n$ az $A^k e_j$; $k \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$ vektorok nemnegatív egész együtthatós lineáris kombinációinak halmazát. Könnyen meggondolható, hogy S éppen a feladatban leírt módon elérhető vektorok halmaza. Világos, hogy S zárt az összeadásra, valamint $AS \subseteq S$ és $\mathbb{N}^n \subseteq S$.
- Jelölje továbbá C a $\{tv : t \in [0, \infty); v \in S\}$ halmaz lezártját. Mivel S zárt az összeadásra, ezért C egy konvex kúp. Továbbá $AC \subseteq C$.
- Tekintsük most a C duális kúpját:

$$C^* = \big\{ w \in \mathbb{R}^n : w^\top v \geq 0 \ \forall v \in C \big\}.$$

  Belátjuk, hogy $A^\top C^* \subseteq C^*$. Tegyük fel, hogy $w \in C^*$, azaz $w^\top v \geq 0 \, \forall v \in C$. Ha $u \in C$, akkor $v = Au \in AC \subseteq C$, és a fentiek szerint ekkor $(A^\top w)^\top u = (w^\top A)u = w^\top (Au) \geq 0$, amiből $A^\top w \in C^*$.

A fenti jelölések mellett a következő állítások ekvivalensek.

(i) A nem reprezentatív, azaz $S \neq \mathbb{Z}^n$.

(ii) $C \neq \mathbb{R}^n$.

(iii) $C^* \neq \{0\}$.

(iv) $\exists w \in C^* \setminus \{0\}$ és $\exists \lambda \geq 0$ úgy, hogy $A^\top w = \lambda w$.

(v) Létezik nemnegatív valós számokból álló $w \neq 0$ vektor és $\lambda \geq 0$, melyre $A^\top w = \lambda w$.

(i) ⇔ (ii) Egyszerűen meggondolható abból, hogy S zárt az összeadásra valamint $\mathbb{N}^n \subseteq S$.

(ii) ⇔ (iii) Mivel C kúp, ezért $C \neq \mathbb{R}^n$ pontosan akkor, ha 0 határpontja C-nek. Mivel C konvex, ez ekvivalens azzal, hogy C-nek van támaszhipersíkja 0-ban, avagy $C^* \neq \{0\}$.

(iii) ⇒ (iv) Tegyük fel, hogy $C^* \setminus \{0\}$ nemüres. Azt is feltehetjük, hogy nincs $w \in C^* \setminus \{0\}$, melyre $A^\top w = 0$, különben végeztünk. Mivel $A^\top C^* \subseteq C^*$, ezért $A^\top$ ekkor ad egy $C^* \setminus \{0\}$-ból önmagába menő leképezést.

Jelölje D a C^* egységgömbbel való metszetét és tekintsük a következő $D \to D$ függvényt:

$$f(w) = \frac{A^\top w}{\|A^\top w\|} \quad (w \in D),$$

ami a nemüres kompakt D halmazt folytonosan képzi önmagába. Vegyük észre továbbá, hogy D kontrahálható, mert C^* konvex és $C^* \subseteq [0, \infty) \times \cdots \times [0, \infty)$, hiszen $e_1, \ldots, e_n \in S \subseteq C$. Így alkalmazható a Brouwer-féle fixponttétel f-re, ami éppen a kívánt w sajátvektort adja.

(iv) ⇒ (iii) Triviális.

(iv) ⇒ (v) Egy $w \in C^*$ automatikusan nemnegatív számokból áll, mert $e_1, \ldots, e_n \in S \subseteq C$ és így $w^\top e_j \geq 0 \ \forall j = 1, \ldots, n$.

(v) ⇒ (iv) Egy w nemnegatív számokból álló sajátvektorra $w^\top A^k e_j = \lambda^k (w^\top e_j) \geq 0$, amiből már következik, hogy $w \in C^*$.

4. feladat. Adott n szakasz a síkban, mindegyik függőleges vagy vízszintes. (A szakaszok metszhetik egymást.) Továbbá adott m darab origóból induló görbe, melyek a végpontjuktól eltekintve páronként diszjunktak, és mindegyik pontosan két szakaszt metsz, különböző görbék különböző szakaszpárokat. Bizonyítsuk be, hogy $m = O(n)$.

(Eyal Ackerman, Keszegh Balázs, Pálvölgyi Dömötör)

1. megoldás (Schweitzer Ádám megoldása alapján). Ha az origó valamelyik szakaszra esik, akkor a feladat triviális; a továbbiakban feltesszük, hogy nem ez a helyzet. Apró perturbációval elérhető, hogy semely két párhuzamos szakasz ne essen egy egyenesre, egyik szakasz végpontja se essen egy másik szakasz belsejébe, de minden görbe továbbra is ugyanazt a szakaszpárt messe.

Azokból a görbékből, amelyek két vízszintes vagy két függőleges szakaszt metszenek, lineárisan sok van, hiszen mindkettő egy síkgráfot határoz meg. Most tekintsük azokat a görbéket, amik egy vízszintes és egy függőleges szakaszt metszenek.

Vegyünk az origó körül egy apró Jordán-görbét, amit minden görbe egyszer metsz. Jelöljük azt a tartományt, amit úgy kapunk, hogy a síkból kivágjuk a Jordán-görbe belsejét, D-vel. Feleltessük meg D-t egy gömb északi féltekéjének, és rajzoljuk fel rá a görbéket és a vízszintes szakaszokat. A gömb déli féltekéjére pedig rajzoljuk fel a görbéket (ismét) és a függöleges szakaszokat. Így újfent síkgráfot kaptunk, tehát készen vagyunk.

Megjegyzés. Sehol nem használtuk, hogy függőleges és vízszintes szakaszaink voltak, csak annyit, hogy két, diszjunkt alakzatokat tartalmazó család. Azt viszont erősen használtuk, hogy minden görbe egyik vége az origó. A következő megoldás csak azt használja, hogy minden görbe átmegy az origón, és további megfontolásokkal ez is általánosítható szakaszokról más családpárokra.

2. megoldás (kitűzők). Ha az origó valamelyik szakaszra esik, akkor a feladat triviális; a továbbiakban feltesszük, hogy nem ez a helyzet. Apró perturbációval elérhető, hogy semely két párhuzamos szakasz ne essen egy egyenesre, egyik szakasz végpontja se essen egy másik szakasz belsejébe, de minden görbe továbbra is ugyanazt a szakaszpárt messe.

1. lemma. Ha diszjunktak a szakaszok, akkor igaz az állítás.

Bizonyítás. Ekkor a szakaszokat pontra húzva síkgráfot kapunk.

Most tekintsük azt a G gráfot, melynek csúcsai a szakaszok végpontjai és metszéspontjai.

2. lemma. Az origót tartalmazó tartomány határán G-nek legfeljebb lineárisan sok éle van.

Megjegyzés. $4n - 4$ az éles, az alábbi bizonyításból kihozható. Ha tetszőleges irányú szakaszokat megengedünk, akkor szuperlineáris is lehetne.

Bizonyítás. A bizonyítás egyszerű számolás, sokféleképpen megoldható. Vegyük észre, hogy elég G összefüggő komponenseire külön-külön bizonyítani az állítást. Ha $n = 1$, akkor az állítás igaz. Egyébként legyen x a határra eső metszéspontok száma, y pedig a határra eső szakaszvégpontok száma, tehát $y \leq 2n$. Számolva, hogy egy körbejárás alatt hányat fordulunk, $x = 2y \pm 4$, attól függően, hogy origó tartományát körbejártuk-e, vagy a belsejében sétáltunk. Az élek száma viszont mindkét esetben legfeljebb $8x$, mert G minden élének egyik vége egy metszéspont. Tehát az élek száma $\leq 8x \leq 16y + 4 \leq 32n + 4$.

Most visszatérünk a fő bizonyításhoz. Az 1. lemma miatt párhuzamos szakaszokat összekötő görbéből csak lineárisan sok van. Tehát elég azokat a görbéket megszámolni, amik az origóból indulva először vízszintes, majd függőleges szakaszt metszenek, mert ezzel csak egy kettes faktort vesztünk; a többi görbét töröljük. Töröljük ki G-ből az összes olyan vízszintes élet, ami nem origó tartományának határán van. A határon levő vízszintes élekből meg töröljük ki a rajtuk levő metszéspontok körül kis részeket. Így a kapott szakaszok diszjunktak, a 2. lemma miatt lineárisan sokan vannak, tehát az 1. lemma miatt készen vagyunk.

5. feladat. Igazoljuk, hogy egy K sehol sem sűrű síkbeli kompakt halmazra az alábbi két állítás ekvivalens.

(i) $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, ahol minden n-re K_n olyan kompakt halmaz, amelynek komplementere összefüggő.

(ii) Nincs K-ban olyan nemüres S zárt halmaz, amelyre teljesül, hogy S bármely pontjának bármely környezete tartalmazza $\mathbb{R}^2 \setminus S$ egy összefüggő komponensét.

