

# A 2025. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

## A VERSENYFELADATOK KITŰZŐI

1. Bodor Bertalan
2. Gyenizse Gergő és Nemes Bernadett
3. Hajdu Lajos
4. Pink István
5. Totik Vilmos
6. Totik Vilmos
7. Totik Vilmos
8. Buczolic Zoltán
9. Páles Zsolt
10. Fazekas István és Fazekas Borbála

1. Tetszőleges  $r, n \geq 1$  egész számok esetén jelölje  $P(r, n)$  az  $\{1, 2, \dots, n\}$  halmazon definiált ekvivalenciarelációkból álló azon  $(E_1, \dots, E_r)$  rendezett  $r$ -esek számát, amelyekre  $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_r$ . Bizonyítsuk be, hogy rögzített  $r$  esetén  $P(r, n) < n!$ , amennyiben  $n$  elég nagy.

MEGOLDÁS. A feladatban említett sorozatok *higher order Bell numbers* néven ismertek, és megtalálhatóak az A144150 számú OEIS sorozat oszlopaiként. Jelölje  $E^r(x)$  a  $P(r, n)$  sorozat exponenciális generátorfüggvényét, azaz

$$E^r(x) := \sum_{n=0}^{\infty} P(r, n) \frac{x^n}{n!}.$$

Ismert tény (illetve ez a definíció van megadva a belinkelt OEIS oldalon is), hogy  $E^0(x) = e^x$  és  $E^{r+1}(x) = e^{E^r(x)-1}$ . Mivel az  $e^x$  függvény mindenhol konvergens, ebből következik, hogy az imént definiált generátorfüggvények is mindenhol konvergensek. Rögzített  $r$  esetén az  $x = 1$  értéket behelyettesítve adódik, hogy a  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(r, n)}{n!}$  összeg konvergens, így  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(r, n)}{n!} = 0$ . Speciálisan  $P(r, n) < n!$  amennyiben  $n$  elég nagy.  $\square$

MEGJEGYZÉS. Említésre méltó tény, hogy a feladat állítása némileg meglepő lehet. Ismert és könnyű tény, hogy a Bell-számok  $n!$ -nál lassabban nőnek, ugyanakkor a magasabb rendű verzióknál hajlamosak lehetünk azt gondolni, hogy a növekedés  $n^{rn}$  körül lesz, hiszen ha mindenféle megszorítás nélkül választanánk az ekvivalenciarelációkat, akkor lényegében ezt kapnánk, és az ember intuíciója azt sugallná, hogy az, hogy láncba tesszük az ekvivalenciarelációkat, nem csökkenti lényegesen az esetek számát. Mint a feladat állítása mutatja, ez az intuíció teljesen rossz.

**2.** Legyen egy irányított gráf szoros, ha nincs olyan  $k > 1$  természetes szám és a gráf csúcsainak  $c$  színezése  $\mathbb{Z}_k$  elemeivel, amelyre minden  $(a, b)$  él esetén  $c(b) = c(a) + 1$ . Igaz-e, hogy összefüggő, szoros irányított gráfok direkt szorzata is szoros?

MEGOLDÁS. A válasz igenlő.

A továbbiakban jelölje  $\mathbb{C}_k$  a  $k$  csúcsú irányított kört, amelynek csúcsai  $\mathbb{Z}_k$  elemei, és tetszőleges  $a, b \in \mathbb{Z}_k$  esetén  $(a, b)$  pontosan akkor él  $\mathbb{C}_k$ -ban, ha  $b = a + 1$ . Ezzel a jelöléssel, egy  $\mathbb{G}$  irányított gráfnak pontosan akkor van a feladat szövegében szereplő  $c$  színezése  $\mathbb{Z}_k$  elemeivel, ha létezik  $\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C}_k$  homomorfizmus.

Egy irányított gráfbeli sétát  $m$  emelkedésűnek nevezünk ( $m \in \mathbb{Z}$ ), ha a séta során használt előremutató élek és hátramutató élek számának különbsége  $m$ . (A többször használt éleket többször számoljuk, így például  $\mathbb{C}_4$ -ben az  $1 \rightarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow 0 \leftarrow 3 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow 2$  séta emelkedése  $-3$ .)

1. LEMMA. *Tetszőleges  $\mathbb{G}$  irányított gráfra a következők ekvivalensek:*

- (1) *Létezik  $\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C}_k$  homomorfizmus,*
- (2)  *$\mathbb{G}$ -ben minden zárt séta emelkedése osztható  $k$ -val.*

A LEMMA BIZONYÍTÁSA. Mind a két feltétel akkor és csak akkor teljesül  $\mathbb{G}$ -re, ha teljesül az összes komponensére. Ezért feltehető, hogy  $\mathbb{G}$  összefüggő.

Az  $(1) \Rightarrow (2)$  irány nyilvánvaló, a fordítotthoz legyen  $k > 1$  rögzített, és tegyük fel, hogy nem létezik  $\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C}_k$  homomorfizmus. Legyen  $g_0 \in V(\mathbb{G})$  rögzített, és minden  $g \in V(\mathbb{G})$  esetén definiáljuk az  $A_g$  halmazt a következő módon:  $A_g$  a  $g_0$ -ból induló és  $g$ -be érkező séták emelkedéseinek halmaza. Ekkor  $A_{g_0}$  a szokásos összeadásra nézve részcsoportot alkot  $\mathbb{Z}$ -ben.

Mivel  $\mathbb{Z}$  minden részcsoportja egy elem által generált, létezik  $d \in \mathbb{Z}$ , hogy  $A_{g_0} = \langle d \rangle$ . Legyen  $g \in V(\mathbb{G})$  tetszőleges, és  $x, y \in A_g$ . Ekkor van  $g_0$ -ból  $g$ -be  $x$  és  $y$  emelkedésű séta is. Az elsőhöz konkatenálva a második inverzét, egy  $g_0$ -ból  $g_0$ -ba menő,  $x - y$  emelkedésű sétát kapunk. Így  $x - y \in A_{g_0}$ , és  $d \mid x - y$ . Emiatt létezik  $c_g \in \mathbb{Z}_d$ , hogy minden  $x \in A_g$  esetén  $x \equiv c_g \pmod d$ .

A  $\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C}_d, g \mapsto c_g$  leképezés homomorfizmus. Mivel a feltevés szerint  $\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C}_k$  homomorfizmus viszont nincs,  $k \nmid d$ . Ez  $d \in A_{g_0}$  miatt azt jelenti, hogy van a  $\mathbb{G}$ -ben olyan zárt séta, amelynek emelkedése nem osztható  $k$ -val.  $\square$

A Lemma bizonyításából a következő is kiolvasható.

1. KÖVETKEZMÉNY. *Egy összefüggő irányított gráf akkor és csak akkor szoros, ha van benne 1 emelkedésű zárt séta.*

Belátjuk, hogy ha az  $\mathbb{A}$  és  $\mathbb{B}$  gráfok tartalmazznak 1 emelkedésű körsétát, akkor  $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$  szoros. Ezt az  $\mathbb{A}$ -beli körséta  $n_A$ , ezen belül a  $\mathbb{B}$ -beli körséta  $n_B$  hosszára vonatkozó indukcióval fogjuk megtenni. A Következmény értelmében feltehető, hogy  $\mathbb{A}$  és  $\mathbb{B}$  csak a körséták éleit tartalmazzák.

Ha  $n_A = 1$ , akkor  $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$  izomorf  $\mathbb{B}$ -vel, így szoros.

Egy irányított gráfban nevezzük  $Z$ -sétának a  $z_0 \rightarrow z_1 \leftarrow z_2 \rightarrow z_3$  alakú sétákat,  $Z^{-1}$ -sétának a  $z_0 \leftarrow z_1 \rightarrow z_2 \leftarrow z_3$  alakú sétákat.

