Jelentés a 2017. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 2017. október 20. és október 30. között rendezte meg a 2017. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, valamint 2017-ben egyetemet vagy főiskolát végzettek vehettek részt.

A Bolyai János Matematikai Társulat a verseny megrendezésére a következő bizottságot kérte fel: Páles Zsolt (elnök), Nagy Ábris és Varga Nóra (titkárok), Baran Sándor, Bérczes Attila, Bessenyei Mihály, Boros Zoltán, Daróczy Zoltán, Fazekas István, Figula Ágota, Gaál István, Gát György, Gselmann Eszter, Győry Kálmán, Hajdu Lajos, Kozma László, Losonczi László, Lovas Rezső, Maksa Gyula, Muzsnay Zoltán, Nagy Gergő, Pethő Attila, Pink István, Pongrácz András, Pintér Ákos, Sztrik János, Tamássy Lajos, Tengely Szabolcs, Terdik György, Tran Quoc Binh és Vincze Csaba.

A versenybizottság 10 feladatot tűzött ki. A feladatokat sorrendben Pach János, Tardos Gábor és Andrej Kupavszkij; Pongrácz András; Tengely Szabolcs és Pongrácz András; Győry Kálmán és Hajdu Lajos; Totik Vilmos; Páles Zsolt; Csirmaz László; Gát György; Totik Vilmos valamint Pap Gyula bocsátotta a bizottság rendelkezésére.

A versenyre 12 versenyző 67 megoldást nyújtott be, amelyek közül 34 volt hibátlan. Az alábbi táblázatban pontok jelzik, hogy a versenyzők mely feladatokra nyújtottak be megoldásokat.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ágoston Péter			•			•	•	•	•	
Ágoston Tamás	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
Csépai András	•						•			
Csernák Tamás	•	•					•	•	•	•
Fehér Zsombor	•	•	•		•		•	•	•	•
Forman Balázs Attila	•									
Grünwald Richárd						•				
Hevesi Bence					•					
Kúsz Ágnes Tímea	•	•	•	•	•	•		•	•	•
Maga Balázs	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
Markó Ádám					•	•	•	•	•	•
Szőke Tamás		•	•	•	•		•	•	•	•

A megoldások értékelése után a versenybizottság a következő döntést hozta.

I. díjban részesül **Maga Balázs**, az ELTE-TTK elsőéves Matematikus MSc hallgatója

II. díjban részesül **Ágoston Tamás**, az ELTE-TTK elsőéves Ph.D. hallgatója

III. díjban részesül **Csernák Tamás**, az ELTE-TTK elsőéves Matematikus MSc hallgatója; **Fehér Zsombor**, az ELTE-TTK harmadéves Matematikus BSc hallgatója és **Szőke Tamás**, az ELTE-TTK harmadéves Matematikus BSc hallgatója

Dicséretben részesül **Kúsz Ágnes Tímea**, a University of Bonn elsőéves Matematikus MSc hallgatója.

Indoklás

Maga Balázs 10 feladatra nyújtott be megoldást; a $2.$ feladatra adott megoldása kiemelkedő, az $1., 3., 6., 7., 8., 9.$ és $10.$ feladatokra adott megoldása hibátlan és teljes; a $4.$ és $5.$ feladatokra adott megoldása hiányos, de javítható.

Ágoston Tamás 10 feladatra nyújtott be megoldást; a $2.$ és $5.$ feladatokra adott megoldása kiemelkedő, a $3., 8., 9.$ és $10.$ feladatokra adott megoldása hibátlan és teljes; a $4.$ és $7.$ feladatokra benyújtott megoldása lényegében helyes, az $1.$ és $6.$ feladatok esetében részeredményeket ért el.

Csernák Tamás 6 feladatra nyújtott be megoldást; a $8.$ feladatra adott megoldása kiemelkedő, a $2., 7., 9.$ és $10.$ feladatokra érkezett megoldása hibátlan és teljes, az $1.$ feladatra adott megoldás lényegében helyes.

Fehér Zsombor 8 feladatra nyújtott be megoldást; az $1.$ feladatra adott megoldása kiemelkedő, a $3., 5., 8., 9.$ és $10.$ feladatokra adott megoldása hibátlan és teljes, a $7.$ feladatra adott megoldása lényegében helyes és a $2.$ feladatban részeredményeket ért el.

Szőke Tamás 8 feladatra nyújtott be megoldást; a $3., 5., 7.$ és $9.$ feladatokra adott megoldása hibátlan és teljes, a $4., 8.$ és $10.$ feladatok megoldása lényegében helyes, a $2.$ feladatra adott megoldása erősen hiányos, de javítható.

Kúsz Ágnes Tímea 9 feladatra nyújtott be megoldást; a $3., 8.$ és $9.$ feladatokra érkezett megoldás hibátlan és teljes, az $1.$ feladatra adott megoldása lényegében helyes, a $2.$ feladatra adott megoldása erősen hiányos, de javítható és részmegoldásokat ért el a $4.$ és $6.$ feladatokban.

A feladatok és megoldásaik

1. feladat (Pach János, Tardos Gábor és Andrej Kupavszkij). Fel lehet-e bontani egy négyzetet véges sok háromszögre úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös oldala? (A háromszögeknek nincs közös belső pontjuk, és uniójuk a négyzet.)

Megoldás (Fehér Zsombor).

Tegyük fel, hogy van ilyen háromszögelés. Vegyük a felbontáshoz tartozó síkgráfot, azaz melynek csúcsai a háromszögek csúcsai, élei pedig a háromszögek oldalainak azon darabjai, melyek közvetlenül szomszédos csúcsokat kötnek össze. Legyen a háromszögek száma l, a gráf csúcsainak és éleinek száma c és e. Ekkor Euler tétele szerint

$$c - e + l = 1.$$

Számoljuk most össze a szögeket: az l darab háromszög belső szögeinek összege $l\pi$. Másrészt, minden csúcsnál legalább π ezen szögek összege, és a négyzet 4 csúcsánál csak $\pi/2$, ezért

$$\begin{aligned} l\pi &\geq (c-4)\cdot\pi + 4\cdot\frac{\pi}{2}, \\ l + 2 &\geq c. \end{aligned}$$

Számoljuk össze az oldalakat, ehhez írjunk a gráf éleire számokat a következőképpen: ha egy háromszögoldal a gráfban n részre van osztva, akkor mindegyik darabra írjunk $1/n$-et, és ezt tegyük meg mindegyik háromszögre. Ekkor összesen $3l$-et írtunk az élekre. Másrészt, mivel a háromszögeknek nincsen közös oldala, egyik élre sem írhattunk összesen 2-t. Így mindegyik élen a ráírt számok összege legfeljebb $3/2$, és a négyzet oldalain legalább 4 élre csak 1-et írtunk, így

$$3l \le (e-4) \cdot \frac{3}{2} + 4,$$
$$2l + \frac{4}{3} \le e.$$

Mindezeket összevetve:

$$2l + \frac{7}{3} \le 1 + e = c + l \le 2l + 2,$$

ami ellentmondás.