(Laczkovich Miklós, Totik Vilmos)

Megoldás (a kitűzők megoldása alapján). (i) $\Rightarrow$ (ii). Indirekt módon tételezzük fel, hogy (i) igaz, de van $S \subset K$ a (ii)-ben jelzett tulajdonsággal. A Baire kategória-tétel miatt van olyan n, $z \in S$ és egy U környezete z-nek, hogy $K_n \cap S$ sűrű $U \cap S$-ben, ami a K_n zártsága miatt azt jelenti, hogy $U \cap S \subset K_n$. Legyen U_1 a z olyan környezete, amelynek lezártja benne van U-ban. Ekkor U_1 tartalmazza az $\mathbb{R}^2 \setminus S$ halmaz egy V komponensét, ami az éppen mondottak alapján $\mathbb{R}^2 \setminus (S \cap K_n)$ egy komponense is (ami persze különbözik a végtelen komponenstől), azaz $\mathbb{R}^2 \setminus (S \cap K_n)$ nem összefüggő – legyen G_1 és G_2 ennek két komponense. Mivel K sehol sem sűrű, van $P_j \in G_j \setminus K_n$, és mivel a P_1, P_2 pontok $\mathbb{R}^2 \setminus (S \cap K_n)$ két különböző komponenséből vannak, bármely őket összekötő töröttvonal metszi $S \cap K_n$-et. De ekkor bármely ilyen töröttvonal metszi K_n-et is és ezért $\mathbb{R}^2 \setminus K_n$ nem összefüggő, ami viszont ellentmond a K_n-re vonatkozó feltételnek.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Legyen

$$G = \{x \in K : \text{valamely } U \ni x \text{ nyíltra } U \cap K \text{ fedhető megszámlálhatóan sok kompakt halmazzal, amiknek mind összefüggő a komplementere}\}.$$

Könnyen látszik, hogy G relatív nyílt K-ban, valamint K Lindelöf tulajdonsága miatt G is fedhető megszámlálhatóan sok, összefüggő komplementerű kompakt halmazzal. Emiatt elég belátni, hogy $G = K$, hiszen ekkor teljesül (i) és készen vagyunk.

Legyen $F = K \setminus G$. A fentiek miatt F zárt. Elég lenne belátni, hogy F bármely pontjának bármely környezete tartalmazza $\mathbb{R}^2 \setminus F$ egy összefüggő komponensét, hiszen ekkor (ii) miatt F csak az üres halmaz lehetne, tehát valóban $G = K$. Tegyük fel indirekten, hogy van olyan $x \in F$ és U nyílt halmaz, amelyre $x \in U$ és U nem tartalmazza $\mathbb{R}^2 \setminus F$ egy összefüggőségi komponensét sem. Legyen $D = F \cap \overline{B(x, \delta)}$ az x pont egy F-beli relatív zárt, δ sugarú környezete olyan kis δ-ra, hogy $D \subseteq U$.

Most belátjuk, hogy D komplementere összefüggő. Ha nem lenne, akkor $\overline{B(x, \delta)}$ tartalmazná $\mathbb{R}^2 \setminus D$ egy összefüggőségi komponensét. Mivel $D \subseteq F$, ekkor $\mathbb{R}^2 \setminus F$ egy összefüggőségi komponensét is tartalmazná $\overline{B(x, \delta)}$, ami ellentmond x, U és δ választásának. Tehát $\mathbb{R}^2 \setminus D$ összefüggő. Ekkor viszont $B(x, \delta) \cap K \subseteq G \cup D$, ahol D egy kompakt halmaz, aminek összefüggő a komplementere, G pedig fedhető megszámlálhatóan sok ilyen tulajdonságú kompakt halmazzal. Emiatt $x \in G$, de ez ellentmond x választásának.

Megjegyzés. A (ii) $\Rightarrow$ (i) irányt transzfinit rekurzióval is be lehet látni, K-ból kiindulva minden lépésben el kell dobni azon pontokat, amelyeknek van olyan zárt, relatív környezete, ami összefüggő komplementerű. (ii) miatt így zárt halmazok szigorúan fogyó, üreshalmazhoz kilyukadó sorozatát kapjuk. Annyit kell meggondolni, hogy amit kidobtunk, azt le lehet fedni megszámlálhatóan sok, összefüggő komplementerű kompakt halmazzal. Ehhez egyrészt be kell látni, hogy a zárt halmazok szigorúan csökkenő, transzfinit sorozata megszámlálható (ez ismert). Másrészt a fenti megoldáshoz hasonlóan a Lindelöf tulajdonságot használva meg kell gondolni, hogy az egy lépésben kidobott pontok halmaza valóban fedhető megszámlálhatóan sok összefüggő komplementerű kompakt halmazzal.

6. feladat. Létezik-e olyan, az egész komplex síkon reguláris, nem azonosan eltűnő $F(z)$ függvény, melyre $|F(z)| \le e^{|z|}$ minden komplex z-re, $|F(iy)| \le 1$ minden valós y-ra, és melynek végtelen sok valós gyöke van?

(Laczkovich Miklós, Halász Gábor)

Megoldás (Kós Géza). Azt állítjuk, hogy az

$$F(z)=\frac{1}{e}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{e^{z/2^k}}{2^k}\right)$$

függvény eleget tesz a követelményeknek.

1. Először is megmutatjuk, hogy ez a szorzat minden 0 körüli körben egyenletesen konvergens, tehát $F(z)$ egészfüggvény, és nem azonosan nulla.

Vizsgáljuk a szorzatot egy tetszőleges, 0 középpontú és R sugarú körben. Legyen K olyan nagy pozitív egész, hogy $|z|<R$ és $k>K$ esetén $\left|\frac{e^{z/2^k}}{2^k}\right|<\frac{1}{2}$, ekkor a logaritmus főértékét használva

$$F(z)=\frac{1}{e}\prod_{k=1}^{K}\left(1-\frac{e^{z/2^k}}{2^k}\right)\cdot\exp\sum_{k=K+1}^{\infty}\log\left(1-\frac{e^{z/2^k}}{2^k}\right).$$

A kifejezés első fele véges sok, nem azonosan nulla holomorf függvény szorzata. Az utolsó összeg tagjainak nagyságrendje $\left|\log\left(1-\frac{e^{z/2^k}}{2^k}\right)\right|\le O\left(\frac{e^{R/2^k}}{2^k}\right)=O\left(\frac{1}{2^k}\right)$, így az összeg egyenletesen konvergens, $F(z)$ az R sugarú körben holomorf és nem azonosan nulla.

2. A függvénynek végtelen sok valós gyöke van: a $2^k\cdot\log 2^k$ alakú számok.

3. A képzetes tengelyen

$$\big|F(iy)\big|=\frac{1}{e}\prod_{k=1}^{\infty}\left|1-\frac{e^{iy/2^k}}{2^k}\right|\le\frac{1}{e}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)<\frac{1}{e}\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\right)=1.$$

4. Végül, bármely komplex z-re

$$\big|F(z)\big|\le\frac{1}{e}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{e^{|z|/2^k}}{2^k}\right)\le\frac{1}{e}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2^k}\right)e^{|z|/2^k}\right)\le\frac{1}{e}\prod_{k=1}^{\infty}\left(e^{1/2^k}e^{|z|/2^k}\right)=e^{|z|}.$$

Megjegyzés (a kitűzők alapján). Pontosan karakterizáható, hogy mely $a_1,a_2,\ldots$, nem torlódó valós számsorozathoz létezik olyan, nem konstans $F(z)$ egészfüggvény, amely kielégíti a feladatban előírt felső becsléseket, és eltűnik az a_k pontokban: ilyen $F(z)$ akkor és csak akkor létezik, ha az előírt pozitív gyökök reciprokösszege, és ugyanígy az előírt negatív gyökök reciprokösszege is véges.

Klasszikus Phragmén–Lindelöf típusú tétel, hogy ha F holomorf a jobb félsíkban és folytonos a képzetes tengelyen, $|F(z)|\le e^{|z|}$, és a képzetes tengelyen $|F|\le 1$, akkor a $G(z)=F(z)e^{-z}$ függvény korlátos, sőt abszolút értékben legfeljebb 1 (a jobb félsíkban).

Rözítsünk egy $x>0$ számot, amely nem gyöke F-nek, és tegyük fel, hogy a $b_1,\ldots,b_n>x$ valós számok gyökei F-nek, és vizsgáljuk a $G_1(z)=G(z)\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{z+b_k}{z-b_k}$ függvényt. A $\prod_{k=1}^{n}\frac{z+b_k}{z-b_k}$ Blaschke-szorzat abszolút értéke a képzetes tengelyen 1, valamint a a végtelenben is 1-hez tart, így a maximum-elv miatt $\sup|G_1|=\sup|G(z)|\le 1$.

Az x pontot behelyettesítve,

$$0<|G(x)|=|G_1(x)|\cdot\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{x-b_k}{x+b_k}\right|\le 1\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2x}{x+b_k}\right)\le e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{b_k}},$$

tehát

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} \le \frac{1}{x} \log \frac{1}{|G(x)|}.$$

Ez az x-nél nagyobb gyökök bármely véges halmazára elmondható, így F pozitív gyökeinek reciprokösszege véges. Ugyanígy látható, hogy F negatív gyökeinek reciprokösszege is véges.

A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy ez a feltétel elégséges is:

Állítás. Ha $a_0, a_1, \ldots$ valós számok úgy, hogy közöttük csak véges sok 0 szerepel, és $\sum_{a_n \ne 0} \frac{1}{|a_n|}$ véges, akkor ezekhez létezik olyan nem konstans nulla $F(z)$ egészfüggvény, amelyre $|F(z)| \le e^{|z|}$ minden komplex z-re, $|F(iy)| \le 1$ minden valós y-ra, és az $a_1, a_2, \ldots$ számok mind gyökei $F(z)$-nek (mindegyik érték legalább annyiszoros gyök, mint ahányszor szerepel a sorozatban).

Bizonyítás (Kós Géza; Borbényi Márton dolgozata felhasználásával). A fenti megoldáshoz hasonlóan, az $F(z)$ függvényt végtelen szorzatként fogjuk megkonstruálni; ehhez szükségünk lesz olyan függvényekre, „gyöktényezőkre", amelyek egy konkrét, megadott helyen eltűnnek, és teljesülnek rájuk az $F(z)$-hez hasonló felső becslések. A teljes megoldáshoz végül kétféle gyöktényezőt fogunk kombinálni.