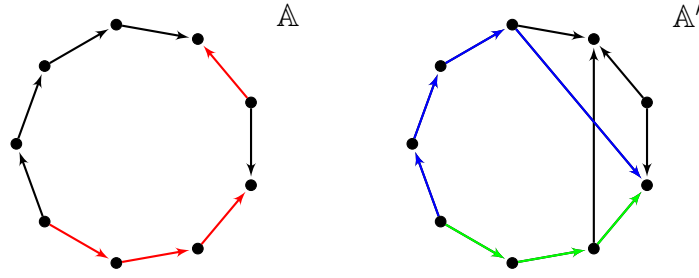
**1. eset:  $\mathbb{A}$ -ban van  $Z$ -séta vagy  $Z^{-1}$ -séta.** Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy  $Z$ -séta van a gráfban. Képezzük egy tetszőleges  $\mathbb{X}$  irányított gráfból az  $\mathbb{X}'$  irányított gráfot úgy, hogy  $\mathbb{X}'$  és  $\mathbb{X}$  csúcshalmaza megegyezzen, és tetszőleges  $x_1, x_2 \in V(\mathbb{X}')$  csúcsokra  $(x_1, x_2)$  pontosan akkor legyen éle az  $\mathbb{X}'$ -nek, ha  $\mathbb{X}$ -ben létezik  $Z$ -séta  $x_1$ -ből  $x_2$ -be. Ekkor  $\mathbb{X}$  részgráfja  $\mathbb{X}'$ -nek.

Az  $\mathbb{A}$ -ban van egy  $z_0 \rightarrow z_1 \leftarrow z_2 \rightarrow z_3$  alakú séta, ezeket az éleket  $(z_0, z_3)$ -mal helyettesítve egy  $\mathbb{A}'$ -beli körsétát kapunk, amely  $n_A - 2$  hosszú, emelkedése pedig szintén 1.

Így  $\mathbb{A}'$ , és az indukciós feltevés miatt  $\mathbb{A}' \times \mathbb{B}'$  szorosak. Az  $\mathbb{A}' \times \mathbb{B}'$ -re alkalmazva a Lemmát, kapjuk, hogy nem létezik  $k > 1$  egész szám, ami tetszőleges zárt sétájának emelkedését osztja.

Könnyen látható, hogy  $\mathbb{A}' \times \mathbb{B}' = (\mathbb{A} \times \mathbb{B})'$ . Az  $\mathbb{A}' \times \mathbb{B}'$  tetszőleges zárt sétájában, ha annak minden élet lecseréljük arra az  $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ -beli  $Z$ -sétára, ami miatt az adott él bekerült  $(\mathbb{A} \times \mathbb{B})'$ -be, egy  $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ -beli, és az eredetivel azonos emelkedésű zárt sétához jutunk. Így  $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$  zárt sétáihoz sem létezik  $k > 1$ , amely mindegyik emelkedését osztja, tehát  $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$  szoros.

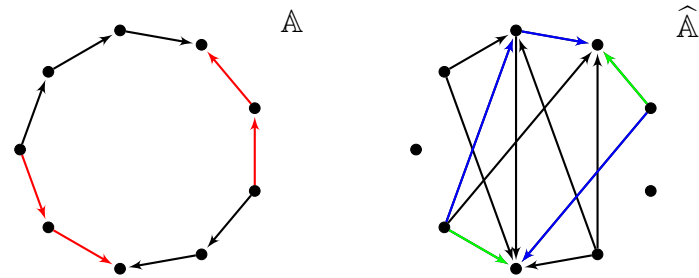
**2. eset:  $\mathbb{A}$ -ban nincs sem  $Z$ -séta, sem  $Z^{-1}$ -séta, de  $\mathbb{B}$ -ben van valamelyik.** Ez az eset ugyanúgy működik, mint az előző. (Vegyük észre, hogy  $\mathbb{A}' = \mathbb{A}$ .)



1. ÁBRA. Egy 1 emelkedésű kör, és a belőle képzett új gráf, benne a kék és zöld élek által alkotott rövidebb, de azonos emelkedésű körsétával.

**3. eset: Sem  $\mathbb{A}$ -ban, sem  $\mathbb{B}$ -ben nincs sem  $Z$ -séta, sem  $Z^{-1}$ -séta.** Egy irányított gráfban nevezzük  $N$ -sétának a következő alakú sétákat:  $w_0 \rightarrow w_1 \leftarrow w_2 \leftarrow w_3 \rightarrow w_4 \rightarrow w_5$ . Az előző esethez hasonló módon képezzük egy tetszőleges  $\mathbb{X}$  irányított gráfból az  $\widehat{\mathbb{X}}$  irányított gráfot úgy, hogy  $\widehat{\mathbb{X}}$  és  $\mathbb{X}$  csúcshalmaza megegyezzen, és tetszőleges  $x_1, x_2 \in V(\widehat{\mathbb{X}})$  csúcsokra  $(x_1, x_2)$  pontosan akkor legyen éle az  $\widehat{\mathbb{X}}$ -nak, ha  $\mathbb{X}$ -ben létezik  $N$ -séta  $x_1$ -ből  $x_2$ -be. Ezúttal  $\mathbb{X}$  nem feltétlenül lesz részgráfja  $\widehat{\mathbb{X}}$ -nak.

Belátjuk, hogy az  $\widehat{\mathbb{A}}$  gráfban lesz egy 1 emelkedésű körséta, amely rövidebb  $n_{\mathbb{A}}$ -nál. Mivel az eredeti körséta  $Z$ - és  $Z^{-1}$ -mentes, benne az előre-, illetve hátramutató élek legalább kettesével követik egymást. (A körséta emelkedése 1, ezért vannak benne előre- és hátramutató élek is.) Az  $\widehat{\mathbb{A}}$  az  $\mathbb{A}$ -nak pontosan azokat az éleit tartalmazza, amelyek kiinduló csúcsának be-foka nem 0. Emellett még új élek is megjelennek: ha  $\mathbb{A}$ -ban két hátramutató élt két előremutató él követ, vagyis:  $a_0 \leftarrow a_1 \leftarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_4$ , akkor  $\widehat{\mathbb{A}}$ -ban  $(a_1, a_4)$  és  $(a_3, a_0)$  is él. Az  $n_{\mathbb{A}}$ -nál rövidebb körséta a következő lesz  $\widehat{\mathbb{A}}$ -ban: Minden  $a_0 \leftarrow a_1 \leftarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_4$  alakú  $\mathbb{A}$ -beli sétát cseréljünk le  $\widehat{\mathbb{A}}$ -ban az  $a_0 \leftarrow a_1 \rightarrow a_4$  alakú sétára, majd ezen új sétákat, az eredeti séták sorrendjében haladva, kapcsoljuk össze egy körsétává olyan  $\widehat{\mathbb{A}}$ -beli élekkel, amelyek  $\mathbb{A}$ -nak is élei voltak. A kapott körséta rövidebb  $n_{\mathbb{A}}$ -nál, és emelkedése azonos az eredeti séta emelkedésével, hiszen vagy megtartottunk egy élt, vagy egy 0 emelkedésű, 2 élből álló sétára cseréltünk egy 4 élből álló, szintén 0 emelkedésű sétát. Tehát a kapott körséta szoros, és legfeljebb  $n_{\mathbb{A}} - 2$  hosszú.



2. ÁBRA. Egy 1 emelkedésű kör, és a belőle képzett új gráf, benne a kék és zöld élek által alkotott rövidebb, de azonos emelkedésű körsétával.

Ugyanígy  $\widehat{\mathbb{B}}$ -ben is lesz egy legfeljebb  $n_{\mathbb{B}} - 2$  hosszú, szoros körséta.

