

## **Rekurzív és explicit gondolatok a Pascal-háromszögben és háza táján**

**A dolgozat szerzőjének neve: Ujházy Márton**

A dolgozat szerzőjének munkahelye: ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium

Emailcíme: [ujhazy.marton@trefort.elte.hu](mailto:ujhazy.marton@trefort.elte.hu)

Melyik szekció előadáshoz kapcsolódik a dolgozat: középiskola

A dolgozathoz kapcsolódó előadás: Erdős Gábor: Algoritmikus gondolkodás fejlesztése

### **Bevezetés**

Erdős Gábor algoritmikus gondolkodásról szóló előadásában körbejárta azt, hogy mennyire hasznos lehet a diákok számára a rekurzív megközelítés: ha egy kombinatorika feladatban az esetszám várhatóan igen nagy, akkor az egyik lehetséges megoldási út kisebb elemszámú példákat vizsgálni, majd rájönni, hogy hogyan következtethetünk a néhányval nagyobb elemszámhoz tartozó esetszámmra.

Arról is szó volt az előadásban, hogy szerencsés esetben egy ügyes ötlettel találhatunk közvetlen, nem a korábbi elemekre visszautaló megoldási módszert, az ebből adódó összefüggést nevezzük explicit képletnek. Erre a legnevezetesebb példa talán a Fibonacci sorozatra vonatkozó zárt alak:  $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ . Utóbbi felfedezettő tanításáról készítettem vándorgyűléses dolgozatot két évvel ezelőtt.

Mostani írásomban azt szeretném körbejárni, hogy az explicit és rekurzív gondolat hogyan jár kéz a kézben, mindezt olyan példákon keresztül bemutatva, amelyek mind a kiválasztásokhoz és a Pascal-háromszöghöz kapcsolódnak.

## Ismétlés nélküli kiválasztás és rekurzió

Kiindulásként tekintsük a következő alapfeladatot:

„Kilencből Hármat” lottót játszunk: Van 9 golyónk, a golyók 1-től 9-ig vannak sorszámozva, ezek közül húzunk hármat. Hányféle lehet a kihúzott golyóhármas, ha a húzás sorrendjére nem vagyunk tekintettel?

A feladat az ismétlés nélküli kombináció alapfeladata, középszinten is tanítjuk a megoldását, leginkább a következőképpen:

**Alapmegoldás:** Először vizsgáljuk meg a problémát a sorrend figyelembevételével. Ekkor az első húzás 9 féle, a második 8 féle, a harmadik 7 féle lehet, ez összesen  $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$  eset. Azonban minden golyóhármast többször számoltunk, egészen pontosan  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ -szor, hiszen ennyiféle sorrendben jöhet ki egy golyóhármas (pl.  $7; 5; 2 = 7; 2; 5 = 5; 7; 2 = 5; 2; 7 = 2; 7; 5 = 2; 5; 7$ ). Emiatt az esetszám  $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ .

A megközelítés teljesen explicit, nem utal vissza kisebb golyószámokra. A keletkezett formula rövidebb lejegyzési módja is a középszintű tananyag része:  $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \binom{9}{3}$ .

A feladat megoldási módjai között persze rekurziós gondolatok is felbukkannak. Ha egy kisebbeknek szóló szakkörön elkezdjük feldolgozni a feladatot, és gyakorlás céljából a golyók számát és a húzásszámot is változtatjuk, érdemes az eredményeket táblázatba rendezni, és azt a diákokkal kitöltetni:

| golyószám<br>húzásszám | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|------------------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| 1                      | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 2                      |   | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 |
| 3                      |   |   | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 |

Ha a tanulókat arra biztatjuk, hogy találjanak összefüggéseket a táblázatban, valószínűleg észreveszik, hogy két egymás alatti elem összege az alsó elem jobb oldali szomszédja, például a táblázatban piros színnel jelölve  $28 + 56 = 84$ .

Nehezebben észrevehető összefüggés, hogy ha egy sort balról indulva valamelyik mezőjéig összegzünk, akkor az összeg éppen megtalálható az összegzést lezáró mező jobb oldali szomszédja alatti mezőben, például a táblázatban zöld kerettel jelölve  $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = 84$ .