1. lemma. Definiáljuk a következő egészfüggvényt:

$$G(z) = \frac{e^{2z} - e^{-2z}}{4z}(1 - z).$$

Erre a függvényre teljesül, hogy (1) $G(0) = 1$ és $G(1) = 0$; (2) $\big|G(z)\big| \le e^{3|z|}$; (3) A képzetes tengelyen $\big|G(iy)\big| \le 1$.

Bizonyítás. Az (1) tulajdonság triviális.

A (2) bizonyításához tekintsük $\dfrac{e^{2z} - e^{-2z}}{4z}$ hatványsorát:

$$\left|\frac{e^{2z} - e^{-2z}}{4z}\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2z)^{2k}}{(2k+1)!}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|2z|^{2k}}{(2k+1)!} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|2z|^n}{n!} = e^{2|z|};$$

a második tényező $|1 - z| \le 1 + |z| \le e^{|z|}$.

(3) A képzetes tengelyen

$$\big|G(iy)\big| = \left|\frac{\sin(2y)}{2y}(1 - iy)\right| = \frac{\big|\sin(2y)\big|}{2|y|}\sqrt{1 + y^2}.$$

Ha $|y| \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$, akkor $\sqrt{1 + y^2} \le 2|y|$, és (3) triviális. A $0 < |y| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ esetben pedig

$$0 < G(iy) = \frac{2 \sin y \cos y}{2y}\sqrt{1 + y^2} < \cos y \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y} = 1.$$

2. lemma. Legyen N olyan index, amelyre $\sum_{n>N}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{6}$, és $n = 1, 2, \ldots, N$-re legyen

$$H_n(z) = \frac{e^{z/2N} - e^{a_n/2N}}{1 + e^{|a_n|/2N}}.$$

Erre a függvényre (1) $H_n(a_n) = 0$; (2) $\big|H_n(z)\big| \le e^{|z|/2N}$; (3) A képzetes tengelyen $\big|H_n(iy)\big| \le 1$.

Bizonyítás. Az (1) állítás most is triviális.

(2) Bármely komplex z-re

$$|H_n(z)| \le \frac{e^{|z|/2N} + e^{|a_n|/2N}}{1 + e^{|a_n|/2N}} \le e^{|z|/2N};$$

(3) Bármely valós y-ra

$$|H_n(iy)| = \left| \frac{e^{iy/2N} - e^{a_n/2N}}{1 + e^{|a_n|/2N}} \right| \le \frac{1 + |e^{a_n/2N}|}{1 + e^{|a_n|/2N}} \le 1.$$

Ezek után, a G és H_n függvények birtokában, az $F(z)$ függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$F(z) = \prod_{n \le N} H_n(z) \cdot \prod_{n>N}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Az első megoldáshoz hasonlóan láthatjuk, hogy F egészfüggvény. A második szorzat értéke a $z = 0$ helyen 1, ez biztosítja, hogy F nem azonosan nulla. Az a_n szám $n \le N$ esetén gyöke $H_n(z)$-nek, $n > N$ esetén pedig $G\left(\frac{z}{a_n}\right)$-nek, tehát $a_1, a_2, \ldots$ valóban gyökei $F(z)$-nek.

Valós y esetén mindegyik $H_n(iy)$ és $G\left(\frac{iy}{a_n}\right)$ tényező abszolút értéke legfeljebb 1, így $|F(iy)| \le 1$.

Végül, bármely z komplex számra

$$|F(z)| = \prod_{n \le N} |H_n(z)| \cdot \prod_{n>N}^{\infty} \left| G\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \le \left(e^{|z|/2N}\right)^N \cdot \prod_{n>N}^{\infty} \left(e^{3\frac{|z|}{|a_n|}}\right) \le e^{\left(\frac{1}{2} + 3\sum\limits_{n>N} \frac{1}{|a_n|}\right)|z|} \le e^{|z|}.$$

7. feladat. Legyen $p(n) \ge 0$ minden n pozitív egészre. Legyenek továbbá $x(0) = 0$, $v(0) = 1$, valamint

$$x(n) = x(n-1) + v(n-1), \qquad v(n) = v(n-1) - p(n)x(n) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Tegyük fel, hogy $v(n)$ monoton csökkenő módon tart 0-hoz, ha $n \to \infty$. Mutassuk meg, hogy az $x(n)$ sorozat akkor és csak akkor felülről korlátos, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot p(n) < \infty$.

(Ráth Balázs)

1. megoldás (Borbényi Márton). Legyen $u(n) = v(n-1) - v(n) = p(n)x(n)$. Ekkor $\sum_{k=1}^{\infty} u(k) = v(0) - v(\infty) = 1 - 0 = 1$, és így $v(n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} u(k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u(k)$. Továbbá $x(n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} v(\ell)$, és így

$$x(\infty) = \sum_{\ell=0}^{\infty} v(\ell) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=\ell+1}^{\infty} u(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k u(k).$$

Tehát azt kell belátnunk, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} k u(k) = +\infty$ akkor és csak akkor, ha $\sum_{k=1}^{\infty} k p(k) = +\infty$.

Az egyik irány könnyű: $n \ge 1$ esetén $x(n) \ge x(1) = 1$, így $u(n) = p(n)x(n) \ge p(n)$, és emiatt $\sum_{k=1}^{\infty} k p(k) = +\infty$-ből következik $\sum_{k=1}^{\infty} k u(k) = +\infty$.

A másik irány: tegyük fel indirekt módon, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} k u(k) = +\infty$ (azaz $x(n) \to \infty$) és $\sum_{k=1}^{\infty} k p(k) < +\infty$ egyszerre teljesülnek. Nyilván ekkor $v(n) > 0$ minden n-re. Ha alkalmazzuk a Kronecker-lemmát az $x(n) \to \infty$ és a $\sum_{k=1}^{\infty} k p(k) < +\infty$ sorozatokra, akkor a következőt kapjuk: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x(n)} \sum_{k=1}^{n} k p(k) x(k) = 0$, azaz $\frac{1}{x(n)} \sum_{k=1}^{n} k u(k) \to 0$. Viszont

$$\sum_{k=1}^{n} k u(k) = \sum_{k=1}^{n} k(v(k-1) - v(k)) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v(k) - \sum_{k=0}^{n} k v(k) = \sum_{k=0}^{n-1} v(k) - n v(n) = x(n) - n v(n),$$

így $\frac{1}{x(n)}(x(n) - nv(n)) \to 0$, tehát $\frac{nv(n)}{x(n)} \to 1$. Használjuk azt a jelölést, hogy $a(n) \sim b(n)$ akkor és csak akkor, ha $\frac{a(n)}{b(n)} \to 1$. Tehát tudjuk, hogy $nv(n) \sim x(n)$, így $v(n-1) - v(n) = u(n) = x(n)p(n) \sim np(n)v(n)$, így $\frac{v(n-1)-v(n)}{v(n)} \sim np(n)$, azaz $h(n) := \frac{v(n-1)}{v(n)} - 1 \sim np(n)$. Tehát $\sum_{k=1}^{\infty} kp(k) < +\infty$ miatt $\sum_{k=1}^{\infty} h(k) < +\infty$ teljesül, és akkor $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + h(k)) < +\infty$ is teljesül, viszont $\prod_{k=1}^{n}(1 + h(k)) = \prod_{k=1}^{n} \frac{v(k-1)}{v(k)} = \frac{v(0)}{v(n)} = \frac{1}{v(n)}$, így arra jutottunk, hogy $\lim_{n\to\infty} 1/v(n) < +\infty$, ami ellentmond azzal a feltevésünkkel, hogy $v(n) \to 0$, így az indirekt bizonyításunk véget ért, és beláttuk azt az irányt, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} ku(k) = +\infty$-ból következik, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} kp(k) = +\infty$.

2. megoldás (kitűző). A feladatunk az

$$x(n) := x(n-1) + v(n-1), \qquad v(n) := v(n-1) - p(n)x(n), \qquad n = 1, 2, \dots \tag{2}$$

másodrendű lineáris rekurzió vizsgálata az $x(0) = 0$ és $v(0) = 1$ kezdeti feltételekkel.

Először azt az irányt bizonyítjuk, hogy ha $x(\infty) := \sup_n x(n) < +\infty$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p(n) < +\infty$. Valóban: $x(n) \geq x(1) = 1$, emiatt $v(n) \leq v(n-1) - p(n)$ minden $n \geq 1$ esetén, így

$$\sum_{n=K+1}^{\infty} p(n) \leq \sum_{n=K+1}^{\infty} (v(n-1) - v(n)) = v(K), \quad K \geq 0, \tag{3}$$

következésképp $x(\infty) = x(0) + v(0) + v(1) + \cdots \geq \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{n=K+1}^{\infty} p(n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p(n)$, tehát valóban az $x(\infty) < +\infty$ feltételből következik $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p(n) < +\infty$.

Most pedig belátjuk, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p(n) < +\infty$, akkor $x(\infty) < +\infty$. Először is meg fogjuk konstruálni az (2) lineáris rekurzió egy másik megoldását, de ezúttal a peremfeltételt az $n \to \infty$ limeszben szabjuk meg, nem pedig $n = 0$-ban. Jelölje N a legkisebb pozitív egész számot, amire

$$\sum_{\ell=N}^{\infty} (\ell + 1 - N)p(\ell + 1) \leq 1.$$

(Jegyezzük meg, hogy $N < +\infty$ következik a $\sum_{n=1}^{\infty} \ell \cdot p(\ell) < +\infty$ feltételből.)