2. feladat (Pongrácz András). Bizonyítsuk be, hogy egy K test pontosan akkor rendezhető, ha minden $A \in M_n(K)$ szimmetrikus mátrix diagonalizálható K algebrai lezártja felett. (Azaz minden $n \in \mathbb{N}$-re és $A \in M_n(K)$ szimmetrikus mátrixra létezik olyan $S \in GL_n(\overline{K})$, amire $S^{-1}AS$ diagonális.)

Megoldás (Ágoston Tamás és Maga Balázs).

Első megoldás (Ágoston Tamás).

Először is belátjuk, hogy egy ilyen K test esetén K rendezhető. Jól ismert tény, hogy egy test pontosan akkor nem rendezhető, ha a 0 előáll, mint nem 0 négyzetek összege, azaz valamilyen $n > 0$ egészre

$$0 = a_1^2 + \cdots + a_n^2,$$

ahol $a_1, \ldots, a_n \neq 0$ a K-ban vannak. (Speciálisan ha $\operatorname{char} K = p > 0$, akkor $n = p, a_1 = \cdots = a_p = 1$ választással kapunk ilyen alakot.)

(Megjegyzés: Leosztva a_n^2-tel és átrendezve az egyenletet azt az alternatív megfogalmazást kapjuk, hogy K pontosan akkor nem rendezhető, ha

$$-1 = b_1^2 + \cdots + b_k^2$$

valamilyen $b_1, \ldots, b_k \in K$ elemekre. Ezen állítás bizonyítása megtalálható például az A. R. Rajwade: *Squares* könyv 212. oldalán, 15.1. Tételként.)

Legyen tehát most K nem rendezhető, és a fönti a_i-khez tekintsük az alábbi mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

E mátrix karakterisztikus polinomja

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_{n+1} - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ -a_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}.$$

Kérdés, hogy itt hogyan kaphatunk nem 0 kifejtési tagokat. Ha ez első sorból a λ elemet választjuk, akkor a hozzá tartozó részmátrix a λI_n skalármátrix, azaz így egyedül a λ^{n+1} nem 0 taghoz jutunk.

Ha viszont $i \geq 1$-re az első sor $(i+1)$-edik elemét, a $-a_i$-t választjuk, akkor az $(i+1)$-edik sorból csak az első elemet, a $-a_i$-t tudjuk kiválasztani mint nem 0 elemet. Ezután pedig már minden $j \neq 1, i+1$-re a j-edik oszlopból csakis a j-edik elemet, a λ-t választhatjuk. Az ezen kifejtési taghoz tartozó permutáció az 1. és $(i+1)$. elem transzpozíciója, vagyis előjele -1.

Tehát

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \lambda^{n-1} = \lambda^{n+1}.$$

Mármost eszerint A egyedüli sajátértéke (a K bármilyen bővítésében) a 0 lehet, azaz ha diagonális alakja a 0 mátrix kéne, hogy legyen, ami nyilván nem lehet, mert $A \neq 0$. Így A nem diagonalizálható, bár szimmetrikus.

Most lássuk be a másik irányú állítást. Legyen K rendezhető test, rögzítsünk egy rendezést. Ismeretes, hogy létezik egyértelműen ennek egy legbővebb algebrai, rendezett bővítése, melynek rendezése kiterjeszti a K-n lévőt. Ez az L egy úgynevezett valószárt test. Egy valószárt test teljesíti, hogy minden pozitív elemnek létezik négyzetgyöke, és minden páratlan fokú polinomnak van benne gyöke. Sőt, ez a két tulajdonság ekvivalens azzal, hogy egy rendezett test valószárt. (Ezen állítások úgyszintén megtalálhatók az A. R. Rajwade:*Squares* könyv 15. fejezetében.

Végezetül Tarski egy tétele (lásd A. Tarski: *A decision method for elementary algebra and geometry*) szerint a rendezett test axiómáihoz hozzávéve az előbbi két tulajdonságot:

$$\forall a \left(a > 0 \implies \exists x(x^2 = a)\right)$$

és minden n páratlan számra a

$$\forall a_0 \forall a_1 \cdots \forall a_n \left(a_n \neq 0 \implies \exists x(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0)\right)$$

formulákat, a valószárt testek így kapott elmélete teljes. Speciálisan bármely két modellje elemien ekvivalens, azaz L elemien ekvivalens $\mathbb{R}$-rel.

Mármost minden n esetén az az állítás, hogy minden L fölötti $n \times n$-es szimmetrikus mátrix diagonalizálható L fölött, elsőrendű formulával kifejezhető. Következésképpen ha $L = \mathbb{R}$-re igaz (márpedig ezt valóban tudjuk), akkor tetszőleges L valószárt testre is. Így viszont speciálisan minden $M_n(K)$-beli szimmetrikus mátrix diagonalizálható L fölött, így persze $\overline{K} \geq L$ fölött is. Ezzel a másik irányt is beláttuk.

Második megoldás (Maga Balázs).