Az előző, explicit formulához képest ezek már rekurzív összefüggések. Könnyen meg is magyarázhatjuk őket, tanórán vagy szakkörön a diákok gondolatainak bevonásával.

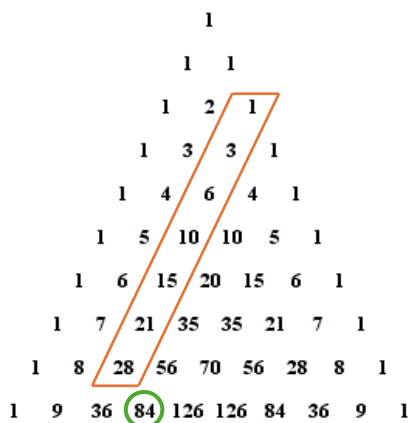
**Az első összefüggés magyarázata a „Kilencből hármat” példán keresztül:** Megkülönböztethetünk két esetet aszerint, hogy a húzott golyók közt ott van-e a kilences vagy nem. Az első esetben egy golyópárt kell kiválasztani a kilences mellé az 1-től 8-ig terjedő golyók közül, erre 28 lehetőség van (ezt a táblázat korábbi mezőjéből tudjuk), a második esetben viszont kell 8 darab golyó az első nyolcból, ez 56 lehetőség. A két eset összege éppen a teljes esetszámot adja.

Az összefüggés természetesen a Pascal-háromszögből jól ismert  $\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1}$  azonosság, melyet most meg is magyaráztunk.

**A második összefüggés magyarázata a „Kilencből hármat” példán keresztül:** Az esetszétválasztást végezzük most a legnagyobb kihúzott sorszámú golyó sorszáma szerint. Ha a legnagyobb golyó 9-es, akkor a maradék kettő golyót 8 közül választhatjuk, ez 28 lehetőség (ld. a táblázat korábbi mezőjét), ha a legnagyobb 8-as, akkor 7-ből kell még kettőt választanunk (21 lehetőség), a sort folytatva éppen a második sor elemeit kapjuk az esetek esetszámára, melyek összege éppen a teljes esetszám:  $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = 84$ .

A Pascal-háromszögből ez az összefüggés is ismert, mi átlótétel néven fogunk rá hivatkozni. Általános megfogalmazása:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$



1. ábra: Az átlótétel megjelenítése a Pascal-háromszögben

A két sztenderd azonosság után térjünk rá egy további Pascal-háromszögbeli összefüggésre. Az alábbi megközelítést Veszprémi Ferenc kollégámtól tanultam, leírva sehol nem találtam.

Az  $\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1}$  azonosság a Pascal-háromszögben azt mondja, hogy egy sor két szomszédos elemének összege éppen a közös alsó szomszédjukkal egyezik, mondhatni, bármelyik elem megkapható egy összeadással a szüleiből. De mi történik, ha rátérünk a nagyszülők szintjére?

Nézzünk egy konkrét példát, használjuk többször az előző összefüggést:

$$\binom{8}{5} = \binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} = 1 \cdot \binom{6}{3} + 2 \cdot \binom{6}{4} + 1 \cdot \binom{6}{5}$$

Tehát itt is megvan a leszármazás, csak a három „nagyszülő” közül a középső kétszeres súllyal szerepel. Folytatva a gondolatot, az utolsó sornál eggyel feljebb, a dédszülői szintre lépve egyszerű behelyettesítéssel ezt kapjuk:

$$\binom{8}{5} = 1 \cdot \binom{6}{3} + 2 \cdot \binom{6}{4} + 1 \cdot \binom{6}{5} = 1 \cdot \binom{5}{2} + 3 \cdot \binom{5}{3} + 3 \cdot \binom{5}{4} + 1 \cdot \binom{5}{5}$$

Ezen a ponton feltűnő lehet, hogy a megjelenő együtthatók mind a Pascal-háromszög megfelelő sorából származnak.