Az indukciós feltevés miatt  $\widehat{\mathbb{A}} \times \widehat{\mathbb{B}} = \widehat{\mathbb{A} \times \mathbb{B}}$  szoros. Ennek a gráfnak egy zárt sétájában minden élt lecserélve arra az  $N$ -sétára, ami miatt az él  $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ -be bekerült, egy  $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ -beli zárt sétát kapunk, azonos emelkedéssel. Így a Lemma felhasználásával ismét azt kaptuk, hogy  $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$  szoros.  $\square$

**MEGJEGYZÉS.** • A feladat számítástudományi eredetű. Egy gráf *algebrai hosszának* szokás nevezni a benne található séták emelkedéseinek legnagyobb közös osztóját. A *szoros* szót csak mi használtuk az 1 algebrai hosszú gráfokra, hogy megnehezítsük a vonatkozó szakirodalom megtalálását.

- Nem nehéz látni, hogy egy irányított gráf algebrai hossza a komponensei algebrai hosszának legnagyobb közös osztója. Így a feladatban nem kell feltenni, hogy a gráfok összefüggőek. Viszont a feltétel elhagyása csak meglehetősen érdektelen technikai nehézségeket okoz.

**3.** Legyenek  $a_1, a_2, a_3, a_4$  olyan rögzített pozitív egészek, melyekre  $\lnko(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$  teljesül, és jelölje  $\varphi$  az Euler-féle függvényt. Mutassuk meg, hogy ha a

$$(1) \quad \varphi(a_1^{x_1}) + \varphi(a_2^{x_2}) = \varphi(a_3^{x_3}) + \varphi(a_4^{x_4})$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van az  $x_1, x_2, x_3, x_4$  nemnegatív egészekben, akkor vannak olyan  $u, v$  pozitív egészek, melyekkel az

$$(2) \quad a_1^u = a_3^v, \quad a_1^v = a_4^u, \quad a_2^u = a_3^v, \quad a_2^v = a_4^u$$

egyenlőségek legalább egyike teljesül!

**MEGOLDÁS.** A feladat megfogalmazása pontatlan, ugyanis ha bármelyik  $a_i$  alap értéke, mondjuk  $a_1 = 1$  és  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  megoldás, akkor  $x_1$  értékét tetszőlegesen megválasztva végtelen sok megoldáshoz jutunk. Például,  $a_1 = 1, a_2 = 13, a_3 = 2, a_4 = 21$  esetén  $(x_1, 1, 1, 1)$  ( $x_1 \geq 0$ ) végtelen sok megoldást ad. Az alábbiakban először jellemezzük az elfajuló eseteket (ellenpéldákat), majd megadjuk a probléma megoldását a nemelfajuló esetekben. Ehhez két esetet különböztetünk meg:

- i) valamelyik  $a_i$  alap értéke 1,
- ii) az  $a_i$  alapok egynél nagyobb egészek.

Megemlíjtjük, hogy a probléma azzal a konvencióval is orvosolható lenne, hogy  $a_i = 1$  esetén  $x_i = 1$  kell, hogy teljesüljön – de az egyszerűség kedvéért a fenti megkülönböztetést követjük.

Tegyük fel, hogy valamelyik  $a_i$  értéke 1. A szimmetria miatt feltehető, hogy  $a_1 = 1$ . Ekkor szükségképpen  $\varphi(a_3^{x_3})$  és  $\varphi(a_4^{x_4})$  egyike 1 kell, hogy legyen. Valóban, ha  $\varphi(a_2^{x_2}) = 1$ , akkor az állítás triviális. Ha viszont  $\varphi(a_2^{x_2}) > 1$ , akkor (1) bal oldala páratlan, így jobb oldalának is páratlannak kell lennie – így  $\varphi(a_3^{x_3}) = 1, \varphi(a_4^{x_4}) = 1$  egyike valóban fennáll. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy  $\varphi(a_3^{x_3}) = 1$ . Mivel ellenpéldákat keresünk, így  $a_3 \neq 1$ , amiből az következik, hogy vagy  $x_3 = 0$  (és  $a_3 > 1$  tetszőleges) vagy  $a_3 = 2, x_3 = 1$ . Mindkét esetben (1) egyenletünk a

$$(3) \quad \varphi(a_2^{x_2}) = \varphi(a_4^{x_4})$$

egyenletre egyszerűsödik. Ennek az egyenletnek végtelen sok megoldása van (lásd például [2]), de azok teljes leírása reménytelen. (Például, ha  $q = 2^m + 1$  Fermat-prím, akkor  $\varphi(2^{m+1}) = \varphi(q)$  – de azt nem tudjuk, hogy végtelen sok Fermat-prím létezik-e.) Így megelégedhetünk azzal, hogy ha adott  $a_2, a_4$  mellett  $x_2, x_4$  (3) egy megoldása,  $\varphi(a_3^{x_3}) = 1$ , akkor (felidézve, hogy most  $a_1 = 1$ ),  $(x, x_2, x_3, x_4)$  az (1) megoldása lesz, tetszőleges  $x \geq 0$  esetén. Itt persze  $a_2, a_3, a_4$  úgy választandó, hogy a kért feltételek teljesüljenek, de (2) ne teljesüljön. (Egy ilyen példát fent megadtunk.) Látható, hogy az összes ellenpélda ezen a módon előállítható.

Tegyük most fel, hogy  $a_i > 1$  ( $1 \leq i \leq 4$ ), és legyen  $S$  az  $a_1 a_2 a_3 a_4$  prímosztóiból álló halmaz. Vegyük észre, hogy ekkor (1) speciális esete az alábbi egyenletnek:

$$(4) \quad t_1 s_1 + t_2 s_2 - t_3 s_3 = 1,$$

ahol

$$t_i = \frac{\prod (1 - 1/p)}{\prod_{p|a_i} (1 - 1/p)} \quad (i = 1, 2, 3),$$

továbbá  $s_1, s_2, s_3$   $S$ -egységek, azaz olyan racionális számok, melyek számlálója és nevezője csak  $S$ -beli prímosztókkal rendelkezik. Valóban, ha  $x_1, x_2, x_3, x_4$  az (1) megoldása, akkor  $s_i = a_i^{x_i} / a_4^{x_4}$  a (4) egy megoldása.

Vizsgáljuk meg, hogy előfordulhat-e az, hogy az (1) két különböző, mondjuk  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  és  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  megoldása a (4) ugyanazon  $(s_1, s_2, s_3)$  megoldását adja! Ez azt jelentené, hogy az

$$a_1^{y_1 - z_1} = a_4^{y_4 - z_4}, \quad a_2^{y_2 - z_2} = a_4^{y_4 - z_4}, \quad a_3^{y_3 - z_3} = a_4^{y_4 - z_4}.$$

Mivel  $a_i > 1$  ( $1 \leq i \leq 4$ ), így azt kapjuk, hogy  $y_i \neq z_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ). De akkor a fenti első (és második) egyenlőség alapján (2) teljesül. Így a továbbiakban feltehetjük, hogy (1) különböző megoldásai (4) különböző megoldásait adják. (Megjegyzés: elvi szempontból ez az a pont, ahol az elfajuló esetek (ellenpéldák) belépnek.)