Először tegyük fel, hogy minden K feletti szimmetrikus mátrix diagonalizálható $\overline{K}$ felett. Állítom, hogy ekkor a -1 nem áll elő négyzetek összegeként. Ez elegendő: az Artin–Schreier elmélet eredményei alapján egy test pontosan akkor rendezhető, ha a -1 nem áll elő benne négyzetek összegeként. Indirekt tegyük fel, hogy mégis. Ekkor $a_1 = 1$-re és valamely $a_2, a_3 ..., a_n \in K$ elemekre $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$. Tekintsük a következő mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \dots & a_2a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_n^2 \end{bmatrix}.$$

Azaz az (i, j) helyre az $a_i a_j$ kerül. Ekkor az A^2 mátrix (s, t) helyre kerülő eleme definíció alapján:

$$\sum_{i=1}^{n} a_s a_i^2 a_t = a_s a_t \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0.$$

Azaz A^2 nullmátrix. De ekkor ha $S^{-1}AS$ diagonális lenne, az ő négyzete is $0 = S^{-1}A^2S$, azaz $S^{-1}AS$ nullmátrix. Így A is, ami ellentmond $a_1 = 1$-nek. Ezzel az egyik irány bizonyítását befejeztük.

Most tegyük fel, hogy K rendezhető. Ekkor K formálisan valós, azaz a -1 nem négyzetek összege benne. (Ebben a bekezdésben az alábbi címen fellelhető eredmények 40-42. oldalára hivatkozunk: http://homepages.math.uic.edu/ marker/orsay/orsay3.pdf.) Vegyük a K test F valós lezártját, azaz K olyan algebrai bővítését, mely formálisan valós, nincs valódi formálisan valós bővítése, s amelyre K rendezése egyértelműen kiterjed. (Corollary 7.12). F tehát egy valós zárt test.
Mivel F valós zárt, nyilván valós zárt testek metszete. Így David Mornhinweg, Daniel B. Shapiro, és K. G. Valente: *The Principal Axis Theorem over Arbitrary Fields* cikkének Theorem 4-e alapján (The American Mathematical Monthly, Vol. 100, No. 8 (Oct., 1993), pp. 749-754) tetszőleges F feletti szimmetrikus mátrix diagonalizálható F felett. Speciálisan $K \subseteq F \subseteq \overline{K}$ miatt tetszőleges K feletti szimmetrikus mátrix diagonalizálható $\overline{K}$ felett. Ezt akartuk megmutatni.

3. feladat (Tengely Szabolcs és Pongrácz András). Egy α algebrai egészre definiáljuk α pozitív fokát: $\deg^+(\alpha)$ legyen az a minimális $k \in \mathbb{N}$, amelyre van olyan nemnegatív egészekből álló $k \times k$-as mátrix, melynek α sajátértéke. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén minden n-edfokú α algebrai egészre $\deg^+(\alpha) \leq 2n$.

Megoldás (Tengely Szabolcs és Pongrácz András).

Ha α n-edfokú algebrai egész, akkor legyen A az a blokkmátrix, mely két $n \times n$-es blokkból áll, és mindkettő α kísérőmátrixa. (A kísérőmátrix az az $n \times n$-es mátrix, melynek a főátlója alatt minden elem 1-es, a jobb szélső oszlopában fentről lefelé α minimálpolinomjának az együtthatói szerepelnek ellentétetes előjellel, index szerint növekvő sorrendben, és minden más eleme 0.) Ha $\underline{u}$ a kísérőmátrix egy sajátvektora α sajátértékkel, akkor legyen $\underline{v}$ az a $2n$-hosszú vektor, melynek első fele $\underline{u}$, második fele $-\underline{u}$. Ekkor a $\underline{v}$ vektor sajátvektora $A + m \cdot E$-nek α sajátértékkel, ahol E a csupa-1 mátrix. Elég nagy m-et választva $A + m \cdot E$ nemnegatív; ezzel $\deg^+(\alpha) \leq 2n$ bizonyítása kész.

4. feladat (Győry Kálmán és Hajdu Lajos). Legyen K egy, a racionális számtesttől és a másodfokú imaginárius számtestektől különböző algebrai számtest. Jelölje $\mathcal{L}(K)$ azon pozitív $n \geq 3$ egészek halmazát, melyekre találhatók olyan K-beli $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ egységek, hogy

$$\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = 0,$$

de $\sum_{i \in I} \varepsilon_i \neq 0$ az $\{1, \ldots, n\}$ bármely nemüres, valódi I részhalmaza esetén. Igazoljuk, hogy $\mathcal{L}(K)$ végtelen sok elemet tartalmaz, és legkisebb eleme K fokszáma és diszkriminánsa segítségével felülről korlátozható! Mutassuk meg továbbá, hogy végtelen sok K esetén $\mathcal{L}(K)$ végtelen sok páros és végtelen sok páratlan elemet tartalmaz!

Megoldás (Győry Kálmán és Hajdu Lajos).

Legyen ε egy tetszőleges K-beli egység amely nem egységgyök (Dirichlet tétele alapján ilyen létezik), és legyen $f_\varepsilon(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k$ az ε definiáló főpolinomja. (Nyilván $a_k = \pm 1$.) Vegyük észre, hogy ekkor $L(\varepsilon) = 1 + |a_1| + \cdots + |a_{k-1}| + |a_k|$ jelöléssel egyrészt $L(\varepsilon) > 2$, másrészt $L(\varepsilon) \in \mathcal{L}(K)$. Mivel bármely C konstans esetén $C > L(\varepsilon)$ csak véges sok ε esetén teljesülhet, viszont K végtelen sok egységet tartalmaz, így $|\mathcal{L}(K)| = \infty$. Másrészt régóta ismert (lásd pl. T. N. Shorey, R. Tijdeman: *Exponential Diophantine Equations* bevezető A fejezetét, amely történeti utalásokat is tartalmaz), hogy bármely (adott típusú) K test tartalmaz olyan ε (egységgyököktől különböző) egységet, amelyre $L(\varepsilon)$ a K fokszáma és diszkriminánsa segítségével felülről korlátozható. Így ugyanez igaz $\mathcal{L}(K)$ legkisebb elemére is.