|  |  |  |  |  |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |
|--|--|--|--|--|---|--|---|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|--|---|--|---|
|  |  |  |  |  | 1 |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 1 |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 2 |  | 1  |  |    |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 3 |  | 3  |  | 1  |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 4 |  | 6  |  | 4  |  | 1  |  |    |  |    |  |   |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 5 |  | 10 |  | 10 |  | 5  |  | 1  |  |    |  |   |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 6 |  | 15 |  | 20 |  | 15 |  | 6  |  | 1  |  |   |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 7 |  | 21 |  | 35 |  | 35 |  | 21 |  | 7  |  | 1 |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 8 |  | 28 |  | 56 |  | 70 |  | 56 |  | 28 |  | 8 |  | 1 |

2. ábra: A "dédészülő-összefüggés" a Pascal-háromszögben

Folytatva a gondolatot, az a sejtésünk alakulhat ki, hogy ha néhány egymás melletti elemet a Pascal-háromszög megfelelő sorának elemeivel súlyozva összeadunk, akkor megkapjuk a közös leszármazottjukat. Az utóbbi összefüggést érdemes szakkörön néhány további konkrét példán keresztül kipróbálni, mielőtt áttérünk a formálizálásra:

$$\binom{s}{0} \cdot \binom{n}{k} + \binom{s}{1} \cdot \binom{n}{k+1} + \binom{s}{2} \cdot \binom{n}{k+2} + \cdots + \binom{s}{s} \cdot \binom{n}{k+s} = \binom{n+s}{k+s} \quad (n \geq k+s).$$

Nézzük meg, hogy mi az az explicit gondolat, amely bizonyítja a sejtésünket! Ehhez először is cseréljük ki minden  $\binom{s}{l}$  alakú együtthatót a vele egyenlő  $\binom{s}{s-l}$ -re, így a következőt kapjuk:

$$\binom{s}{s} \cdot \binom{n}{k} + \binom{s}{s-1} \cdot \binom{n}{k+1} + \binom{s}{s-2} \cdot \binom{n}{k+2} + \cdots + \binom{s}{0} \cdot \binom{n}{k+s} = \binom{n+s}{k+s}.$$

Az egyenlőség legegyszerűbben úgy indokolható, ha egy megfelelő kiválasztási feladat kétféle megoldási módját tekintjük: van  $s$  darab piros és  $n$  darab kék, egymástól megkülönböztethető golyónk, amelyek közül  $k+s$  darabot választunk a sorrend figyelembevétele nélkül, a lehetőségek számát keressük. Válaszoljuk meg a kérdést kétféle módon! A nyilvánvaló módszer eredményezi a jobb oldali kifejezést, ez nem igényel különösebb magyarázatot. Ha viszont esetszétválasztást végzünk a kiválasztott piros golyók száma szerint, akkor éppen a bal oldalt kapjuk, tehát az összefüggés igaz.

Érdemes még egy lépést tenni előre, és rápillantani arra a speciális esetre, amikor  $s = n, k = 0$ . Ha elvégezzük a behelyettesítést, az alábbi, előbbinél sokkal kompaktabb formulát kapjuk:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

## Ismétléses kiválasztás rekurzív és explicit módszerrel

Vizsgálódásunkat kezdjük megint az alapfeladat egy lehetséges megfogalmazásával:

„Hat egyforma labdát sorsolnak ki egy nyolcadik évfolyam három osztálya közt. Hányféle lehet a sorsolás végeredménye? (Ha a 8.A kap 4 labdát, a 8.B kettőt, a 8.C nullát, különbözik attól, ha a 8.A kap nullát, a 8.B négyet, a 8.C kettőt.)”

A feladatot leginkább fakultáción szokás tárgyalni, mégpedig az explicit számítási módot tanítva. E módszer vázlatosan leírva: jelöljük az osztályok elválasztását két függőleges vonallal, a hat labdát pedig hat pluszjellel, és képezzünk ezekből a jelekből 8 hosszú sorozatokat. Minden ilyen sorozat megfeleltethető pontosan egy elosztásnak, így ezek száma  $\binom{8}{2} = 28$ .

A megoldási módszer begyakorolható, de az ötlete egyáltalán nem magától értetődő. Nézzük meg, hogyan oldhatnánk meg a feladatot másként, rekurzív módon, amely sokkal természetesebb, akár általános iskolás szakkörön is tárgyalható.