1. lemma. Van olyan $\tilde{x}(n), \tilde{v}(n) \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\tilde{x}(n-1) = \tilde{x}(n) - \tilde{v}(n-1), \qquad \tilde{v}(n-1) = \tilde{v}(n) + p(n)\tilde{x}(n), \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

továbbá

$$1 \geq \tilde{x}(n) \geq 1 - \sum_{\ell=n}^{\infty} (\ell + 1 - n)p(\ell + 1), \qquad \forall n \geq N, \tag{5}$$

$$0 \leq \tilde{v}(n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} p(k), \qquad \forall n \geq N. \tag{6}$$

Definiáljuk ezen kívül az alábbi diszkrét Wronski-determinánst:

$$W(n) := x(n)\tilde{v}(n) - v(n)\tilde{x}(n). \tag{7}$$

2. lemma. $W(n) = W(n-1)$ teljesül minden $n = 1, 2, \dots$ esetén, azaz $W(n)$ konstans.

Mielőtt belátjuk az 1. lemma és a 2. lemma állítását, vezessük le belőlük a bizonyítandó $x(\infty) < +\infty$ egyenlőtlenséget. Először is belátjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} W(n) = 0$. Valóban, $\tilde{x}(n) \to 1$ (ez következik (5)-ből és $\sum_{n=1}^{\infty} \ell \cdot p(\ell) < +\infty$-ből) és $v(n) \to 0$, amint $n \to \infty$, ezen kívül teljesül $0 \leq x(n) \leq n$ (ez könnyen következik abból, hogy $0 \leq v(n) \leq 1$ és az (2) rekurzióból), végül $\lim_{n\to\infty} n\tilde{v}(n) = 0$, hiszen (6) teljesül és $\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=n+1}^{\infty} p(k) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} kp(k) = 0$. Tehát $W(n) = 0$ teljesül minden n-re a 2. lemma miatt, tehát $x(n) = c\tilde{x}(n)$ és $v(n) = c\tilde{v}(n)$ teljesül minden n esetén (mindenütt ugyanazzal a c-vel), és így $x(\infty) = c < +\infty$.

Az 1. lemma bizonyítása. Tetszőleges $k \geq N$ esetén definiáljuk $\tilde{x}_k(n)$-et és $\tilde{v}_k(n)$-et minden $n \in \mathbb{N}$-re a következő módon: legyen $\tilde{x}_k(n) = 1$ és $\tilde{v}_k(n) = 0$ minden $n \geq k$ esetén, továbbá legyen $\tilde{x}_k(n-1) = \tilde{x}_k(n) - \tilde{v}_k(n-1)$ és $\tilde{v}_k(n-1) = \tilde{v}_k(n) + p(n)\tilde{x}_k(n)$ rekurzívan definiálva $n = k, k-1, \ldots, 2, 1$ esetén. Be fogjuk bizonyítani a következő egyenlőtlenségeket:

$$1 \geq \tilde{x}_k(n) \geq 1 - \sum_{\ell=n}^{\infty} (\ell + 1 - n)p(\ell + 1), \qquad \forall n, k \geq N, \tag{8}$$

$$0 \leq \tilde{v}_k(n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} p(k), \qquad \forall n, k \geq N. \tag{9}$$

A (8) és (9) egyenlőtlenségek nyilvánvalóan teljesülnek $n \geq k \geq N$ esetén. Ha pedig $k \geq N$, akkor n-re vonatkozó indukcióval fogjuk bizonyítani őket a $n = k, k-1, k-2, \ldots, N+1, N$ esetekben (fentről lefele haladva az indukciós lépésekkel). Valóban, tegyük fel, hogy (8) és (9) teljesülnek valamilyen $N + 1 \leq n \leq k$ esetén. Ekkor (8) miatt teljesül $\tilde{x}_k(n) \in [0, 1]$, tehát $\tilde{v}_k(n) \leq \tilde{v}_k(n-1) \leq \tilde{v}_k(n) + p(n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} p(k)$, és így (9) teljesül $n - 1$ esetén. Így aztán $\tilde{x}_k(n-1) \leq \tilde{x}_k(n) \leq 1$ és

$$\tilde{x}_k(n-1) = \tilde{x}_k(n) - \tilde{v}_k(n-1) \geq \\ 1 - \sum_{\ell=n}^{\infty} (\ell + 1 - n)p(\ell + 1) - \sum_{k=n}^{\infty} p(k) = 1 - \sum_{\ell=n-1}^{\infty} (\ell + 1 - (n-1))p(\ell + 1), \tag{10}$$

így (9) teljesül $n - 1$-re is. Ezzel befejeztük (8) és (9) bizonyítását.

Ahhoz, hogy megkonstruáljuk a Lemma 1-beli tulajdonságokkal rendelkező $\tilde{x}(n), \tilde{v}(n) \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ sorozatokat, elég kiválasztani indexek egy olyan $k(i), i = 1, 2, \ldots$ részsorozatát, hogy minden $n \geq N$ esetén a $\tilde{x}(n) = \lim_{i\to\infty} \tilde{x}_{k(i)}(n)$ és $\tilde{v}(n) = \lim_{i\to\infty} \tilde{v}_{k(i)}(n)$ határértékek létezzenek (ez a Cantor-féle átlós módszerrel megtehető): ekkor a (8) és (9) egyenlőtlenségek túlélik a limeszt (és így (5) és (6) teljesülnek), továbbá az (4) összefüggések is teljesülnek, hiszen az analóg összefüggések teljesülnek $\tilde{x}_{k(i)}(n), \tilde{v}_{k(i)}(n), \tilde{x}_{k(i)}(n-1)$ és $\tilde{v}_{k(i)}(n-1)$ esetén (kellően nagy i-re), és a műveletek folytonossága miatt ezek az összefüggések is túlélik a limeszt. Lévén, hogy sikerült $\tilde{x}(n), \tilde{v}(n), n \geq N$ konstrukciója, most már csak ki kell terjeszteni a definíciót az $n = N-1, N-2, \ldots, 2, 1$ esetre, lefele lépegető (4) rekurzió segítségével.

A 2. lemma bizonyítása.

$$W(n) = x(n)\tilde{v}(n) - v(n)\tilde{x}(n) \overset{(2),(4)}{=} (x(n-1) + v(n-1))(\tilde{v}(n-1) - p(n)\tilde{x}(n)) - \\ (v(n-1) - p(n)x(n))(\tilde{x}(n-1) + \tilde{v}(n-1)) = W(n-1) - x(n-1)p(n)\tilde{x}(n) + \\ v(n-1)\tilde{v}(n-1) - v(n-1)p(n)\tilde{x}(n) - v(n-1)\tilde{v}(n-1) + p(n)x(n)\tilde{x}(n-1) + p(n)x(n)\tilde{v}(n-1) = \\ W(n-1) - p(n)\tilde{x}(n)(x(n-1) + v(n-1)) + p(n)x(n)(\tilde{x}(n-1) + \tilde{v}(n-1)) \overset{(2),(4)}{=} \\ W(n-1) - p(n)\tilde{x}(n)x(n) + p(n)\tilde{x}(n)x(n) = W(n-1). \tag{11}$$

3. megoldás (Nagy János). Lássuk be előbb a könyebb irányt és tegyük fel, hogy az $x(n)$ sorozat konvergens és tegyük fel, hogy $x(n) \leq K$ valamilyen K pozitív számra minden $n \geq 0$ egész szám esetén.

Mivel $v(n) \geq 0$ minden $n \geq 0$ esetén, ezért az $x(n)$ sorozat monoton növő, így speciálisan $x(n) \geq 1$. Ebből a második rekurziós egyenletet felhasználva adódik $p(n) = \frac{v(n-1)-v(n)}{x(n)} \leq v(n-1) - v(n)$. Így tehát minden $N > 0$ egész számra $\sum_{1\leq n\leq N} np(n) \leq \sum_{1\leq n\leq N} n(v(n-1)-v(n)) = x(n) - Nv(N) < K$. Mivel $p(n) \geq 0$ minden n esetén ebből következik a $\sum_{n\geq 1} np(n)$ sor konvergenciája.

A fordított irányhoz tegyük fel, hogy $x(n)$ divergens, mivel $x(n) > 0$ minden $n \geq 1$ esetén, tudjuk ekkor, hogy $\ln(x(n))$ is divergens. Vegyük észre, hogy $\ln(x(n)) - \ln(x(n-1)) = \int_{x(n-1)}^{x(n)} \frac{1}{y} dy < \frac{(x(n)-x(n-1))}{x(n-1)}$ teljesül $n \geq 2$ esetén, vagyis $\ln(x(n)) - \ln(x(n-1)) < \frac{v(n-1)}{x(n-1)}$.

Mivel $\sum_{n\geq 2}(\ln(x(n)) - \ln(x(n-1)))$ divergens, ezért a fentiekből azt kapjuk, hogy $\sum_{n\geq 1}\frac{v(n)}{x(n)}$ divergens.

Most legyen $N \geq 1$ tetszőleges egész, ekkor:

$$\sum_{1\leq n\leq N} np(n) = \sum_{1\leq n\leq N} n\cdot\frac{v(n-1)-v(n)}{x(n)} = \frac{v(0)}{x(1)} + \sum_{1\leq n\leq N-1}\left(\frac{(n+1)v(n)}{x(n+1)} - \frac{nv(n)}{x(n)}\right) - N\frac{v(N)}{x(N)}.$$

Ez azt jelenti, hogy:

$$\sum_{1\leq n\leq N} np(n) = 1 + \sum_{1\leq n\leq N-1} n\left(\frac{v(n)}{x(n+1)} - \frac{v(n)}{x(n)}\right) + \sum_{1\leq n\leq N-1}\frac{v(n)}{x(n+1)} - N\frac{v(N)}{x(N)}.$$

Átrendezve adódik, hogy:

$$\sum_{1\leq n\leq N} np(n) = \left(1 - N\frac{v(N)}{x(N)}\right) - \sum_{1\leq n\leq N-1} n\left(\frac{v(n)^2}{x(n+1)x(n)}\right) + \sum_{1\leq n\leq N-1}\frac{v(n)}{x(n+1)}.$$

Két eset van a továbbiakban:

Először tegyük fel, hogy létezik egy index M, hogyha $n \geq M$, akkor $n\frac{v(n)}{x(n)} \leq \frac{1}{2}$. Ekkor a fenti egyenletben, ha $N \geq M$ akkor $N\frac{v(N)}{x(N)} \leq \frac{1}{2}$, valamint ha $n \geq M$ akkor $\frac{v(n)}{x(n+1)} \geq 2n(\frac{v(n)^2}{x(n+1)x(n)})$.