A második rész bizonyításához legyen p egy páratlan prím, és legyen $K_p = \mathbb{Q}(\varepsilon_p)$, ahol ε_p a $g_p(x) = x^2 + (p+2)x + 1$ polinom egy gyöke. Világos, hogy $g_p(x)$ irreducibilis, K_p egy valós kvadratikus számtest, és $K_p = \mathbb{Q}(\sqrt{p(p+4)})$ miatt a K_p számtestek páronként különbözőek. (Az utóbbi összefüggés abból adódik, hogy ha $q > p$ prím, akkor $p(p+4)$ és $q(q+4)$ négyzetmentes része nyilván különböző.) Legyen most η egy tetszőleges K_p-beli egység, $x^2 + bx + 1$ definiáló főpolinommal. Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor η^2 definiáló főpolinomja $x^2 + (2 - b^2)x + 1$, η^3 definiáló főpolinomja pedig $x^2 + (b^3 - 3b)x + 1$. (Ez rögtön adódik az

$$x^4 + (2 - b^2)x^2 + 1 = (x^2 + bx + 1)(x^2 - bx + 1),$$

$$x^6 + (b^3 - 3b)x^3 + 1 = (x^2 + bx + 1)(x^4 - bx^3 + (b^2 - 1)x^2 - bx + 1)$$

összefüggésekből.) Így indukcióval könnyen adódik, hogy bármely $k \geq 0$ esetén $L(\varepsilon_p^{2^k})$ páratlan, míg $L(\varepsilon_p^{3\cdot 2^k})$ páros. (Ehhez csak azt kell észrevenni, hogy egyrészt $L(\varepsilon_p)$ páratlan, másrészt a fentiek alapján ha $L(\eta)$ páratlan akkor $L(\eta^2)$ is páratlan, $L(\eta^3)$ viszont páros.) Ez pedig (a korábbiakat is figyelembe véve) állításunkat igazolja.

5. feladat (Totik Vilmos). Egy legalább elsőfokú p polinomra legyen $H_p = \{z \mid |p(z)| = 1\}$. Igazoljuk, hogy ha $H_p = H_q$ valamely p, q polinomokra, akkor van olyan r polinom, hogy $p = r^m$ és $q = \xi \cdot r^n$ valamely m, n pozitív, egész számokkal és $|\xi| = 1$ konstanssal.

Megoldás (Ágoston Tamás).

Legyen $H = H_p = H_q$, és $\deg p = m, \deg q = n$. Nyilván $H \neq \emptyset$ zárt, hiszen p, q legalább elsőfokúak, vagyis minden komplex értéket fölvesznek. Továbbá mivel p és q polinomok, így ∞-ben ∞-be tartanak, tehát H korlátos. Továbbá speciálisan H szeparálja ∞-t mind p, mind q gyökeitől. Legyen most $m' = \dfrac{m}{(m,n)}$ és $n' = \frac{n}{(m,n)}$, és tekintsük az $f(z) = \dfrac{p(z)^{n'}}{q(z)^{m'}}$ racionális törtfüggvényt. Ekkor $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, azaz f meromorf $\mathbb{C}$-n (sőt $f \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$, ahol $\hat{\mathbb{C}}$ a Riemann-gömb), és $\deg f = m\frac{n}{(m,n)} - n\frac{m}{(m,n)} = [m,n] - [m,n] = 0$, tehát ∞-ben nem 0 értékkel megszüntethető szingularitása van. Azaz f-et mint a $\hat{\mathbb{C}}$-on értelmezett meromorf függvényt tekintve az összes gyöke és pólusa a p és q gyökei.

Ugyanakkor $|f|\Big|_H = \dfrac{\left(|p|\Big|_H\right)^{n'}}{\left(|q|\Big|_H\right)^{m'}} \equiv 1$, és H szeparálja ∞-t ezen gyököktől, így $\hat{\mathbb{C}} \setminus H$-nak a ∞-t tartalmazó G összefüggőségi komponensén (G nemüres, összefüggő nyílt) f holomorf, határán pedig $|f|$ azonosan 1. Így a maximumelv miatt $|f|\Big|_{\overline{G}} \leq 1$, azaz $|f|$-nek van lokális minimuma G-ben. A minimumelv szerint ez vagy gyöke f-nek, vagy f konstans. Mivel tudjuk, hogy G-ben nincs gyöke se p-nek, se q-nak, ezért $f|_G \equiv \zeta \in \mathbb{C}$. A G határán pedig $|f| = 1$, így $|\zeta| = 1$.

(A szokásos, $\mathbb{C}$-n értelmezett függvényekre érvényes minimum- és maximumelv itt közvetlenül a $g(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ függvényre alkalmazható, mely G-nek a $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, z \mapsto \dfrac{1}{z}$ diffeomorfizmus általi képén holomorf.)

Továbbá $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ nemüres nyílt, így persze az egész $\hat{\mathbb{C}}$-n konstans az f, vagyis

$$p^{n'} = \zeta q^{m'}. \tag{1}$$

Így speciálisan $p^{n'}$-ben minden gyök multiplicitása osztható m'-vel, míg $q^{m'}$-ban n'-vel. Viszont az m', n' értékek választása miatt $(m', n') = 1$, így valójában p-ben oszthatók a multiplicitások m'-vel, és q-ban n'-vel. Azaz

$$p(z) = r_1(z)^{m'}, \quad q(z) = r_2(z)^{n'}.$$

Mármost (1) miatt

$$r_1^{m'n'} = \zeta r_2^{m'n'},$$

vagyis $r_2 = \eta r_1$, ahol $\eta^{m'n'} = \zeta$, speciálisan $|\eta| = 1$. Tehát $r = r_1$ és $\xi = \eta^{n'}$ választással (ekkor persze $|\xi| = 1$)

$$p = r_1^{m'} = r^{m'}, \quad q = r_2^{n'} = (\eta r_1)^{n'} = \xi r^{n'}.$$

Márpedig éppen ezt akartuk belátni.

6. feladat (Páles Zsolt). Legyenek I és J intervallumok, $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő és folytonos függvények, továbbá $\Phi, \Psi : J \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Tegyük fel, hogy $\varphi(x)+\psi(x) = x$ és $\Phi(u) + \Psi(u) = u$ teljesül minden $x \in I$, illetve $u \in J$ esetén. Legyen $f : I \to J$ folytonos megoldása a

$$f\big(\varphi(x) + \psi(y)\big) \leq \Phi(f(x)) + \Psi(f(y)) \qquad (x, y \in I)$$

függvényegyenlőtlenségnek. Mutassuk meg, hogy ekkor $\Phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ és $\Psi \circ f \circ \psi^{-1}$ konvex függvények.

Megoldás (Páles Zsolt).

A megoldásbeli sorozatok konstrukciójához szükségünk lesz az alábbi lemmára.