**A feladat rekurzív megoldásának vázlata:** Végezzünk esetszétválasztást aszerint, hogy hány labdát kap a C osztály. Ha 0-t, akkor a hat labda hétféle módon osztható el a maradék két osztály között, hiszen a B osztálynál lévő labdák száma 0-tól 6-ig bármi lehet. Ha a C osztály 1 labdát kap, akkor hatféle eset van, stb., ha mind a hat labdát a C osztály kapja, akkor egyféle lehet a sorsolás. Ezek szerint a végeredmény  $7 + 6 + \dots + 2 + 1 = 28$ .

Az eddigi tapasztalatainkat érdemes megint táblázatba foglalni, ehhez persze más elemszámokra is el kell végezni a gondolatmenetet.

| labdák sz.<br>oszt. sz. | 0 | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
|-------------------------|---|---|---|----|----|----|----|----|
| 1                       | 1 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 2                       | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
| 3                       | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 35 |

Mielőtt továbblépnénk, felhívjuk a figyelmet arra, hogy a táblázatban megjelenik egy olyan oszlop, amikor a labdák száma nulla. Hogy ennek van egyáltalán értelme, az is kérdés, az igenlő válasz elég absztrakt gondolkodást igényel, emiatt ennek az oszlopnak a felírása nem is való minden csoportba. Viszont érdemes elkezdeni időben rászoktatni a diákokat, hiszen az alábbi gondolatmeneten is sokat egyszerűsít.

Folytassuk tovább vizsgálatainkat, nézzük meg, hogy mennyi az esetszám, ha nem három, hanem négy osztály között osztjuk a labdákat!

A táblázat adatait használva már könnyen adódik a válasz a kérdésre. Végezzünk a negyedik (D) osztály által kapott labdák száma szerinti esetszétválasztást. Ha a D nem kap labdát, akkor a maradék három osztály között kell szétosztani mind a hatot, erre 28 lehetőségünk van (lásd a táblázatot), ha a D egyet kap, akkor öt labdát kell a három osztály közt szétosztani, ami 21 lehetőség, stb. Az összegzést folytatva kijön végeredményként a 84.

A konkrét példa vizsgálata után gondoljuk végig, hogy milyen rekurzív eljárást jelent ez az esetszétválasztás: az adott mezőbeli értéket úgy kapom meg, hogy a mező felett lévő sorban lévő elemeket összegezem a mező oszlopáig.

Kapcsoljuk most össze ezt a rekurzív gondolatot az explicit képlettel! Az előző táblázatban az explicit képlet szerint most is binomiális együtthatók állnak, a megfelelőeket a harmadik sorba írva:

| labdák sz.<br>oszt. sz. | 0              | 1              | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              |
|-------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1                       |                |                |                |                |                |                |                |
| 2                       |                |                |                |                |                |                |                |
| 3                       | $\binom{2}{2}$ | $\binom{3}{2}$ | $\binom{4}{2}$ | $\binom{5}{2}$ | $\binom{6}{2}$ | $\binom{7}{2}$ | $\binom{8}{2}$ |
| 4                       |                |                |                |                |                |                | $\binom{9}{3}$ |

Azt kapjuk tehát, hogy  $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{8}{2} = \binom{9}{3}$ , ez éppen az előző fejezetben látott átlótétel egy speciális esete, amelynek egy újabb indoklását kaptuk.

Az összefüggést egyébként általánosabban is kimondhatjuk: ha a labdák száma  $n$ , és az osztályok száma  $k$ , akkor a kiosztási lehetőségek száma  $\binom{n+k-1}{k}$ , amiből azt kapjuk, hogy

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \dots + \binom{n+k-2}{k-1}.$$

## Galton-deszka tiltott lépéssel

Az eddigiekben újra és újra a Pascal-háromszög összefüggéseinél találtuk magunkat. A Pascal-háromszög elemei jelennek meg a Galton-deszka egyes pozícióihoz tartozó valószínűségeken is, hiszen az útvonalak számát egy adott pozícióig egy-egy binomiális együttható adja meg.