Az  $S$ -egység egyenletek elmélete szerint (lásd például [1], 131. oldal, Corollary 6.1.2), a (4) egyenlet csak véges sok nem elfajuló (azaz a bal oldalon eltűnő részletösszeg mentes) megoldással rendelkezik. Így ha (1) megoldásszáma végtelen, akkor végtelen sok megoldás szükségképpen (4) elfajuló  $(s_1, s_2, s_3)$  megoldásához tartozik. A szimmetria miatt feltehető, hogy olyan megoldásokról van szó, ahol  $t_1 s_1 = t_3 s_3$  – azaz, szükségképpen

$$(5) \quad \varphi(a_1^{x_1}) = \varphi(a_3^{x_3})$$

végtesen sok  $x_1, x_3$  esetén. Világos, hogy az utóbbi egyenletnek csak akkor lehet végtelen sok megoldása, ha  $a_1$  és  $a_3$  prímfaktorai pontosan ugyanazok, azaz ha ezek a számok

$$a_1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad a_3 = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$$

alakúak, pozitív kitevőkkel. Így viszont az (5) egyenletből

$$p_1^{x_1 \alpha_1} \cdots p_k^{x_1 \alpha_k} = p_1^{x_3 \beta_1} \cdots p_k^{x_3 \beta_k}$$

következik. Ez viszont azzal ekvivalens, hogy  $x_1(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = x_3(\beta_1, \dots, \beta_k)$ , vagyis  $\alpha_i/\beta_i = \alpha_j/\beta_j$  ( $1 \leq i < j \leq k$ ). Emiatt vannak olyan  $u, v$  pozitív egészek, hogy  $\alpha_i/\beta_i = u/v$  ( $1 \leq i \leq k$ ). Innen viszont az állítás közvetlenül adódik.  $\square$

#### HIVATKOZÁSOK.

- [1] J.-H. Evertse, K. Györy, *Unit Equations in Diophantine Number Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 146, Cambridge University Press, 2015.
- [2] C. Pomerance, *Popular values of Euler's function*, *Mathematika* **27** (1980), 84–89.

4. Adott pozitív  $k \geq 1$  egész esetén definiáljuk az  $(F_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$   $k$ -Fibonacci sorozatot az  $F_{k,0} = 0$ ,  $F_{k,1} = 1$ ,  $F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}$  ( $n \geq 2$ ) rekurzióval. Oldjuk meg az

$$(6) \quad F_{k,n} = 2^m 3^l$$

diofantikus egyenletet a  $(k, n, m, l)$  nemnegatív egészekre nézve.

MEGOLDÁS. A megoldásban fontos szerepet játszik a Lucas-sorozat fogalma.

Adott  $A, B$  egészek esetén az

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_n = Au_{n-1} + Bu_{n-2}, \quad (n \geq 2)$$

módon definiált  $u = (u_n)_{n \geq 0}$  binér rekurzív sorozatot *Lucas-sorozatnak* nevezzük.

Az  $f(x) = x^2 - Ax - B$  polinomot az  $u$  sorozat *karakterisztikus polinomjának* hívjuk. Az  $f$  gyökeit  $\alpha$ -val és  $\beta$ -val jelölve, azt mondjuk, hogy az  $u$  Lucas-sorozat *nem degenerált*, ha  $AB \neq 0$  és  $\alpha/\beta$  nem egységgyök. Az  $u$  Lucas-sorozatot *valósnak* nevezzük, ha  $\alpha$  és  $\beta$  valós számok.

A megoldás egyik fő eszköze Carmichael egy klasszikus tétele (ld. [3], Theorem XXIII), amely nem degenerált Lucas-sorozatok primitív prímosztóival kapcsolatos. Adott  $u$  Lucas-sorozat esetén azt mondjuk, hogy egy  $p$  prím *primitív prímosztója*  $u_n$ -nek, ha

$$p \mid u_n \quad \text{és} \quad p \nmid u_1 u_2 \cdots u_{n-1}.$$

1. TÉTEL (Carmichael-tétel). *Legyen  $u_n$  egy nem degenerált, valós Lucas-sorozat. Ha  $n \neq 1, 2, 6$ , akkor  $u_n$ -nek van primitív prímosztója, kivéve, ha*

$$n = 12, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1.$$

Carmichael fenti tétele azt állítja tehát, hogy bizonyos feltételek mellett az  $u_n$ -nek mindig van primitív prímosztója, kivéve a Fibonacci-sorozat 12. tagját.

Legyen  $(F_{k,n})_{n \geq 0}$  a feladatban szereplő  $k$ -Fibonacci sorozat. Vegyük észre, hogy az  $(F_{k,n})_{n \geq 0}$  sorozat  $k = 1$  esetén éppen a (klasszikus) Fibonacci-sorozatot adja vissza. Továbbá  $(F_{k,n})_{n \geq 0}$  minden rögzített  $k \geq 1$ -re egy nem degenerált, valós Lucas-sorozat. Valóban, mivel az  $(F_{k,n})_{n \geq 0}$  sorozat karakterisztikus polinomja éppen  $f(x) = x^2 - kx - 1$ , ezért  $k \geq 1$  miatt  $AB = k \cdot 1 \neq 0$ . Továbbá, mivel az  $f$  gyökei  $\alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$  és  $\beta = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$ , ezért ezek minden  $k \geq 1$  esetén valósak és az is könnyen ellenőrizhető, hogy  $\alpha \neq \pm\beta$ , azaz feltehető, hogy  $\alpha/\beta$  nem egységgyök.

Ha  $n = 0$ , akkor  $F_{k,n} = F_{k,0} = 0$  és ezért a (6) egyenlet nem állhat fenn, hiszen ekkor a (6) bal oldala 0, míg jobb oldala  $m \geq 0, l \geq 0$  miatt,  $2^m 3^l > 0$ . Ezért a továbbiakban feltehető, hogy  $n \geq 1$ .

Mivel az  $(F_{k,n})_{n \geq 0}$  sorozat második, harmadik és negyedik tagja éppen

$$F_{k,2} = k, \quad F_{k,3} = k^2 + 1, \quad F_{k,4} = k(k^2 + 2),$$

ezért könnyen látszik, hogy  $F_{k,2}, F_{k,3}, F_{k,4}$  közül legalább az egyik biztosan páros, és legalább az egyik biztosan osztható 3-mal. Így, ha a (6) egyenlet fennáll, azaz  $F_{k,n} = 2^m 3^l$ , akkor ez azt jelenti, hogy bármely  $n \geq 5$  esetén az  $F_{k,n}$  tagnak nincs primitív prímosztója (hiszen a 2 és 3 prímek korábban már fellépnek). Másrészt viszont, az  $(F_{k,n})_{n \geq 0}$  sorozat egy valós, nem degenerált Lucas-sorozat. Ezért, ha  $n \neq 1, 2, 6$ , akkor a Carmichael-tétel értelmében  $F_{k,n}$ -nek mindig van primitív prímosztója, kivéve a  $k = 1$  és  $n = 12$  esetet. Ez azt jelenti tehát, hogy az  $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$  és  $(k = 1, n = 12)$  esetektől eltekintve a (6) egyenletnek nem lehet megoldása.

A megoldás hátralévő részében a még fennmaradó  $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$  és  $(k = 1, n = 12)$  esetekkel foglalkozunk.

Vegyük észre, hogy  $k = 1, n = 12$  esetén azt kapjuk, hogy  $F_{1,12} = 144 = 2^4 \cdot 3^2$ , ami a  $(k, n, m, l) = (1, 12, 4, 2)$  megoldást eredményezi.

Végül tekintsük az  $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$  eseteket. Ha most  $n = 1$ , akkor (6) nyilván csak  $m = l = 0$  mellett állhat fenn. Ez adja a  $(k, n, m, l) = (k, 1, 0, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  parametrikus megoldáscsaládot.

Ha  $n = 2$ , akkor a (6) egyenlet a  $k = 2^m 3^l$  alakot ölti, ami a  $(k, n, m, l) = (2^m 3^l, 2, m, l)$ ,  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  kétparaméteres megoldáscsaládra vezet.

Ha  $n = 3$ , akkor a (6) egyenlet a  $k^2 + 1 = 2^m 3^l$  alakot ölti. Világos, hogy egy  $k^2 + 1$  alakú egész nem lehet osztható 3-mal, és ezért szükségképpen  $l = 0$ . Továbbá, az is nyilvánvaló, hogy  $k^2 + 1$  vagy páratlan vagy pedig páros, de nem osztható 4-gyel. Ezek alapján azt kapjuk, hogy  $k^2 + 1 = 1$ , ami ellentmondás, vagy pedig  $k^2 + 1 = 2$ , ami  $k = 1$ -re vezet. Így a (6) egyenlet  $n = 3$ -nak megfelelő egyetlen megoldása:  $(k, n, m, l) = (1, 3, 1, 0)$ .