Lemma. *A feladat jelölései és feltételei mellett bármely $a, b \in I$, $a < b$ esetén létezik olyan $a < u < v < b$, hogy*

$$u = \varphi(a) + \psi(v), \qquad v = \varphi(b) + \psi(u).$$

A Lemma bizonyítása. Értelmezzük a $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt a

$$g(u) = \varphi(a) + \psi(\varphi(b) + \psi(u))$$

képlettel. Ekkor $u \in [a, b]$ esetén a φ és ψ függvények szigorú monotonitása miatt

$$a = \varphi(a) + \psi(\varphi(a) + \psi(a)) < \varphi(a) + \psi(\varphi(b) + \psi(u)) < \varphi(b) + \psi(\varphi(b) + \psi(b)) = b,$$

tehát g az $[a, b]$ intervallumot (a, b)-be képezi. Így g folytonossága miatt g-nek létezik (a, b)-ben egy u fixpontja. Legyen $v := \varphi(b) + \psi(u)$. Ekkor $u = g(u) = \varphi(a) + \psi(v)$ is teljesül, továbbá

$$u = \varphi(u) + \psi(u) < \varphi(b) + \psi(u) = v = \varphi(b) + \psi(u) < \varphi(b) + \psi(b) = b,$$

tehát $u < v < b$ is fennáll.

A feladat megoldásához kimutatjuk, hogy $\Phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ Jensen-konvex a $\varphi(I)$ intervallumon.

Legyen $x, y \in I$, $x < y$ rögzített. Ekkor a Lemma alkalmazásával megkonstruálható egy olyan (x_n) szigorúan monoton növő és (y_n) szigorúan monoton csökkenő sorozatok, melyekre $x_1 := x$ és $y_1 := y$, továbbá $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) + \psi(y_{n+1}), \qquad y_{n+1} = \varphi(y_n) + \psi(x_{n+1}).$$

Mivel $x_n < y_n$ is teljesül, így (x_n) felülről, (y_n) pedig alulról korlátos sorozat. Ezért léteznek a $\lim x_n =: u$ és $\lim y_n =: v$ határértékek. A fenti egyenletekben végrehajtva az $n \to \infty$ határátmenetet kapjuk, hogy

$$u = \varphi(u) + \psi(v), \qquad v = \varphi(v) + \psi(u),$$

ahonnan φ és ψ szigorú monotonitása miatt $u = v$ következik. Most megmutatjuk, hogy

$$u = \varphi^{-1}\Big(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\Big).$$

A rekurziós definíció szerint:

$$\varphi(x_{n+1}) + \psi(x_{n+1}) = \varphi(x_n) + \psi(y_{n+1}), \qquad \varphi(y_{n+1}) + \psi(y_{n+1}) = \varphi(y_n) + \psi(x_{n+1}).$$

Ezeket összeadva nyerjük, hogy

$$\varphi(x_{n+1}) + \varphi(y_{n+1}) = \varphi(x_n) + \varphi(y_n).$$

Ezt az egyenlőséget iterálva, kapjuk, hogy $n \in \mathbb{N}$-re

$$\varphi(x_n) + \varphi(y_n) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

amiből az $n \to \infty$ határátmenetet elvégzése után

$$2\varphi(u) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

adódik, tehát valóban $u = \varphi^{-1}\big(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\big)$.

Térjünk most rá a tétel állításának igazolására. A függvényegyenlőtlenség teljesülése miatt

$$f(x_{n+1}) = f\big(M_{\varphi,\psi}(x_n, y_{n+1})\big) \le \Phi(f(x_n)) + \Phi(f(y_{n+1}))$$

és

$$f(y_{n+1}) = f\big(M_{\varphi,\psi}(y_n, x_{n+1})\big) \le \Phi(f(y_n)) + \Psi(f(x_{n+1})),$$

azaz

$$\Phi\big(f(x_{n+1})\big) + \Psi\big(f(x_{n+1})\big) \le \Phi\big(f(x_n)\big) + \Psi\big(f(y_{n+1})\big)$$

és

$$\Phi\big(f(y_{n+1})\big) + \Psi\big(f(y_{n+1})\big) \le \Phi\big(f(y_n)\big) + \Psi\big(f(x_{n+1})\big).$$

Ezeket összeadva:

$$\Phi\big(f(x_{n+1})\big) + \Phi\big(f(y_{n+1})\big) \le \Phi\big(f(x_n)\big) + \Phi\big(f(y_n)\big).$$

Ezt az egyenlőtlenséget iterálva nyerjük, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\Phi\big(f(x_n)\big) + \Phi\big(f(y_n)\big) \le \Phi\big(f(x)\big) + \Phi\big(f(y)\big).$$

Véve az $n \to \infty$ határátmenetet:

$$2\Phi\big(f(u)\big) \le \Phi\big(f(x)\big) + \Phi\big(f(y)\big),$$

amiből $u = \varphi^{-1}\big(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\big)$ figyelembe vételével adódik, hogy

$$\Phi \circ f\Big(\varphi^{-1}\Big(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\Big)\Big) \le \frac{\Phi \circ f(x) + \Phi \circ f(y)}{2} \qquad (x, y \in I).$$

Innen $\varphi(x) := s$ és $\varphi(y) := t$ helyettesítésekkel kapjuk, hogy $\Phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ Jensen-konvex a $\varphi(I)$ intervallumon. Ebből a folytonosság miatt ennek a függvénynek a konvexitása is következik.

A $\Psi \circ f \circ \psi^{-1}$ függvény a konvexitása hasonló módon igazolható.

7. feladat (Csirmaz László). Jellemezzük azokat a pozitív számokból álló növekvő (s_n) sorozatokat, amelyekhez létezik a valós számoknak olyan pozitív mértékű A részhalmaza, hogy minden $\frac{1}{n}$ hosszúságú I intervallum esetén $\lambda(A \cap I) < \frac{s_n}{n}$, ahol λ a Lebesgue-mértéket jelöli.

Megoldás (Elekes Márton).