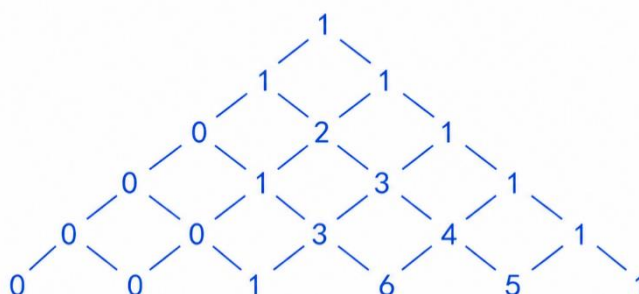
Igen érdekes az útvonalak számának kérdése akkor, ha a következőképpen módosítjuk a problémát:

*Hányféle útvonal vezet a Galton-deszka egyes pozícióiba, ha balra gurulást valamilyen titokzatos okból mindenképpen jobbra gurulás követ? Az útvonalakra egyéb megkötést nem teszünk.*

E könnyűnek egyáltalán nem nevezhető feladatnak egy konkrétabb és egyszerűbb variánsa megtalálható az (1) példatárban 243. sorszám alatt, a megoldókötet egyféle megoldást ír le hozzá. Azonban sokkal mélyebbre juthatunk, ha megpróbáljuk végiggondolni a feladatot rekurzív és explicit módon egyaránt.

### Rekurzív megközelítés

Először is szerezzünk tapasztalatot, az egyszerűen végiggondolható esetekben számoljuk össze a darabszámokat, és készítsünk belőlük ábrát:

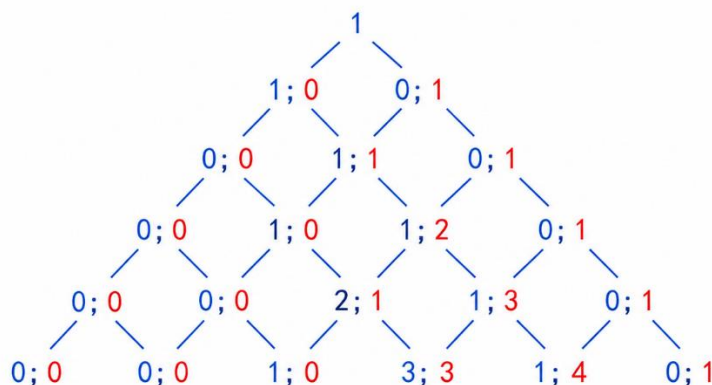


3. ábra: Esetszámok a tiltott lépéses Galton-deszkán I.

Az összes lehetőség összegyűjtése elég fáradtságos már az hatodik sor táján is, emiatt érdemes valamilyen rekurzív összefüggést keresni. Sajnos a helyzet most sokkal bonyolultabb, mint a Pascal-háromszögnél, mivel tudnunk kell, hogy egy mezőbe érkező útvonalak közül hánynak a zárólépése jobbra lefelé illetve balra lefelé, hiszen utóbbiakat nem lehet balra folytatni (a továbbiakban az egyszerűség kedvéért a balra illetve a jobbra lépés alatt balra lefelé illetve jobbra lefelé lépést értünk).

Az előbbi probléma megoldása érdekében írjunk két számot minden mezőre:

- az első, kék színű szám azt mutatja meg, hogy hány olyan út vezet az adott pozícióba, amely zárólépése bal irányú.
- az második, piros színű szám azt mutatja meg, hogy hány olyan út vezet az adott pozícióba, amely zárólépése jobb irányú.



4. ábra: esetszámok a tiltott lépéses Galton-deszkán II.

Ennek az ábrának a soronkénti kitöltése már elég mechanikus:

- egy adott mezőn álló kék szám a jobb felső szomszéd piros számával egyezik, hiszen az utóbbi felsőszomszédból kell érkezni, viszont az ebbe a felsőszomszédba érkező útvonalak közül csak azok jók, melyekben az utolsó lépés jobbra lépés volt;
- egy adott mezőn álló piros szám a bal felső szomszéd két számának összegével egyezik, hiszen itt bármelyik bal felső szomszédba érkező útvonal jobbra folytatása megfelelő.