Így tehát azt kapjuk, hogy $\sum_{1\leq n\leq N} np(n) \geq \sum_{1\leq n\leq N-1}\frac{v(n)}{2x(n+1)} - C$, ahol C egy N-től független konstans. Másrészről $x(n+1) \leq 2x(n)$, ha $n \geq 3$, így tehát $\sum_{1\leq n\leq N} np(n) \geq \sum_{1\leq n\leq N-1}\frac{v(n)}{4x(n)} - C'$, ahol C' egy N-től független konstans. Így tehát ebben az esetben a $\sum_{n\geq 1}\frac{v(n)}{x(n)}$ sor divergenciájából következik a feladat állítása.

Most tegyük fel a másik esetben, hogy minden M korlátra van olyan $n \geq M$, amelyre $nv(n) \geq x(n)/2$ vagy másképpen írva $x(n) \leq 2nv(n-1)$. Mivel a v sorozat monoton csökkenő módon nullához tart, ezért van egy legkisebb $m \geq n$ index amelyre $v(m) < v(n-1)/2$. Vegyük észre, hogy ha $n \leq i \leq m$ akkor $iv(i-1) \geq iv(n-1)/2 \geq nv(n-1)/2+(i-n)v(n-1)/2 \geq x(n)/4+\sum_{n\leq j\leq i-1} v(j)/2 \geq x(i)/4$. Így tehát $n \leq i \leq m$ esetén $x(i) \leq 4i\cdot v(i-1) \leq 4i\cdot v(n-1)$.

Most vegyük észre, hogy $n \leq i \leq m$ esetén $v(i-1) - v(i) = p(i)x(i) \leq 4p(i)iv(n-1)$. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva azt kapjuk, hogy $v(n-1)/2 \leq v(n-1)-v(m) \leq 4\sum_{n\leq i\leq m} p(i)i\cdot v(n-1)$, vagyis $1/8 \leq \sum_{n\leq i\leq m} p(i)i$. Mivel feltevésünk szerint n akármilyen nagy lehet, ezért a Cauchy kritérium miatt a $\sum_{n\geq 0} p(n)n$ sornak divergensnek kell lennie, vagyis a feladat állítását beláttuk ebben az esetben is.

8. feladat. Legyen $\mathbb{F}_p$ a p elemű test valamely $p > 3$ prímszámra, és jelölje S az $\mathbb{F}_p$-ből $\mathbb{F}_p$-be képező függvények halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $D\colon S \to S$ leképezést, melyre

$$D(f\circ g) = \big(D(f)\circ g\big)\cdot D(g)$$

teljesül minden $f, g \in S$ esetén. Itt $\circ$ a függvénykompozíció, azaz $(f\circ g)(x) = f(g(x))$, és $\cdot$ a pontonkénti szorzás, azaz $(f\cdot g)(x) = f(x)g(x)$.

(Carl Schildkraut, Brandon Wang)

Megoldás (a kitűzők megoldása alapján). Legyen $\mathbb{F}_p^* = \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$, valamint c_0, illetve c_1 jelölje a konstans 0, illetve 1 függvényt.

Vegyük észre, hogy tetszőleges rögzített $h\colon \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p^*$ függvényre a

$$D(f)(x) = \frac{h(f(x))}{h(x)}$$

definíció egy megoldást ad, hiszen $f, g \in S$ esetén

$$\frac{h(f(g(x)))}{h(x)} = \frac{h(f(g(x))}{h(g(x))} \cdot \frac{h(g(x))}{h(x)}.$$

A fenti D leképezést D_h-val fogjuk jelölni.

Ezen a D_h családon kívül definiálunk három másik megoldást (D_0, D_1, D_{sgn}):

- $D_0(f) = c_0$ minden f-re.
- $D_{\text{sgn}}(f)(x) = \text{sgn}(f)\ \forall x \in \mathbb{F}_p$, ha f bijekció, és $D_{\text{sgn}}(f) = c_0$ különben.
- $D_1 = D_{\text{sgn}}^2$, azaz $D_1(f) = c_1$, ha f bijekció, és $D_1(f) = c_0$ különben.

Nyilvánvaló, hogy a megoldások halmaza szorzásra zárt, tehát a fenti megoldások szorzatai is megoldások, és látni fogjuk, hogy így megkapható az összes megoldás. Egész pontosan **azt állítjuk, hogy a megoldások halmaza a következő:**

$$D_0, \quad D_h, \quad D_h \cdot D_1, \quad D_h \cdot D_{\text{sgn}}, \text{ ahol } h \text{ tetszőleges } \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p^* \text{ függvény.}$$

Vegyünk egy tetszőleges D megoldást.

1. lemma. Minden c konstans függvényre $D(c) = c_0$, vagy $D = D_h$ egy megfelelő $h\colon \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p^*$-ra.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van olyan c konstans függvény, melyre $h := D(c) \neq c_0$. Ekkor tetszőleges g-re $c = c \circ g$, amiből azt kapjuk, hogy

$$h(x) = h(g(x)) \cdot D(g)(x).$$

Ekkor ha $h(y_0) = 0$ fennállna bármely y_0-ra, akkor g-t a konstans y_0 függvénynek választva $h = c_0$ adódna ellentmondva a feltételezésünknek. Tehát $\text{im}(h) \subseteq \mathbb{F}_p^*$. Legyen $h'(x) = (h(x))^{-1}$; ekkor

$$D(g)(x) = \frac{h'(g(x))}{h'(x)}$$

minden g, x-re, azaz $D = D_{h'}$.

A továbbiakban elég tehát azzal az esettel foglalkoznunk, amikor $D(c) = c_0$ minden c konstans függvényre.

2. lemma. Ha $D(\text{id}) \neq c_1$, akkor $D(f) = c_0$ minden f-re, azaz $D = D_0$.

Bizonyítás. Legyen $h = D(\text{id})$, és tegyük fel, hogy létezik x_0, melyre $h(x_0) \neq 1$. Ekkor

$$D(f)(x_0) = D(f)(x_0) \cdot h(x_0), \text{ azaz } D(f)(x_0) = 0 \text{ minden } f\text{-re.}$$

Legyen most ℓ tetszőleges függvény és $x_1 \in \mathbb{F}_p$. Legyen továbbá $f = \ell \circ g^{-1}$ egy olyan g bijekcióra, melyre $g(x_1) = x_0$. Ekkor

$$D(\ell)(x_1) = D(f)(g(x_1)) \cdot D(g)(x_1) = D(f)(x_0) \cdot D(g)(x_1) = 0,$$

vagyis $D(\ell)(x_1) = 0\ \forall x_1 \in \mathbb{F}_p$, $\forall \ell \in S$.

A továbbiakban azt is feltesszük, hogy $D \neq D_0$, és következésképp $D(\text{id}) = c_1$.

3. lemma. Ha f bijekció, akkor $D(f)$ sehol sem nulla.

Bizonyítás.

$$\text{id} = f^{-1} \circ f \;\Rightarrow\; c_1 = D(\text{id}) = \big(D(f^{-1}) \circ f\big) \cdot D(f) \;\Rightarrow\; D(f)(x) \neq 0\ (\forall x \in \mathbb{F}_p).$$

4. lemma. Ha egy $f \in S$ függvényre $f(a) = f(b)$ valamely $a \neq b$-re, akkor $D(f)(a) = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt módon, hogy egy f_1 függvényre $f_1(a) = f_1(b)$ és $D(f_1)(a) \neq 0$. Ebből belátjuk, hogy $D(f) = c_0$ $\forall f \in S$, ami persze ellentmondás. Indukciót fogunk alkalmazni $n = |\operatorname{im}(f)|$-re. Az $n = 1$ eset triviális, hiszen ez épp a konstans függvények esete. Tegyük fel tehát, hogy az állítás igaz minden $n \leq k$-ra, és g legyen olyan függvény, melyre $|\operatorname{im}(g)| = k + 1$. Legyen $x_0 \in \mathbb{F}_p$. Megmutatjuk, hogy $D(g)(x_0) = 0$.

Legyen $y_0 = g(x_0) \in \operatorname{im} g$, $z_0 \in \operatorname{im} g$, $z_0 \neq y_0$. Válasszunk olyan h bijekciót, melyre $h(y_0) = a$ és $h(z_0) = b$. Ekkor

$$D(f_1 \circ h \circ g) = (D(f_1) \circ h \circ g)(D(h) \circ g)(D(g)).$$

Azonban $f_1 \circ h \circ g$ képe legfeljebb k elemű, így x_0-ban kiértékelve kapjuk, hogy

$$0 = D(f_1)(a)(D(h) \circ g)(x_0)D(g)(x_0).$$

Mivel azonban $D(h)$ sehol nem vesz fel nullát a 3. lemma értelmében, illetve $D(f_1)(a) \neq 0$ az indirekt feltevésünk szerint, ezért $D(g)(x_0) = 0$.

5. lemma. Ha g nem bijekció, akkor $D(g) = c_0$.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in \mathbb{F}_p$ és $y_0 \in \mathbb{F}_p \setminus \operatorname{im}(g)$. Legyen továbbá

$$f(x) = \begin{cases} g(x_0) & \text{ha } x = y_0; \\ x & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor $f \circ g = g$. Másrészt $f(y_0) = f(g(x_0))$, így $D(f)(g(x_0)) = 0$ az előző lemma alapján. Következésképp

$$D(g)(x_0) = D(f \circ g)(x_0) = D(f)(g(x_0)) \cdot D(g)(x_0) = 0.$$

.