Lebesgue sűrűségi tétele miatt $\lim s_n \ge 1$, megmutatjuk hogy ez elég is. Feltehető, hogy $s_1 \ge 1 - 1/4$, egyébként vesszük a konstrukciót a $[0, 1/2t]$ intervallumon, ahol t az az index, ahonnan $s_n > 1 - 1/4$. Legyen i_k olyan növő, hogy $n > 2^{i_k}$ esetén már $s_n > 1 - 2^{-k}$. Az egységszakasz diadikus 2^{-i_k} hosszú szakaszából kihagyjuk az utolsó 2^{-k}-ad részt. Ami megmarad, az pozitív mértékű, mert $\prod(1 - 2^{-i})$ nem nulla. A halmaz a diadikus intervallumokra jó, tetszőleges $1/n$ hosszú intervallum lefedhető két, $1/2n$-nél hosszabb diadikus intervallummal. Ami azt jelenti, hogy a konstrukciót a [0,1/2]-re elkészítve készen vagyunk.

Megjegyzés: Persze nem kell, hogy s_n növekvő legyen, ekkor $\liminf s_n \ge 1$ a feltétel.

8. feladat (Gát György). Legyen az $x \in [0,1)$ valós szám 2-es számrendszerbeli alakja: $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}$. (Ha x diadikusan racionális, azaz $x \in \left\{\frac{k}{2^n} : k, n \in \mathbb{Z}\right\}$, akkor a véges felírást válasszuk.) Legyen az $f_n : [0,1) \to \mathbb{Z}$ függvény a következő módon megadva:

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\sum_{i=0}^{j} x_i}.$$

Van-e olyan $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ függvény, amelyre $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \infty$ és

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 \varphi(|f_n(x)|)dx < \infty?$$

Megoldás (Csernák Tamás).

Fogalmazzuk át a feladatot a valószínűség számítás nyelvére: Legyen X a $[0,1)$ intervallumon vett egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A kérdés ekkor az, hogy van-e olyan $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, melyre $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$ és $\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(\varphi(f_n(X))\right) < \infty$ (a várható értékek supremuma).

Legyen X_i az X valószínűségi változó értékének 2-es számrendszerbeli i. jegye a feladatban definiált módon. Könnyen ellenőrizhető, hogy $X_0, X_1, \ldots$ független valószínűségi változók és $i \in \mathbb{N}$-re $P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 1/2$. Legyen $T_n = X_0 + X_1 + \ldots + X_n \pmod 2$. Rögzítsük le $T_0 = t_0, \ldots, T_{n-1} = t_{n-1}$ értékeket. A mod 2 összegből persze vissza tudjuk számolni ebben az esetben $X_0, \ldots, X_{n-1}$ értékét, legyen $X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}$. Ilyen feltételek mellett persze X_n pontosan egyik lehetséges értékére lesz $T_n = 0$, a másikra $T_n = 1$, tehát $t \in \{0,1\}$-re $P(T_n = t | T_0 = t_0, \ldots, T_{n-1} = t_{n-1}) = P(T_n = t | X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = 1/2$. Mivel T_n-nek a $T_0, \ldots, T_{n-1}$-re vonatkozó feltételes eloszlása nem függ $T_0, \ldots, T_{n-1}$ értékétől, ezért a T_n valószínűségi változók függetlenek és $P(T_n = 0) = P(T_n = 1) = 1/2$.

Legyen $Y_n = (-1)^{T_n} = (-1)^{\sum_{i=0}^{n} X_i}$. Ezek a valószínűségi változók is függetlenek lesznek, mert függetlenek függvényei és $P(Y_n = 1) = P(Y_n = -1) = 1/2$. A definíció szerint $f_n(X) = \sum_{j=1}^{n-1} Y_j$.

Az Y_n valószínűségi változók várható értéke 0, szórása 1, nézzük a normált összegüket: $Z_n = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} Y_j}{\sqrt{n}}$. A centrális határeloszlás-tétel alapján a Z_n valószínűségi változók eloszlásban tartanak az $N(0,1)$ standard normális eloszláshoz.

Jelölje $\Phi(x)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Az eloszlásbeli konvergencia miatt $\lim_{n\to\infty} P(Z_n > 1) = 1 - \Phi(1)$, ezért $\exists n_0, \forall n > n_0$, $P(Z_n > 1) > \frac{1-\Phi(1)}{2}$. Legyen $K \in R$, mivel $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$, $\exists a, \forall x > a$-ra $\varphi(x) > K$. Legyen $n \in N$ olyan, hogy $n > n_0$ és $\sqrt{n} > a$. Mivel $f_n(X) = Z_n \cdot \sqrt{n}$, ha $Z_n > 1$, akkor $f_n(X) > a$, ekkor persze $|f_n(X)| > a$, $\varphi(|f_n(X)|) > K$, így $P(\varphi(|f_n(X)|) > K) \geq P(Z_n > 1) > \frac{1-\Phi(1)}{2}$. Mivel $\varphi(|f_n(X)|)$ nemnegatív, ezért $E(\varphi(|f_n(X)|)) \geq K \cdot P(\varphi(|f_n(X)|) > K) > K \cdot \frac{1-\Phi(1)}{2}$, ezért $\sup_{n\in N} E\left(\varphi(f_n(X))\right) > K \cdot \frac{1-\Phi(1)}{2}$, de mivel K tetszőlegesen nagyra választható, és amivel meg van szorozva egy fix pozitív konstans, ezért $\sup_{n\in N} E\left(\varphi(f_n(X))\right) = \infty$. Mivel φ is tetszőlegesen választott függvény volt, a feladat feltételeinek megfelelő függvény nincs.

9. feladat (Totik Vilmos). Legyen N lineáris normált tér és M az N egy sűrű lineáris altere. Igazoljuk, hogy ha $L_1, \ldots, L_m$ véges sok lineáris funkcionál N-en, akkor minden $x \in N$-re van olyan x-hez konvergáló M-beli (y_n) sorozat, amelyre $L_j(y_n) = L_j(x)$ teljesül minden $j = 1, \ldots, m$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Megoldás (Totik Vilmos).