Ha  $n = 6$ , akkor a (6) egyenlet a  $k(k^2 + 1)(k^2 + 3) = 2^m 3^l$  alakot ölti. Mivel  $k^2 + 1$  nem osztható 3-mal és 4-gyel sem, ezért szükségképpen  $k^2 + 1 = 2$  teljesül, amiből  $k = 1$  jön. Így a (6) egyenlet  $n = 6$ -nak megfelelő egyetlen megoldása:  $(k, n, m, l) = (1, 6, 3, 0)$ .

Végül tegyük fel, hogy  $n = 4$ . Ekkor a (6) egyenlet a  $k(k^2 + 2) = 2^m 3^l$  alakot ölti. Ha most  $3 \mid k$  és  $k$  páratlan, akkor  $3 \nmid k^2 + 2$  és  $k^2 + 2$  páratlan. Ekkor szükségképpen  $k^2 + 2 = 1$ , ami ellentmondás. Legyen most  $3 \mid k$  és  $k$  páros. Ekkor  $3 \nmid k^2 + 2$  és  $k^2 + 2 \equiv 2 \pmod{4}$ . Ezért  $k^2 + 2 = 2$ , ami szintén ellentmondás. Tegyük fel, hogy  $3 \nmid k$  és  $k$  páratlan. Ekkor szükségképpen  $m = 0, k = 1$  és  $3 = k^2 + 2 = 3^l$ , ami a  $(k, n, m, l) = (1, 4, 0, 1)$  megoldást szolgáltatja. Végül, tegyük fel, hogy  $3 \nmid k$  és  $k$  páros. Ekkor  $k^2 + 2 \equiv 2 \pmod{4}$  és  $3^l \mid k^2 + 2$  miatt, azt kapjuk, hogy  $k = 2^{m-1}$  és  $k^2 + 2 = 2 \cdot 3^l$ . Ez pedig a  $2^{2m-3} + 1 = 3^l$  egyenletre vezet. Ezért, a Catalan-egyenletre vonatkozó ismereteink miatt azt kapjuk, hogy  $2m - 3 = 1, l = 1$  vagy  $2m - 3 = 3, l = 2$ . Ezért ebben az esetben az alábbi megoldások adódnak:  $(k, n, m, l) = (2, 4, 2, 1)$  és  $(k, n, m, l) = (4, 4, 3, 2)$ .

A feladat megoldását befejeztük. □

#### HIVATKOZÁSOK.

- [3] R. D. Carmichael, *On the numerical factors of the arithmetic forms  $\alpha^n \pm \beta^n$* , Ann. of Math. (2) 15 (1913/14), no. 1–4, 49–70.

5. Mely  $m \geq 2$  természetes számokra vannak olyan  $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_m$  természetes számok és olyan  $a, b$  pozitív számok, amelyre a

$$\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a + kb), \quad j = 1, \dots, m-1$$

összegek mind egyenlők?

MEGOLDÁS. A válasz:  $m = 2, 3$ . Például a  $4 + 5 + 6 = 7 + 8$  egyenlőség mutatja, hogy  $m = 3$  megfelelő. Megmutatjuk, hogy  $m = 4$  már nem lehetséges.

Tegyük fel, hogy  $m = 4$ -re léteznek a fenti számok és sorozat.  $1/b$ -vel végigsorozva a sorozat tagjait, feltehető, hogy a sorozat általános tagja  $\alpha + k$  alakú. Az

$$S_k = \sum_{j=0}^{k-1} (\alpha + j) = \frac{k(k-1)}{2} + \alpha k = \frac{k^2}{2} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)k$$

összegekkel tehát az  $S_{n_{j+1}} - S_{n_j}$  különbségek mind egyenlők. Ha  $\alpha$  irracionális, akkor ez csak úgy lehetséges, ha az  $n_{j+1} - n_j$  különbségek is egyenlők, de akkor

$$S_{n_{j+1}} - S_{n_j} = \frac{1}{2}(n_{j+1} - n_j)(n_{j+1} + n_j) + (n_{j+1} - n_j) \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$$

nem lehetnek egyenlők (ezek mind különbözőek).

Tehát  $\alpha$  racionális, így  $\alpha - 1/2 = p/q$  valamilyen  $p, q$  egészekkel,  $q > 0$ . De akkor az  $S_{n_{j+1}} - S_{n_j}$  különbségek egyenlősége miatt azt kapjuk, hogy a

$$2q^2 S_k + p^2 = (kq + p)^2, \quad k = n_1, n_2, n_3, n_4$$

négyszetszámok számtani sorozatot alkotnak, márpedig Euler tétele szerint nincs négytagú, négyszetszámokból álló számtani sorozat (ld. pl. [4]), és ez az ellentmondás igazolja, hogy  $m \geq 4$  nem lehetséges.  $\square$

#### HIVATKOZÁSOK.

- [4] T.C. Brown, A.R. Freedman, and P. J.-S. Shiue, *Progressions of squares*, Australas. J. Combin. 27 (2004), 187–192.

6. Legyen  $n$  adott természetes szám. Egy  $P(z) = 1 + z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$  ( $a_n \neq 0$ ) polinomra jelölje  $\delta_P$  a  $P$  zérushelyei abszolút értékeinek a legkisebbikét. Határozzuk meg a  $\sup_P \delta_P$  számot, ahol a szuprérumot a fenti alakú polinomokra képezzük.

MEGOLDÁS. Legyenek  $z_1, \dots, z_n$  a zérushelyek. Mivel  $\prod_j z_j = (-1)^n/a_n$  és  $\sum_j \prod_{i \neq j} z_i = (-1)^{n+1}/a_n$ , a

$$\sum_j \frac{1}{z_j} = -1$$

egyenlőség adódik, amiből

$$\sum_j \frac{1}{|z_j|} \geq 1.$$

Másrészt a bal oldali összeg legfeljebb  $n/\delta_P$ , ezért  $\delta_P \leq n$  adódik. A  $(z/n + 1)^n$  polinom mutatja, hogy itt egyenlőség érhető el, tehát a kérdéses szuprérum  $n$ .  $\square$

7. Igazoljuk, hogy egy  $a_0, \dots, a_n$  valós sorozatra az alábbi két állítás ekvivalens.

a) Valamely  $L$  konstansra teljesül az, hogy ha  $\{c_k\}_{k=1}^N$  egy tetszőleges véges valós sorozat és

$$b_k = c_k a_0 + c_{k-1} a_1 + \dots + c_{k-n} a_n, \quad k = 1, \dots, N+n$$

(ahol  $c_j = 0$ , ha  $j \leq 0$  vagy  $j > N$ ), akkor

$$\sum_{k=1}^N \frac{c_k^2}{k} \leq L \sum_{k=1}^{N+n} \frac{b_k^2}{k}.$$

b) A  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  polinomnak nincs zérushelye az egységgörön.

MEGOLDÁS. Vegyük észre, hogy a feladat átfogalmazható függvénytani problémává. Legyen ugyanis

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N-1} c_{k+1} z^k,$$

$D$  az egységgörlel és  $dA$  a területmérték. Ekkor

$$\int_D |f|^2 dA = \pi \sum_{k=1}^N \frac{c_k^2}{k},$$

míg

$$f(z)P(z) = \sum_{k=0}^{N+n-1} b_{k+1} z^k,$$

és

$$\int_D |fP|^2 dA = \pi \sum_{k=1}^{N+n} \frac{b_k^2}{k}.$$

Tehát valójában azt kell igazolni, hogy az, hogy létezik  $L$  úgy, hogy tetszőleges  $f$  valós polinom esetén

$$\int_D |f|^2 dA \leq L \int_D |fP|^2 dA,$$

az ekvivalens azzal, hogy a  $P$  polinomnak nincs zérushelye az egységgörön.