A megoldás hátralévő részében a következő lemma bizonyítása lesz a célunk, ami leírja, hogyan viselkedik D, ha bijekciókra alkalmazzuk. Az 5. lemma és a 6. lemma már együttesen mutatja, hogy ha a D megoldás nem D_h alakú és $D \neq D_0$, akkor szükségképpen $D_h \cdot D_1$ vagy $D_h \cdot D_{\mathrm{sgn}}$ alakú, ahogy állítottuk.

6. lemma. Létezik $h \colon \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p^*$ és $k \in \{0, 1\}$ úgy, hogy minden $f \in S$ bijekcióra és $x \in \mathbb{F}_p$-re

$$D(f)(x) = (\operatorname{sgn} f)^k \frac{h(f(x))}{h(x)}.$$

Jelölje σ_{ab} a transzpozíciót, mely felcseréli a-t és b-t.

7. lemma. Ha az f bijekciónak x_0 fixpontja, akkor $D(f)(x_0) = \pm 1$.

Bizonyítás. Először transzpozíciókra látjuk be: ha $x_0 \notin \{a, b\}$, akkor

$$D(\sigma_{ab}^2)(x_0) = 1 = D(\sigma_{ab})(x_0)^2, \text{ azaz } D(\sigma_{ab})(x_0) = \pm 1.$$

Most írjuk fel f-et olyan $\sigma_{a_i b_i}$ transzpozíciók szorzataként, melyek mind fixen hagyják x_0-t. Ekkor

$$D(f)(x_0) = D(\sigma_{a_1 b_1} \circ \cdots \circ \sigma_{a_k b_k}) = D(\sigma_{a_1 b_1})(x_0) \cdots D(\sigma_{a_k b_k})(x_0) = \pm 1.$$

8. lemma. Minden x_0-ra létezik $k \in \{0, 1\}$ (mely esetleg függ x_0-tól) úgy, hogy minden x_0-t fixen hagyó f bijekcióra

$$D(f)(x_0) = (\operatorname{sgn} f)^k.$$

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $D(f)(x_0) = 1$, ha f páros permutáció. A fentiekhez hasonló gondolatmenet mutatja, hogy szorítkozhatunk arra az esetre, amikor f egy 3 hosszú ciklus. Ekkor $f^3 = \mathrm{id}$ és

$$1 = D(f^3)(x_0) = (D(f)(x_0))^3.$$

Mivel $D(f)(x_0) = \pm 1$, ezért azt kapjuk, hogy $D(f)(x_0) = 1$. Azt kell még megmutatnunk, hogy ha g, h páratlanok, akkor $D(g)(x_0) = D(h)(x_0)$:

$$1 = D(g \circ h)(x_0) = D(g)(x_0)D(h)(x_0).$$

9. lemma. Létezik $k \in \{0, 1\}$ úgy, hogy minden f bijekció minden x fixpontjára

$$D(f)(x) = (\operatorname{sgn} f)^k.$$

Bizonyítás. Legyenek $x_0, x_1 \in \mathbb{F}_p$ és k_0, k_1 a 8. lemma szerint hozzájuk tartozó $\{0, 1\}$-beli számok. Legyen $a, b \notin \{x_0, x_1\}$ és $\sigma_x = \sigma_{x_0 x_1}$. Mivel σ_x és σ_{ab} felcserélhetők, ezért

$$(D(\sigma_x) \circ \sigma_{ab})D(\sigma_{ab}) = (D(\sigma_{ab}) \circ \sigma_x)D(\sigma_x).$$

Ezt értékeljük ki x_0-ban:

$$D(\sigma_x)(x_0)D(\sigma_{ab})(x_0) = D(\sigma_{ab})(x_1)D(\sigma_x)(x_0),$$

Mivel $D(\sigma_x)(x_0) \neq 0$, azt kapjuk, hogy $D(\sigma_{ab})(x_0) = D(\sigma_{ab})(x_1)$, így $(-1)^{k_0} = (-1)^{k_1}$, azaz $k_0 = k_1$.

A továbbiakban k jelölje a 9. lemma szerinti számot.

10. lemma. Ha az f_1, f_2 bijekciókra $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, akkor

$$D(f_1)(x_0)/(\operatorname{sgn} f_1)^k = D(f_2)(x_0)/(\operatorname{sgn} f_2)^k.$$

Bizonyítás. Legyen $g = f_1^{-1} \circ f_2$; ekkor g fixen hagyja x_0-t, így $D(g)(x_0) = (\operatorname{sgn} g)^k$, amiből

$$D(f_2)(x_0) = D(f_1 \circ g)(x_0) = D(f_1)(x_0)D(g)(x_0) = D(f_1)(x_0)\frac{(\operatorname{sgn} f_2)^k}{(\operatorname{sgn} f_1)^k}.$$

Most már rátérhetünk a 6. lemma bizonyítására, amivel teljessé válik a megoldásunk. Vezessük be a $\widetilde{D}(f) = D(f)/(\operatorname{sgn} f)^k$ jelölést minden f bijekcióra. Ekkor egyrészt tetszőleges g, h bijekciókra $\widetilde{D}$-re is igaz marad a láncszabály:

$$\widetilde{D}(g \circ h) = (\widetilde{D}(g) \circ h) \cdot \widetilde{D}(h).$$

Másrészt a 10. lemma állítása erre egyszerűsödik:

$$\widetilde{D}(f_1)(x_0) = \widetilde{D}(f_2)(x_0), \text{ feltéve, hogy } f_1(x_0) = f_2(x_0).$$

Tehát választhatjuk h-t úgy, hogy $h(i)/h(0) = \widetilde{D}(f_1)(0)$ minden olyan f_1 bijekcióra, melyre $f_1(0) = i$. Azt állítjuk, hogy tetszőleges f bijekcióra és $x \in \mathbb{F}_p$-re

$$\widetilde{D}(f)(x) = \frac{h(f(x))}{h(x)}. \tag{$\star$}$$

Vegyük észre, hogy ha f, g bijekciókra fennáll ($\star$), akkor

$$\widetilde{D}(f \circ g) = (\widetilde{D}(f) \circ g) \cdot \widetilde{D}(g) = \frac{h \circ f \circ g}{h \circ g} \cdot \frac{h \circ g}{h} = \frac{h \circ (f \circ g)}{h},$$

azaz $f \circ g$-re is fennáll ($\star$). Emiatt elegendő transzpozíciókra bizonyítani. Sőt, elegendő σ_{0a} alakú transzpozíciókra belátni, hiszen $\sigma_{ab} = \sigma_{0a}\sigma_{0b}\sigma_{0a}$.

Vegyük tehát a σ_{0a} transzpozíciót. Ha $x \notin \{0, a\}$, akkor x fixpont és így ($\star$) mindkét oldala 1. Továbbá h defincíója szerint

$$\widetilde{D}(\sigma_{0a})(0) = \frac{h(a)}{h(0)}.$$

Végül

$$1 = c_1(0) = \widetilde{D}(\underbrace{\sigma_{0a} \circ \sigma_{0a}}_{\mathrm{id}})(0) = \widetilde{D}(\sigma_{0a})(a)\widetilde{D}(\sigma_{0a})(0) \text{ miatt } \widetilde{D}(\sigma_{0a})(a) = \frac{h(0)}{h(a)} \text{ adódik.}$$

9. feladat. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ legalább kételemű kompakt halmaz, és tekintsük az $\Omega = \bigtimes_{n=0}^{\infty} D$ szorzatteret a szorzattopológiával. Tetszőleges $(d_n)_{n=0}^{\infty} \in \Omega$ sorozat esetén legyen $f_{(d_n)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$. Adott $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$ esetén jelölje $S = S(\zeta, (d_n))$ azon w komplex számok halmazát, melyekhez létezik olyan (z_k) sorozat, melyre $|z_k| < 1$, $z_k \to \zeta$, és $f_{(d_n)}(z_k) \to w$. Igazoljuk, hogy Ω egy reziduális halmazán S független ζ választásától.

(Maga Balázs, Maga Péter)

Megoldás (kitűzők). Azt fogjuk igazolni, hogy Ω egy reziduális halmazán – más terminológiával *generikusan* – minden ζ-ra $S(\zeta, (d_n)) = \mathbb{C}$. Azonnal látható, hogy a D halmazt egy komplex számmal eltolva, illetve szorozva sem a feltétel, sem a bizonyítandó nem változik. Ebből adódóan feltehető, hogy $0, 1 \in D$.

Mivel D kompakt, az Ω Baire-tér, azaz teljesül rajta Baire-kategóriatétel. Ezt több ízben fel fogjuk használni, ebből adódik, hogy megszámlálható sok reziduális halmaz metszete is reziduális.