Az

$$U = \left\{(L_1(x), \ldots, L_m(x)) \,\middle|\, x \in N\right\}$$

az $\mathbb{R}^m$ (vagy a $\mathbb{C}$, ha a tér komplex normált tér) egy altere, amelyben

$$U^* = \left\{(L_1(x), \ldots, L_m(x)) \,\middle|\, x \in M\right\}$$

egy sűrű altér, ezért $U^* = U$. Legyen $k \in \mathbb{N}$ az U dimenziója, és legyenek $x_1, \dots, x_k \in M$ olyan elemek, amelyekre $(L_1(x_j), \dots, L_m(x_j))$ $j = 1, \dots, k$ az U egy bázisa. Mivel véges dimenzióban bármely két norma ekvivalens (így az x_j-k által kifeszített altérben $\max_{j=1}^m |L_j(x)| \sim \|x\|$), azt kapjuk, hogy van olyan C, hogy ha $(v_1, \dots, v_m) \in U$ tetszőleges, akkor van olyan z az $x_1, \dots, x_k$ által kifeszített altérben, amelyre $L_1(z), \dots, L_m(z) = (v_1, \dots, v_m)$ és $\|z\| \le C \max_{j=1}^m |v_j|$. Mármost, ha $X_n \to x$, $X_n \in M$ tetszőleges, akkor a $v_{n,j} = L_j(x) - L_j(X_n)$ választással kapunk olyan $z_n \in M$ fenti típusú elemeket, amelyekre $\|z_n\| \le C \max_{j=1}^m |L_j(x) - L_j(X_n)|$ és így $y_n = X_n + z_n$ megfelel minden feltételnek.

10. feladat (Pap Gyula). Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású véletlen változók $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ eloszlással. Legyenek Y_1, Y_2, Y_3 és Y_4 független, azonos eloszlású véletlen változók, ahol $Y_1 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{16^k}$. Abszolút folytonos eloszlású-e az $Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 + 8Y_4$, valamint az $Y_1 + 4Y_3$ véletlen változó?

Megoldás (Pap Gyula és Barczy Mátyás).

Első megoldás (Pap Gyula).

Az X_1 véletlen változó karakterisztikus függvénye

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}t}{2}}\big(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}t}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}t}{2}}\big) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}t}{2}}\cos\Big(\frac{t}{2}\Big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Nyilván a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{16^k}$ sor 1 valószínűséggel konvergens (hiszen a részletösszegek sorozata monoton növekvő és nem nagyobb, mint $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k} = \frac{1}{15}$), ezért eloszlásban is konvergens, így Lévy folytonossági tétele alapján Y_1 karakterisztikus függvénye

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tY_1}) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Bigg(\exp\Bigg\{\mathrm{i}t\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{16^k}\Bigg\}\Bigg) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}tX_k}{16^k}}\big)\\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\Big(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}t}{2\cdot 16^k}}\cos\Big(\frac{t}{2\cdot 16^k}\Big)\Big) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}t}{30}}\prod_{k=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{t}{2\cdot 16^k}\Big), \qquad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Így $Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 + 8Y_4$ karakterisztikus függvénye

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(Y_1+2Y_2+4Y_3+8Y_4)}\big)\\ &= \mathrm{e}^{\frac{(1+2+4+8)\mathrm{i}t}{30}}\prod_{k=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{t}{2\cdot 16^k}\Big)\prod_{k=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{2t}{2\cdot 16^k}\Big)\prod_{k=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{4t}{2\cdot 16^k}\Big)\prod_{k=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{8t}{2\cdot 16^k}\Big)\\ &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}t}{2}}\prod_{k=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{t}{2\cdot 2^{4k}}\Big)\prod_{k=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{t}{2\cdot 2^{4k-1}}\Big)\prod_{k=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{t}{2\cdot 2^{4k-2}}\Big)\prod_{k=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{t}{2\cdot 2^{4k-3}}\Big)\\ &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}t}{2}}\prod_{\ell=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{t}{2\cdot 2^{\ell}}\Big) = \prod_{\ell=1}^{\infty}\Big(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}t}{2\cdot 2^{\ell}}}\cos\Big(\frac{t}{2\cdot 2^{\ell}}\Big)\Big) = \lim_{n\to\infty}\prod_{\ell=1}^{n}\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}tX_\ell}{2^\ell}}\big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\Bigg(\exp\Bigg\{\mathrm{i}t\sum_{\ell=1}^{n}\frac{X_\ell}{2^\ell}\Bigg\}\Bigg), \qquad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Tetszőleges pozitív egész n esetén $\sum_{\ell=1}^{n}\frac{X_\ell}{2^\ell}$ egyenletes eloszlású a $\{0, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}\}$ halmazon, így eloszlásfüggvénye legfeljebb $\frac{1}{2^n}$-nel tér el a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényétől, ezért $\sum_{\ell=1}^{n}\frac{X_\ell}{2^\ell}$ eloszlásban konvergál a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszláshoz, tehát Lévy folytonossági tétele alapján $Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 + 8Y_4$ egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon, ami abszolút folytonos eloszlás.

Hasonlóan számolva, $Y_1 + 4Y_3$ karakterisztikus függvénye

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(Y_1+4Y_3)}) = \mathrm{e}^{\frac{(1+4)\mathrm{i}t}{30}} \prod_{k=1}^{\infty} \cos\Big(\frac{t}{2\cdot 16^k}\Big) \prod_{k=1}^{\infty} \cos\Big(\frac{4t}{2\cdot 16^k}\Big) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}t}{6}} \prod_{k=1}^{\infty} \cos\Big(\frac{t}{2\cdot 4^{2k}}\Big) \prod_{k=1}^{\infty} \cos\Big(\frac{t}{2\cdot 4^{2k-1}}\Big)$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}t}{6}} \prod_{\ell=1}^{\infty} \cos\Big(\frac{t}{2\cdot 4^{\ell}}\Big) = \prod_{\ell=1}^{\infty}\Big(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}t}{2\cdot 4^k}} \cos\Big(\frac{t}{2\cdot 4^{\ell}}\Big)\Big) = \mathbb{E}\Big(\exp\Big\{\mathrm{i}t\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{X_\ell}{4^\ell}\Big\}\Big), \qquad t\in\mathbb{R},$$

ezért $Y_1 + 4Y_3$ eloszlása megegyezik a $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{X_\ell}{4^\ell}$ véletlen változó eloszlásával, ahol a $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{X_\ell}{4^\ell}$ sor is nyilván 1 valószínűséggel konvergens. A $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{X_\ell}{4^\ell}$ véletlen változó lehetséges értékei azok a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumba eső számok, melyek felírhatók a 4-es számrendszerben a 0 és 1 számjegyek segítségével, tehát nem eshetnek a $H := \cup_{\ell=1}^{\infty}\big[\big(\frac{1}{2^{\ell+2}}, \frac{2}{2^{\ell+2}}\big) \cup \big(\frac{2^\ell+1}{2^{\ell+2}}, \frac{2^\ell+2}{2^{\ell+2}}\big)\big]$ halmazba, aminek a Lebesgue-mértéke $\frac{1}{2}$. Ezért az $Y_1 + 4Y_3$ véletlen változó 1 valószínűséggel beleesik a $[0, \frac{1}{2}] \setminus H$ halmazba, aminek a Lebesgue-mértéke 0, vagyis az $Y_1 + 4Y_3$ véletlen változó nem lehet abszolút folytonos eloszlású. $\square$

Második megoldás (Barczy Mátyás).