Először tegyük fel, hogy  $P$ -nek nincs zérushelye az egységgörön, és legyen  $\delta$  a  $P$  zérushelyei és az egységgör közötti távolságok legkisebbike. Tekintsük a  $D_0 = \{z \mid 1 - \delta/2 < |z| < 1\}$  körgyűrűt. Ha  $P$  foka  $n$  és a főegyütthatója  $a$ , akkor nyilvánvalóan

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|a|(\delta/2)^n} |f(z)P(z)|$$

a  $D_0$  körgyűrűn, ezért elegendő igazolni, hogy valamilyen  $C_1$  konstanssal

$$\int_{|z| \leq 1-\delta/2} |f|^2 dA \leq C_1 \int_{D_0} |f|^2 dA.$$

A Cauchy-formula szerint ha  $1 - \delta/4 < R < 1$ , és  $C_R$  jelöli a 0 körüli  $R$  sugarú kört, akkor  $|z| \leq 1 - \delta/2$  esetén

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_R} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|} |d\xi| \leq \frac{1}{(\delta/4)2\pi} \int_{C_R} |f(\xi)| |d\xi|,$$

és így a Jensen-egyenlőtlenség szerint

$$|f(z)|^2 \leq \frac{1}{(\delta/4)^2 2\pi} \int_{C_R} |f(\xi)|^2 |d\xi|,$$

amiből

$$\int_{|z| \leq 1-\delta/2} |f|^2 dA \leq \frac{8}{\delta^2} \int_{C_R} |f(\xi)|^2 |d\xi|$$

adódik. Ha ezt az egyenlőtlenséget megszorozzuk  $R$ -rel és  $R$  szerint integráljuk az  $(1 - \delta/4, 1)$  intervallumon, akkor

$$\frac{1 - (1 - \delta/4)^2}{2} \int_{|z| \leq 1 - \delta/2} |f|^2 dA \leq \frac{8}{\delta^2} \int_{D_0} |f|^2 dA,$$

tehát

$$C_1 = \frac{16}{(1 - (1 - \delta/4)^2)\delta^2}$$

egy alkalmas konstans.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy  $z_0$  a  $P(z)$  egy gyöke az egységgörön, és legyen

$$f(z) = \left( \frac{z + z_0}{2} \right)^M + \left( \frac{z + \bar{z}_0}{2} \right)^M,$$

valamilyen nagy  $M$  természetes számra. Ekkor  $|f|$ -nek a  $z_0$  pontban szigorú maximuma van az egységgörön és a  $z_0$  bármely környezetén kívüli pontjaiban a  $D$ -nek  $|f(z)|$  exponenciálisan kicsi  $M$ -ben. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik az  $a$ ) pontban egy megfelelő  $L$  konstans. Válasszuk  $z_0$ -nak egy olyan  $U$  környezetét, amelyen  $|P| < 1/(2L)$ . Értelmszerűen,  $\bar{U}$ , az  $U$ -nak az  $x$  tengelyre vett tükörképe, ugyanilyen környezete lesz  $\bar{z}_0$ -nak. Ekkor

$$\int_{U \cup \bar{U}} |f|^2 dA \leq \int_D |f|^2 dA \leq L \int_D |fP|^2 dA \leq L \left( K e^{-cM} + \frac{1}{2L} \int_{U \cup \bar{U}} |f|^2 dA \right),$$

valamilyen  $M$ -től független  $K \geq 0$ , és  $c > 0$  konstanssal. Ebből pedig

$$\int_{U \cup \bar{U}} |f|^2 dA \leq 2LK e^{-cM}$$

adódik. Azonban ez nagy  $M$ -re nem lehet igaz, hiszen a  $z_0$ -nak az  $1/(2M)$  sugarú környezetében  $|f(z)| \geq 1/2$  (vegyük észre, hogy  $f$  deriváltjának abszolút értéke legfeljebb  $M/2$  a  $D$  körlapon), ezért a bal oldal legalább  $1/M^2$  nagyságrendű. Ez az ellentmondás igazolja, hogy semmilyen, a  $b$ ) pontbeli feltételeket teljesítő  $P$  polinomhoz sincs megfelelő  $L$ .  $\square$

**8.** Legyen adott  $0 < D < 1/2$  és  $0 < \alpha < 1$ . Igazoljuk, hogy létezik véges sok, 1 szerint periodikus,  $\mathbb{R}$ -en értelmezett, egynél nem nagyobb abszolút értékű  $g_1, \dots, g_d$  Lipschitz-függvény és egy  $D$ -től független pozitív  $C$  konstans, hogy minden  $x, y \in \mathbb{R}$ -re, ha  $D \leq |x - y| < 1/2$ , akkor létezik olyan  $i \in \{1, \dots, d\}$ , amelyre

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k\alpha} g_i(3^k x) - \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k\alpha} g_i(3^k y) \right| \geq C.$$

MEGOLDÁS. Az első lépésben egy segédállítást igazolunk.

**2. LEMMA.** Tegyük fel, hogy  $0 < \alpha < 1$ . Tetszőleges  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén létezik  $\delta_{x,y} > 0$ , amely  $x$  és  $y$  függvénye, valamint egy 1 szerint periodikus  $\mathbb{R}$ -en értelmezett Lipschitz-függvény  $g$ , amelyre minden  $(u, v) \in B(x, \delta_{x,y}) \times B(y, \delta_{x,y})$  esetén

$$(7) \quad \left| \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k\alpha} g(3^k u) - \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k\alpha} g(3^k v) \right| \geq C := \frac{1 - 3^{-\alpha}}{2}.$$

A LEMMA BIZONYÍTÁSA. Legyen  $\mathbb{S}^1$ , az egységkör azonosítva  $\mathbb{R}$ -el modulo 1, és  $x, y \in \mathbb{S}^1$  esetén a rövidebb körívvel mért távolságot jelölje  $|x - y|$ , ha  $x, y \in \mathbb{R}$  és  $1/2 > |x - y|$ , akkor ez megegyezik a közös  $\mathbb{R}$ -beli távolsággal.

Válasszuk meg  $N$ -et úgy, hogy

$$(8) \quad \sum_{k=N}^{\infty} 3^{-\alpha k} < \frac{1 - 3^{-\alpha}}{2}.$$

Később választunk egy alkalmas  $\delta_0 > 0$  értéket. Úgy definiáljuk  $g$ -t, hogy  $g(z) = 1$  minden  $z \in B(x, \delta_0)$  esetén, továbbá  $g(z) = 0$ , ha  $z \notin B(x, 2\delta_0)$ , és  $g$  szakaszonként lineáris és folytonos függvény  $\mathbb{S}^1$ -en.

Legyen  $T_3(x) = \{3x\} = 3x \bmod 1$ , továbbá  $T_3^0(x) = x$  és  $T_3^{k+1}(x) = T_3(T_3^k(x))$ .

Először tegyük fel, hogy  $T_3^k(y) \neq x$  minden  $k$ -ra. Ekkor létezik olyan  $\delta_0 > 0$ , hogy  $T_3^k(B(y, \delta_0)) \cap B(x, 2\delta_0) = \emptyset$  minden  $k = 0, 1, \dots, N-1$  esetén. Legyen  $\delta_{x,y} := \delta_0$ .

Ekkor minden  $v \in B(y, \delta_{x,y})$ -ra teljesül, hogy

$$(9) \quad \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k\alpha} g(3^k v) = \sum_{k=N}^{\infty} 3^{-k\alpha} g(3^k v) \leq \frac{1 - 3^{-\alpha}}{2},$$

illetve minden  $u \in B(x, \delta_{x,y})$  esetén

$$(10) \quad \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k\alpha} g(3^k u) \geq 3^{-\alpha \cdot 0} g(3^0 u) = 1,$$

ami a (7) egyenlőtlenséget eredményezi.