Nyilvánvaló, hogy amennyiben (ζ_k) olyan sorozat az egységkörvonalon, mely egy ζ, $|\zeta| = 1$ ponthoz tart, valamint $S(\zeta_k, (d_n)) = \mathbb{C}$ minden k-ra, akkor $S(\zeta, (d_n)) = \mathbb{C}$ is teljesül. Így az egységkörvonal szeparabilitásából adódóan elegendő azt igazolnunk, hogy tetszőleges konkrét ζ, $|\zeta| = 1$ pontra az $S(\zeta, (d_n)) = \mathbb{C}$ egyenletet kielégítő (d_n) sorozatok az Ω egy reziduális halmazát alkotják, hiszen megszámlálható sok reziduális halmaz metszete is reziduális. $\mathbb{C}$ szeparabilitását felhasználva hasonló okfejtés nyomán adódik, hogy elegendő fix $w \in \mathbb{C}$ mellett igazolni, hogy Ω egy reziduális halmazán $w \in S(\zeta, (d_n))$. Ehhez az alábbiakban azt látjuk be, hogy tetszőleges $\varepsilon, \delta > 0$-ra Ω egy sűrű, nyílt A halmazán van a ζ δ-környezetében olyan ζ', $|\zeta'| < 1$, hogy $|f_{(d_n)}(\zeta') - w| < \varepsilon$. Mivel szorítkozhatunk racionális ε, δ számokra, az így kapott megszámlálható sok sűrű, nyílt halmazt összemetszve ebből már nyerjük a $w \in S(\zeta, (d_n))$ tulajdonság generikusságát.

1. A nyílt: fixáljunk egy $(d_n) \in A$ konfigurációt. Vegyük az ezt tanusító ζ', $|\zeta'| < 1$ számot, melyre $|\zeta - \zeta'| < \delta$, valamint $|f_{(d_n)}(\zeta') - w| < \varepsilon$. Állítjuk, hogy (d_n) kellőképp kis U cilinderkörnyezetében tetszőleges (d_n^*)-re ugyanez a ζ' fogja tanusítani a $(d_n^*) \in A$ tartalmazást. Ehhez technikai okokból válasszunk $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ számot, melyre $|f_{(d_n)}(\zeta') - w| < \varepsilon'$. Az U-t a következőképpen definiáljuk: egy később fixálandó nagy N küszöbig az U n. koordinátára vett vetülete legyen a $d_n \in \mathbb{C}$ szám $\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{3^{n+1} \cdot \max_{d \in D} |d|}$ sugarú környezetének D-vel vett metszete, a későbbi koordinátákon pedig e vetület legyen maga a D. Ekkor tetszőleges $(d_n^*) \in U$ esetén a háromszög-egyenlőtlenségből és $|\zeta'| < 1$-ből adódóan

$$|f_{(d_n)}(\zeta') - f_{(d_n^*)}(\zeta')| \leq \sum_{n=0}^{N} |d_n - d_n^*| + \max_{d \in D} |d| \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} |\zeta| = \frac{1 - 3^{-(N+1)}}{2} |\varepsilon - \varepsilon'| + \max_{d \in D} |d| \cdot \frac{|\zeta|^N}{1 - \zeta}.$$

$N \to \infty$ határátmenetet véve a jobb oldalon $\frac{|\varepsilon-\varepsilon'|}{2}$ adódik, magyarán elég nagy N-re $|f_{(d_n)}(\zeta') - f_{(d_n^*)}(\zeta')| < |\varepsilon - \varepsilon'|$. Ezt összevetve a ε'-t és a ζ'-t meghatározó egyenlőtlenséggel egy újabb háromszög-egyenlőtlenség adja, hogy $|f_{(d_n^*)}(\zeta') - w| < \varepsilon$, azaz $(d_n^*) \in A$. Ez igazolja A nyíltságát.

2. A sűrű: rögzítsünk egy U cilinderhalmazt. Igazolni fogjuk, hogy létezik $(d_n) \in U$, valamint ζ', $|\zeta'| < 1$, melyre $|\zeta - \zeta'| < \delta$ és $|f_{(d_n)}(\zeta') - w| < \varepsilon$ teljesül, ezzel befejezve a bizonyítást.

   Válasszunk $N \in \mathbb{N}$-et úgy, hogy az $N+1$. koordinátától kezdve az U-nak minden vetülete triviális. Legyen $(d_n)_{n=0}^N$ tetszőleges úgy, hogy mindegyik az U megfelelő koordinátára vett vetületébe essen, valamint legyen $S = \sum_{n=0}^N d_n\zeta^n$. Ha $|w - S| < \varepsilon$, akkor azonnal kész vagyunk, amennyiben minden további $(d_n)_{n=N+1}^\infty$ együtthatót 0-ra állítunk, ζ'-t pedig ζ-hoz kellően közel vesszük fel. Ellenkező esetben válasszunk egy $S^* \in \mathbb{C}$ számot, melyre $|S^* - S| < \frac{\varepsilon}{4}$, valamint $w - S^*$ argumentuma π racionális többszöröse. A következő három feltételt kielégítve választunk egy ζ_0, $|\zeta_0| = 1$-et kielégítő számot: $|\zeta - \zeta_0| < \frac{\delta}{2}$, emellett $S_0 = \sum_{n=0}^N d_n\zeta_0^n$ esetén $|S - S_0| < \frac{\varepsilon}{4}$, végezetül pedig ζ_0^l argumentuma megegyezik $w - S^*$ argumentumával valamely l pozitív egészre. Ez nyilván lehetséges: az első két tulajdonság ζ elég kis környezetében, a harmadik kitétel pedig sűrűn teljesül.

   Ekkor $\zeta_0^p = 1$ valamely p pozitív egészre. Továbbá, ζ_0-nak végtelen sok olyan ζ_0^{l+mp} hatványa van, melynek argumentuma épp $w - S^*$ argumentumával egyezik meg, valamint $l + mp > N$. Ezek közül elég sok helyen $d_{l+mp} = 1$ választással – legyenek ezek az 1-helyek –, az összes többi N-nél nagyobb koordinátában pedig $d_n = 0$-t rögzítve $\sum_{n=N+1}^\infty d_n\zeta_0^n$ argumentuma $w - S^*$ argumentumával egyezik meg, abszolút értéke pedig annál szigorúan nagyobb. Válasszunk most $0 < \lambda < 1$-et a következőknek megfelelően: $\zeta' = \lambda\zeta_0$ mellett $|\zeta' - \zeta_0| < \frac{\delta}{2}$, továbbá $\left|\sum_{n=N+1}^\infty d_n\zeta'^n\right| > |w - S^*|$, végezetül $\lambda^p > \frac{|w-S^*|-\frac{\varepsilon}{2}}{|w-S^*|+\frac{\varepsilon}{2}}$. Mindezt felhasználva a következő iterációt követve járhatunk el a bizonyítást befejezendő: ha

$$\left|\sum_{n=N+1}^\infty d_n\zeta'^n\right| > |w - S^*| + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{12}$$

   akkor (d_n)-et módosítsuk úgy, hogy az 1-helyeket eltoljuk p-vel. Ez $\sum_{n=N+1}^\infty d_n\zeta'^n$ argumentumát érintetlenül hagyja, az abszolút értékét pedig λ^p-vel szorozza. Mivel $\lambda < 1$, elég sok lépést követően (12) hamissá válik, s a λ választásából adódóan ekkor

$$|w - S^*| - \frac{\varepsilon}{2} < \left|\sum_{n=N+1}^\infty d_n\zeta'^n\right| \leq |w - S^*| + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

   Így mivel az argumentumok megegyeznek, ennek nyomán

$$|(w - S^*) - \sum_{n=N+1}^\infty d_n\zeta'^n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Ezt a fentiekkel összevetve

$$|(w - S_0) - \sum_{n=N+1}^\infty d_n\zeta'^n| < \varepsilon,$$

   azaz $|w - f_{(d_n)}(\zeta')| < \varepsilon$. Mivel a fenti távolságbecslésekből adódóan $|\zeta - \zeta'| < \delta$, ezzel készen vagyunk.

10. feladat. Legyen f egész együtthatós n-edfokú polinom és p prím, melyre f modulo p egy k-adfokú irreducibilis polinom (nyilván $k \leq n$). Lássuk be, hogy k osztja az f polinom $\mathbb{Q}$ feletti felbontási testének a fokát.

(Szabó Csaba, Zábrádi Gergely)

1. megoldás (kitűzők, vázlat). A Hensel-lemma miatt f-nek $\mathbb{Q}_p$ felett lesz egy k-adfokú irreducibilis tényezője. Tehát f $\mathbb{Q}_p$ feletti felbontási testének a foka valóban k többszöröse. Viszont a $\mathbb{Q}_p$ feletti Galois-csoport részcsoport a $\mathbb{Q}$ feletti Galois-csoportban, tehát megvan az oszthatóság.

Részletes megoldás: Először belátjuk, hogy k osztja f $\mathbb{Q}_p$ feletti K_p felbontási testének a $d_p = |K_p/\mathbb{Q}_p|$ fokát, ahol $\mathbb{Q}_p$ a p-adikus számok teste ($\mathbb{Z}_p$ a p-adikus egészek gyűrűjét jelöli, $\mathbb{F}_p$ pedig a a p elemű testet). Ehhez használjuk a Hensel-lemma következő formáját (a bizonyítás – többek között – megtalálható a http://www.cs.elte.hu/~zger/Jegyzetek/algszamjegyzet.pdf jegyzetben, 4.4.2. Tétel):

> **Tétel.** *Legyen $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ egy primitív polinom (azaz nem mindegyik együttható osztható p-vel), és tegyük fel, hogy modulo p f felbomlik $\overline{f}(x) = \overline{g}(x)\overline{h}(x)$ szorzatra úgy, hogy a $\overline{g}, \overline{h} \in \mathbb{F}_p[x]$ polinomok relatív prímek. Ekkor az f polinom is felbomlik $\mathbb{Z}_p$ felett $f(x) = g(x)h(x)$ szorzatra, melyre $g(x) \equiv \overline{g}(x) \pmod p$, $h(x) \equiv \overline{h}(x) \pmod p$, és $\deg(g) = \deg(\overline{g})$.*

Ezt alkalmazzuk abban a szituációban, hogy $\overline{g} = \overline{f}$ az f modulo p redukciója és $\overline{h} = 1$. A Hensel-lemma feltételei nyilván teljesülnek, tehát kapunk egy $g(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ k-adfokú polinomot, mely osztója f-nek ($\mathbb{Z}_p$ fölött). Vegyük észre, hogy $g(x)$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött, hiszen ha felbomolna, akkor a felbontást modulo p redukálva kapnánk $\overline{g} = \overline{f}$-nek egy felbontását, ami a feladat feltevése szerint irreducibilis. Továbbá a Gauß-lemma szerint g a $\mathbb{Q}_p$ test fölött is irreducibilis ($\mathbb{Z}_p$ egy főideálgyűrű). Tehát g egy gyökének adjungálása $\mathbb{Q}_p$-hez egy k-adfokú bővítés, mely résztest K_p-ben, speciálisan a fokszámtétel miatt $k \mid d_p$.