Az $Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 + 8Y_4$ véletlen változó eloszlása megegyezik a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^{(1)}+2X_k^{(2)}+4X_k^{(3)}+8X_k^{(3)}}{16^k}$ eloszlásával, ahol $\big\{X_j^{(\ell)} : j \in \{1,2,\ldots\}, \ell \in \{1,2,3,4\}\big\}$ független kópiái az X_1 véletlen változónak. Nyilván a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^{(1)}+2X_k^{(2)}+4X_k^{(3)}+8X_k^{(3)}}{16^k}$ sor 1 valószínűséggel konvergens (hiszen a részletösszegek sorozata monoton növekvő és nem nagyobb, mint $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{15}{16^k} = 1$), ezért eloszlásban is konvergens. Tetszőleges pozitív egész n esetén $\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k^{(1)}+2X_k^{(2)}+4X_k^{(3)}+8X_k^{(3)}}{16^k}$ egyenletes eloszlású a $\{0, \frac{1}{16^n}, \ldots, \frac{16^n-1}{16^n}\}$ halmazon, így eloszlásfüggvénye legfeljebb $\frac{1}{16^n}$-nel tér el a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényétől, ezért $\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k^{(1)}+2X_k^{(2)}+4X_k^{(3)}+8X_k^{(3)}}{16^k}$ eloszlásban konvergál a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszláshoz, tehát $Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 + 8Y_4$ egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon, ami abszolút folytonos eloszlás.

Az $Y_1 + 4Y_3$ véletlen változó eloszlása megegyezik a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^{(1)}+4X_k^{(3)}}{16^k}$ eloszlásával, ahol a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^{(1)}+4X_k^{(3)}}{16^k}$ sor is nyilván 1 valószínűséggel konvergens. A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^{(1)}+4X_k^{(3)}}{16^k}$ véletlen változó lehetséges értékeinek A halmazát azok a $[0,1]$ intervallumba eső számok alkotják, melyek felírhatók a 16-os számrendszerben a 0, 1, 4 és 5 számjegyek segítségével. Ez az A halmaz úgy keletkezik, hogy a $[0,1]$ intervallumból először kivesszük a $(\frac{2}{16}, \frac{4}{16}) \cup (\frac{6}{16}, \frac{16}{16})$ halmazt, mert ebben vannak azok a $[0,1]$ intervallumbeli számok, amelyek 16-os számrendszerbeli alakjában a nulla utáni első számjegy különbözik a 0, 1, 4 és 5 számjegyektől, így a $\frac{2}{16} + \frac{10}{16} = \frac{3}{4}$ részt vesszük ki. Utána a maradék halmazból azt a halmazt vesszük ki, amelyben a nulla utáni második számjegy különbözik a 0, 1, 4 és 5 számjegyektől, így a maradéknak megint a $\frac{3}{4}$ részét kell eltávolítani, és így tovább. Tehát a $[0,1]$ intervallumból kivett halmaz Lebesgue-mértéke $\frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots = 1$, így az A halmaz Lebesgue-mértéke 0. Ezért az $Y_1 + 4Y_3$ véletlen változó 1 valószínűséggel beleesik az A halmazba, aminek a Lebesgue-mértéke 0, vagyis az $Y_1 + 4Y_3$ véletlen változó nem lehet abszolút folytonos eloszlású. $\square$

Megjegyzések a feladathoz: Könnyű belátni, hogy a $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{X_\ell}{4^\ell}$ véletlen változó eloszlásfüggvénye folytonos, ezért az eloszlása nem tartalmaz atomot, vagyis nem diszkrét. Tehát $Y_1 + 4Y_3$ folytonos szinguláris eloszlású véletlen változó.

Az első megoldás első részében felhasználható, hogy minden $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ esetén $\prod_{\ell=1}^{\infty} \cos\big(\frac{t}{2\cdot 4^\ell}\big) = \frac{\sin(t/2)}{t/2}$, és így $Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 + 8Y_4$ karakterisztikus függvénye $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}t}{2}} \frac{\sin(t/2)}{t/2}$, ami éppen a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlás karakterisztikus függvénye.

Barczy Mátyás megjegyzése: Az első megoldás második részét úgy is be lehet fejezni, hogy az $Y_1 + 4Y_3$ karakterisztikus függvénye $\mathrm{e}^{\frac{(1+4)\mathrm{i}t}{30}} \prod_{k=1}^{\infty} \cos\big(\frac{t}{2\cdot 16^k}\big) \prod_{k=1}^{\infty} \cos\big(\frac{4t}{2\cdot 16^k}\big)$, $t \in \mathbb{R}$, amely a $16^N \cdot 2\pi$, $N \in \{1,2,\ldots\}$ sorozat mentén nem konvergál 0-hoz, mert az abszolút értéke egy pozitív konstans, mégpedig $\prod_{k=1}^{\infty} \cos\bigl(\frac{\pi}{16^k}\bigr) \prod_{k=1}^{\infty} \cos\bigl(\frac{4\pi}{16^k}\bigr)$, hiszen $\sum_{k=1}^{\infty}\bigl(1 - \cos\bigl(\frac{\pi}{16^k}\bigr)\bigr) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2\cdot 16^{2k}} < \infty$ és hasonlóan $\sum_{k=1}^{\infty}\bigl(1 - \cos\bigl(\frac{4\pi}{16^k}\bigr)\bigr) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8\pi^2}{16^{2k}} < \infty$. Viszont ha az $Y_1 + 4Y_3$ véletlen változó abszolút folytonos eloszlású volna, akkor a karakterisztikus függvénye a Riemann-Lebesgue lemma szerint 0-hoz konvergálna végtelenben, tehát az $Y_1 + 4Y_3$ véletlen változó nem lehet abszolút folytonos eloszlású. □