Most tételezzük fel, hogy létezik olyan  $k_0 \geq 1$ , hogy

$$(11) \quad T_3^{k_0}(y) = x, \quad \text{de} \quad T_3^k(y) \neq x \quad k = 0, \dots, k_0 - 1.$$

Válasszuk  $\delta_0 > 0$ -t úgy, hogy  $\{T_3^k(y)\}_{k=0}^{k_0-1} \cap B(x, 2\delta_0) = \emptyset$ . Ekkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k\alpha} g(3^k y) = \sum_{k=0}^{k_0-1} 3^{-k\alpha} g(3^k y) + 3^{-k_0\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k\alpha} g(3^k x) = 3^{-k_0\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k\alpha} g(3^k x),$$

hiszen  $g(3^k y) = 0$  az első  $k_0 - 1$  lépésben. Mivel  $\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k\alpha} g(3^k x) \geq 1$ , ezért

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k\alpha} g(3^k x) - \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k\alpha} g(3^k y) \geq 1 - 3^{-k_0\alpha} \geq 1 - 3^{-\alpha}.$$

A  $\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k\alpha} g(3^k x)$  folytonossága alapján elegendően kicsiny  $\delta_{x,y} > 0$ -ra minden  $(u, v) \in B(x, \delta_{x,y}) \times B(y, \delta_{x,y})$  esetén a (7) egyenlőtlenség fennáll.  $\square$

A FELADAT MEGOLDÁSA: Mivel  $H = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 : |x - y| \geq D\}$  kompakt halmaz, így a lemma alapján fedhető véges sok nyílt halmazzal és választhatunk alkalmas  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , függvényeket úgy, hogy bármely  $(x, y) \in H$ -ra megfelelő  $g_i$ -re a (7) egyenlőtlenség teljesüljön.  $\square$

**9.** Legyenek  $\lambda, \mu \in (0, 1)$  konstansok,  $I \subseteq \mathbb{R}$  egy nemüres nyílt intervallum, és legyen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  egy nemkonstans alulról félig folytonos,  $p: I \rightarrow \mathbb{R}$  pedig egy tetszőleges pozitív függvény. Igazoljuk, hogy az

$$f\left(\frac{\lambda p(u)u + (1 - \lambda)p(v)v}{\lambda p(u) + (1 - \lambda)p(v)}\right) \leq \frac{\mu p(u)f(u) + (1 - \mu)p(v)f(v)}{\mu p(u) + (1 - \mu)p(v)}$$

egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül minden  $u, v \in I$  esetén, ha  $f$  konvex  $I$ -n és  $\lambda = \mu$ .

MEGOLDÁS. Az első lépésben egy segédállítást igazolunk.

3. LEMMA. Legyenek  $\alpha, \beta : I^2 \rightarrow ]0, 1[$  olyan függvények, amelyekre teljesül

$$(12) \quad (\alpha(u, v) - \beta(u, v))(\alpha(v, u) - \beta(v, u)) \geq 0 \quad (u, v \in I).$$

Legyen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  alulról félig folytonos függvény, melyre

$$(13) \quad f(\alpha(u, v)u + (1 - \alpha(u, v))v) \leq \beta(u, v)f(u) + (1 - \beta(u, v))f(v)$$

minden  $u, v \in I$  esetén. Ekkor  $f$  konvex.

A LEMMA BIZONYÍTÁSA. Ha  $f$  nem konvex  $I$ -n, akkor az [5] cikk 2.1. Tétele szerint vannak olyan  $u < v$   $I$ -beli elemek, hogy

$$tf(u) + (1 - t)f(v) < f(tu + (1 - t)v) \quad (t \in ]0, 1[).$$

Alkalmazzuk ezt az egyenlőtlenséget a  $t := \alpha(u, v)$  és  $t := 1 - \alpha(v, u)$  helyettesítésekkel. Ekkor az  $f$ -re teljesülő (13) függvényegyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} \alpha(u, v)f(u) + (1 - \alpha(u, v))f(v) &< f(\alpha(u, v)u + (1 - \alpha(u, v))v) \\ &\leq \beta(u, v)f(u) + (1 - \beta(u, v))f(v), \\ (1 - \alpha(v, u))f(u) + \alpha(v, u)f(v) &< f((1 - \alpha(v, u))u + \alpha(v, u)v) \\ &\leq (1 - \beta(v, u))f(u) + \beta(v, u)f(v). \end{aligned}$$

Ezekből következik, hogy

$$\begin{aligned} [\alpha(u, v) - \beta(u, v)][f(u) - f(v)] &< 0, \\ [\alpha(v, u) - \beta(v, u)][f(v) - f(u)] &< 0. \end{aligned}$$

Tehát

$$[\alpha(u, v) - \beta(u, v)][\alpha(v, u) - \beta(v, u)][f(v) - f(u)]^2 < 0,$$

ami ellentmond az  $\alpha, \beta$  függvényekre vonatkozó (12) egyenlőtlenségnek.  $\square$

Alkalmazzuk most a fenti Lemmát az alábbiak szerint értelmezett  $\alpha, \beta : I^2 \rightarrow ]0, 1[$  függvényekkel:

$$\alpha(u, v) := \frac{\lambda p(u)}{\lambda p(u) + (1 - \lambda)p(v)}, \quad \beta(u, v) := \frac{\mu p(u)}{\mu p(u) + (1 - \mu)p(v)}.$$

Ekkor

$$\alpha(u, v) - \beta(u, v) = \frac{(\lambda - \mu)p(u)p(v)}{[\lambda p(u) + (1 - \lambda)p(v)][\mu p(u) + (1 - \mu)p(v)]}.$$

Így

$$[\alpha(u, v) - \beta(u, v)][\alpha(v, u) - \beta(v, u)] \geq 0 \quad (u, v \in I).$$

Tehát a Lemma alapján  $f$  konvex kell legyen.

Ha  $f$  konstans, akkor nincs mit bizonyítanunk. Feltehetjük tehát, hogy  $f$  egy nemkonstans konvex függvény. Ekkor  $I$  valamely  $J$  nyílt részintervallumán szigorúan monoton. Megmutatjuk, hogy létezik egy olyan  $u \in J$  pont, ahol  $f$  differenciálható, és léteznek olyan  $u$ -hoz konvergáló  $v_n < u$  és  $u < w_n$  sorozatok, hogy  $p(v_n) \rightarrow p(u)$  és  $p(w_n) \rightarrow p(u)$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

Mivel  $f$  konvex  $J$ -n, ezért differenciálható  $J$  összes pontjában kivéve egy  $T$  legfeljebb megszámlálható halmazt, továbbá  $f'(u) \neq 0$ , ha  $f$  differenciálható  $u$ -ban. Tegyük fel, hogy  $T = \{t_1, t_2, \dots\}$  és értelmezzük a  $p^* : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt így:

$$p^*(t) := \begin{cases} p(t) & \text{ha } t \in J \setminus T, \\ k & \text{ha } t = t_k. \end{cases}$$

Tehát  $p^*$  „szétzilálja”  $p$ -t a  $T$  halmazon. Blumberg 1922-es tétele szerint létezik olyan  $S \subset J$  sűrű halmaz, hogy  $p^*|_S$  folytonos  $S$ -en. Ekkor  $S \subseteq T$  nem teljesülhet! Tehát létezik  $u \in S \setminus T$ . Sőt létezik olyan  $\delta > 0$ , hogy  $]u - \delta, u + \delta[ \cap S \cap T = \emptyset$ . Így  $p$  és  $p^*$  megegyezik  $]u - \delta, u + \delta[ \cap S$ -en. Legyenek  $v_n, w_n \in ]u - \delta, u + \delta[ \cap S$  olyan sorozatok, hogy  $v_n < u$ ,  $u < w_n$  és  $v_n \rightarrow u$ ,  $w_n \rightarrow u$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

Értelmezzük most az  $F_u : J \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt az alábbi képlettel:

$$F_u(v) := \frac{\mu p(u)f(u) + (1 - \mu)p(v)f(v)}{\mu p(u) + (1 - \mu)p(v)} - f\left(\frac{\lambda p(u)u + (1 - \lambda)p(v)v}{\lambda p(u) + (1 - \lambda)p(v)}\right), \quad (v \in J).$$