Legyen K a $\mathbb{Q}$ feletti felbontási test, és $d := |K/\mathbb{Q}|$ a foka. Feltehetjük, hogy $K \leq K_p$, hiszen a felbontási testet vehetjük egy tetszőleges algebrailag zárt test résztestének, speciálisan $(K_p \leq)\overline{\mathbb{Q}_p}$ résztestének is. Belátjuk, hogy $d_p \mid d$, amit $k \mid d_p$-vel kombinálva következik a feladat állítása. Mivel $K/\mathbb{Q}$ egy véges szeparábilis bővítés ($\mathbb{Q}$ tökéletes), ezért $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ alkalmas $\alpha \in K$ elemre és legyen $m_\alpha(x) \in \mathbb{Q}[x]$ az α minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött (speciálisan $d = \deg(m_\alpha)$). Ekkor $\alpha \in K \leq K_p$ miatt $\mathbb{Q}_p(\alpha) \leq K_p$. Viszont $K = \mathbb{Q}(\alpha) \leq \mathbb{Q}_p(\alpha)$ miatt f gyöktényezők szorzatára bomlik $\mathbb{Q}_p(\alpha)$ felett, azaz f felbontási teste benne van $\mathbb{Q}_p(\alpha)$-ban, így $K_p = \mathbb{Q}_p(\alpha)$. Legyen most $G := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, illetve $G_p := \mathrm{Gal}(K_p/\mathbb{Q}_p)$. Megadunk egy injektív $\varphi\colon G_p \to G$ csoporthomomorfizmust. Ha $g \in G_p$ tetszőleges, akkor $g\alpha$ is gyöke lesz m_α-nak, speciálisan egyértelműen létezik egy olyan $\varphi(g) \in G$ elem, ami α-t $g\alpha$-ba viszi. Az egyértelműség miatt φ csoporthomomorfizmus lesz, az injektivitás pedig abból következik, hogy ha egy $g \in G_p$ elem fixen hagyja α-t, akkor az egész $\mathbb{Q}_p(\alpha)$ testet fixen hagyja. Speciálisan $d_p = |G_p| \mid |G| = d$.

Megjegyzés. A fenti megoldás második részében nem használtuk ki a p-adikus számok testének semmilyen tulajdonságát, lecserélhetnénk azt tetszőleges 0-karakterisztikájú testre. Precízebben a fenti bizonyításból a következő állítás jön ki: Ha $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ és F tetszőleges 0-karakterisztikájú test, akkor f F feletti felbontási testének a foka osztja f $\mathbb{Q}$ feletti felbontási testének a fokát. Vegyük észre, hogy ugyanez egy α algebrai szám fokára nem igaz, fontos, hogy felbontási testről (Galois bővítésről) van szó: Pl. ha ε egy primitív harmadik egységgyök, akkor $\sqrt[3]{2}\varepsilon$ foka $\mathbb{Q}$ felett 3, viszont $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ fölött 2, ami nem osztója a 3-nak.

2. megoldás. Borbényi Márton dolgozata alapján Jelöljük K-val az f polinom $\mathbb{Q}$ fölötti felbontási testét, $\mathcal{O}$-val a K-beli algebrai egészek gyűrűjét, és legyen $G := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ a Galois-csoport. Ekkor $\mathcal{O}$ egy Dedekind gyűrű, ezért minden $\mathcal{O}$-beli ideál (sorrendtől eltekintve) egyértelműen írható prímideálok szorzataként. Speciálisan legyen

$$p\mathcal{O} = P_1^{e_1} \cdots P_r^{e_r}$$

a p által generált ideál prímfelbontása, ahol $P_1, \ldots, P_r \lhd \mathcal{O}$ páronként különböző prímideálok és $e_1, \ldots, e_r$ pozitív egészek. Hilbert egy klasszikus tétele (pl. 3.9.1. Áll. a https://zabradi.web.elte.

hu/Jegyzetek/algszamjegyzet.pdf jegyzetben) szerint a G csoport tranzitívan hat a $\{P_1, \dots, P_r\}$ halmazon, speciálisan $e := e_1 = \dots = e_r$ és $t_1 = \dots = t_r$, ahol t_i jelöli a $\mathcal{O}/P_i$ bővítés fokát $\mathbb{F}_p$ fölött (azaz $|\mathcal{O}/P_i| = p^{t_i}$). Ezt a „fundamentális egyenlettel” (3.8.3. Áll.) kombinálva $|K:\mathbb{Q}| = \sum_{i=1}^{r} e_i t_i = et_1 r$, azaz elég belátni, hogy $k \mid t_1$. Ha az f polinomnak akár egyetlen $\mathcal{O}$-beli gyöke is lenne, akkor készen lennénk: ugyanis ha $\alpha \in \mathcal{O}$ egy gyök, akkor az $f(\alpha) = 0$ egyenletet modulo P_1 redukálva $\overline{\alpha} := \alpha + P_1$ egy $\mathcal{O}/P_1$-beli gyöke lenne $\overline{f}(x) \in \mathbb{F}_p[x]$-nek (ami az f redukciója mod p) és így $k = \deg(\overline{f}) \mid t_1$, hiszen $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött. De f főegyütthatója $k < n$ esetén nem 1 (hanem p-vel osztható), ezért a gyökei nem feltétlenül algebrai egészek.

Tekintsük a $h(x) = x^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ polinomot; ennek együtthatói ugyanazok, mint f-é, csak fordított sorrendben, gyökei pedig – jelöljük őket $\alpha_1, \dots, \alpha_n$-nel – f gyökeinek inverzei. A $h(x)$ polinom főegyütthatója az f konstans tagja, ami $k > 1$ esetén nem lehet p-vel osztható, mert az irreducibilis f modulo p polinom konstans tagja nem 0. Így az α_j gyökök nevezői nem oszthatók p-vel, tehát definiálhatók a képeik $\mathcal{O}/P_i$-ben; legyenek ezek $\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_n$. Ezek mind gyökei $h(x)$ modulo p redukciójának, $\overline{h}(x)$-nek, ami egy irreducibilis k-adfokú polinom – legyen ez $\overline{g}(x)$ – szorzata x^{n-k}-val. Nem lehet az összes $\overline{\alpha}_j$ nulla, hiszen akkor $\overline{h}$ együtthatói, melyek ezen $\overline{\alpha}_j$-k szimmetrikus polinomjai, mind nullák lennének a főegyüttható kivételével, ami $k = 0$-et jelentene. Tehát legalább az egyik $\overline{\alpha}_j$ gyöke $\overline{g}$-nek, így az irreducibilis $\overline{g}$ felbomlik $\mathbb{F}_{p^{t_i}}$-ben, tehát $k \mid t_1$, és ezzel készen vagyunk.

11. feladat. Legyen $p > 1$ valós szám, $h\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ folytonos függvény és $Y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy sima vektormező, melyre $\operatorname{div} Y = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(|x|)|x|^p \le \int_{\mathbb{R}^n} h(|x|)|x + Y(x)|^p.$$

(Balogh M. Zoltán)

Megoldás. Elég belátni, hogy tetszőleges $r > 0$ esetén

$$\int_{S^{n-1}(r)} r^p \mathrm{d}\mu(x) \le \int_{S^{n-1}(r)} |x + Y(x)|^p \mathrm{d}\mu(x), \tag{14}$$

ahol $S^{n-1}(r)$ jelöli az $\mathbb{R}^n$-beli origó körüli r sugarú euklideszi gömb felületét, és μ az $S^{n-1}(r)$-en vett felületi mértéket, hiszen ha már tudjuk a (14) egyenlőtlenséget, akkor tetszőleges $h\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ folytonos függvénnyel „összeintegrálva” adódik a feladat állítása.

Legyen minden $t \in [0,1]$ esetén

$$f(t) = \int_{S^{n-1}(r)} |x + tY(x)|^p \mathrm{d}\mu(x).$$

Mivel minden egyes $x \in S^{n-1}(r)$ esetén a $t \mapsto |x + tY(x)|^p$ függvény konvex, ezért f is konvex. Vizsgáljuk meg f deriváltját 0-ban:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \int_{S^{n-1}(r)} \left.\frac{\partial |x + tY(x)|^p}{\partial t}\right|_{t=0} \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{S^{n-1}(r)} \left.\frac{\partial \left(|x|^2 + 2t\langle x, Y(x)\rangle + t^2|Y(x)|^2\right)^{\frac{p}{2}}}{\partial t}\right|_{t=0} \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{S^{n-1}(r)} pr^{p-2}\langle x, Y(x)\rangle \mathrm{d}\mu(x) \overset{(\dagger)}{=} \int_{D^n(r)} pr^{p-1} \operatorname{div} Y(z) \mathrm{d}\mu(z) = 0, \end{aligned}$$

ahol $D^n(r)$ jelöli az $\mathbb{R}^n$-beli origó körüli r sugarú euklideszi gömb belsejét és a $(\dagger)$ egyenlőség a divergenciatétel miatt teljesül. Tehát f egy monoton növő függvény és így $f(1) \ge f(0)$, amivel beláttuk a feladat állítását.