Ekkor a feladat feltétele szerint  $F_u$ -nak  $v = u$ -ban minimuma van, így a fentebb megkonstruált  $(v_n)$ ,  $(w_n)$  sorozatokkal teljesül, hogy

$$F_u(u) = 0 \leq F_u(v_n), \quad F_u(u) = 0 \leq F_u(w_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Egyszerű algebrai átalakítással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_u(v_n) &= \frac{(1-\mu)p(v_n)}{\mu p(u) + (1-\mu)p(v_n)} \cdot (f(v_n) - f(u)) \\ &\quad - \frac{f\left(\frac{\lambda p(u)u + (1-\lambda)p(v_n)v}{\lambda p(u) + (1-\lambda)p(v_n)}\right) - f(u)}{\frac{\lambda p(u)u + (1-\lambda)p(v_n)v_n}{\lambda p(u) + (1-\lambda)p(v_n)} - u} \cdot \frac{(1-\lambda)p(v_n)(v_n - u)}{\lambda p(u) + (1-\lambda)p(v_n)}. \end{aligned}$$

Ezért az  $f$  függvény  $u$ -beli differenciálhatósága és a  $p(v_n) \rightarrow p(v)$  konvergencia miatt

$$0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_u(v_n)}{v_n - u} = (1-\mu)f'(u) - (1-\lambda)f'(u) = (\lambda - \mu)f'(u).$$

A  $(w_n)$  sorozat alkalmazásával hasonló módon adódik, hogy  $(\lambda - \mu)f'(u) \geq 0$ . Mivel  $f'(u) \neq 0$ , ezért ezekből az egyenlőtlenségekből  $\lambda = \mu$  következik.  $\square$

#### HIVATKOZÁSOK.

- [5] Z. Daróczy and Zs. Páles, *A characterization of nonconvexity and its applications in the theory of quasi-arithmetic means*, Inequalities and Applications (Noszvaj, 2007) (Basel) (C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, M. Plum, and Zs. Páles, eds.), Internat. Ser. Numer. Math., vol. 157, Birkhäuser, 2009, p. 251–260. MR 2758986 (2012b:26028)

**10.** Legyenek  $N$  és  $M$  rögzített pozitív egész számok,  $N \geq M$ ,  $\lambda = M/N$ . Legyen  $P$  olyan valószínűség a  $(0, 1] \times (0, 1]$  egységnégyzeten, melynek marginális eloszlásfüggvényei:  $F_x$  a  $(0, 1]$ -en egyenletes eloszlás,  $F_y$  pedig teljesíti az  $F_y(y_2) - F_y(y_1) \leq (y_2 - y_1)/\lambda$ ,  $y_1 \leq y_2$  feltételt. Minden  $k$  pozitív egészre jelölje  $\mathcal{F}^{(k)}$  az olyan  $[0, 1]$ -re koncentrált eloszlások  $F^{(k)}$  eloszlásfüggvényeinek halmazát, melyek képe folytonos töröttvonal és bármely  $[\frac{i}{kN}, \frac{i+1}{kN}]$  intervallumon  $F^{(k)}$  vagy konstans, vagy pedig  $1/\lambda$  meredekségű egyenes,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Igazoljuk, hogy létezik a  $(0, 1] \times (0, 1]$ -re koncentrált  $P^{(k)}$  valószínűségeknek egy olyan sorozata, melyek a valószínűségi mértékek gyenge konvergenciájának értelmében  $P$ -hez konvergálnak, és melyek marginális eloszlásfüggvényeire igaz, hogy  $F_x^{(k)}$  a  $(0, 1]$ -en egyenletes eloszlás és  $F_y^{(k)} \in \mathcal{F}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

**MEGOLDÁS.** Legyen  $F$  a  $P$  eloszlásfüggvénye. Legyen  $x_i = i/M$  az  $F_x$  eloszlás  $i/M$ -kvantilise,  $y_i$  pedig az  $F_y$  eloszlás  $i/M$ -kvantilise,  $i = 0, 1, \dots, M$ . Választható  $x_0 = y_0 = 0$  és  $x_M = y_M = 1$ . Legyen

$$R_{i,j} = (x_{i-1}, x_i] \times (y_{j-1}, y_j], \quad i, j = 1, 2, \dots, M.$$

Nevezzük a

$$G_j = (0, 1] \times (y_{j-1}, y_j] = \cup_{i=1}^M R_{i,j}, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

téglalapokat szürke sávoknak. Láthatjuk, hogy  $P(G_j) = 1/M$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ .

Most vegyük fel a függőleges tengelyen a  $0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1$  osztópontokat. Válasszuk meg az  $l_1, \dots, l_M$  egészeket úgy, hogy  $\bar{Z}_j = \frac{l_j}{N}$  és  $\underline{Z}_j = \frac{l_j-1}{N}$  jelöléssel a  $(\underline{Z}_j, \bar{Z}_j]$  intervallum tartalmazza az  $y_j$  értéket ( $j = 1, 2, \dots, M$ ). Mivel az  $F_y$  meredeksége legfeljebb  $1/\lambda = N/M$ , így különböző  $j$  értékekre a  $(\underline{Z}_j, \bar{Z}_j]$  intervallumok diszjunktak.

A

$$B_j = (0, 1] \times (\underline{Z}_j, \bar{Z}_j], \quad j = 1, 2, \dots, M$$

téglalapokat fekete sávoknak nevezzük. A

$$W_j = (0, 1] \times (\bar{Z}_{j-1}, \underline{Z}_j], \quad j = 1, 2, \dots, M$$

téglalapokat pedig fehér sávoknak nevezzük. Néhány  $W_j$  üres halmaz lehet. A fehér és fekete sávok együttesen az egységnégyzet egy felosztását adják. Minden egyes szürke sáv mértékét át fogjuk mozgatni a megfelelő fekete sávba úgy, hogy a fehér sávok mértéke 0 lesz.

Definiáljuk a  $\tilde{P}$  valószínűséget az egységnégyzeten. Legyen  $\tilde{P}$  egyenletes az  $(x_{i-1}, x_i] \times (\underline{Z}_j, \bar{Z}_j]$  téglalapon úgy, hogy legyen

$$\tilde{P}((x_{i-1}, x_i] \times (\underline{Z}_j, \bar{Z}_j]) = P((x_{i-1}, x_i] \times (y_{j-1}, y_j])$$

minden  $i$  és  $j$  esetén. Ezzel  $\tilde{P}$  definiált a fekete sávokon. Legyen a  $\tilde{P}$ -mértéke minden fehér sávnak 0. Legyen  $\tilde{F}$  a  $\tilde{P}$  eloszlásfüggvénye, legyenek  $\tilde{F}_x$  és  $\tilde{F}_y$  a marginális eloszlásfüggvényei. Ekkor  $\tilde{F}_x$  egyenletes eloszlás a  $(0, 1]$ -en,  $\tilde{F}_y$  pedig a  $(0, 1]$ -re koncentrált eloszlás eloszlásfüggvénye, folytonos töröttvonal, és a fehér sávok mentén konstans, a fekete sávok mentén pedig  $1/\lambda = N/M$  meredekségű. Látható, hogy a  $\infty$ -távolságra:  $\|F - \tilde{F}\|_\infty \leq 2/M$ .

Végezzük el a fenti procedúrát  $M$  és  $N$  helyett  $kM$  és  $kN$ -re,  $k = 1, 2, \dots$ . A kapott  $\tilde{P}^{(k)}$  valószínűségek marginális eloszlásfüggvényeire igaz:  $\tilde{F}_x^{(k)}$  a  $(0, 1]$ -en egyenletes eloszlás és  $\tilde{F}_y^{(k)} \in \mathcal{F}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , továbbá  $\|F - \tilde{F}^{(k)}\|_\infty \leq \frac{2}{kM}$ .  $\square$