Így meg is kaptunk egy megfelelő rekurziót arra nézve, hogy hogyan találjuk meg a feltételnek megfelelő, adott mezőbe vezető útvonalak számát. Vizsgáljuk azonban tovább a problémát!

A konkrét pozíciókról az egyes sorokra áttérve észrevehetjük, hogy egy adott sorba vezető összes, a feltételeknek megfelelő útvonalak száma soronként lefelé haladva: 1; 2; 3; 5; 8; 13; stb. Vajon igaz lenne, hogy az egyes sorokba vezető útvonalak száma most nem a kettő valamelyik hatványa, ahogy a Pascal-háromszögben, hanem valamelyik Fibonacci-szám? A válasz igenlő, indoka pedig a következő.

Vezessen az  $n$ -edik sorig összesen  $u_n$  útvonal. Az útvonalakat két csoportba lehet bontani az utolsó lépésük szerint. Az olyan útvonalak száma, amelyek vége egy jobbra lépés, éppen  $u_{n-1}$ , hiszen minden  $(n-1)$ -edik szintre menő útvonalat folytathatunk egy jobbra lépéssel. Ha viszont az utolsó lépés bal, azt szükségszerűen jobbra lépés előzte meg. Az ilyen útvonalak

mindenképpen az  $(n - 2)$ -edik szintről érkeznek egy jobb-bal lépéspárral, tehát számuk  $u_{n-2}$ . Igaz tehát a problémára az  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$  rekurzió, és mivel a sorozat első két eleme 1 és 2, ezért  $u_n$  mindenképpen Fibonacci-szám.

### Explicit megközelítés

A dolog még érdekesebbé válik, ha explicit képletet próbálunk adni egy adott pozícióba vezető, feltételeknek megfelelő útvonalak számára. Lássunk neki!

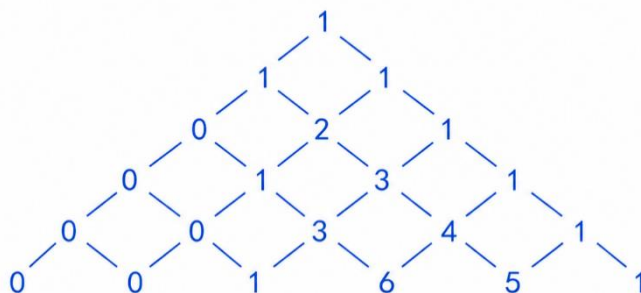
Vezessen a keresett pozícióig  $n$  darab jobbra lépés és  $k$  darab balra lépés. Jelölje a jobbra lépéseket J, a balra menőeket B. A kérdést ekkor úgy fogalmazhatjuk át, hogy hány olyan  $n + k$  hosszú,  $n$  db J-ből és  $k$  db B-ből álló sorozat van, amelyekben nem követi egymást két darab B. Feltételezhetjük továbbá, hogy  $k + 1 \leq n$ , különben nem kaphatunk megfelelő sorozatot.

A megfelelő sorozatok számát a következő trükkel számítjuk ki: ragasszunk egy kivételével minden B betű után egy J-t. Így lesz  $k - 1$  db BJ egységünk, 1 db B betűnk, és  $n - k + 1$  db J betűnk. A BJ egységeket és az egy darab B-t tekintsük egyformának, mindegyik helyett gondoljunk **B**-re. Ekkor a  $k$  db **B**-ből és az  $n - k + 1$  darab J-ből készítsünk sorozatokat tetszőleges módon, erre a lehetőségek száma a korábban látott módszer szerint  $\binom{n+1}{k}$ .

Az előbb kapott  $n + 1$  hosszú sorozatokból utolsó lépésként a sorrendben utolsó **B**-t cseréljük ki B-re, a többi **B**-t pedig BJ-re. Így már  $n + k$  hosszú sorozatok keletkeztek, amelyekre a ragasztás miatt teljesül a kívánt feltétel, és az is könnyen ellenőrizhető, hogy az összes megfelelő sorozatot megkaptuk. Összegezzük eredményünket:

**Állítás:** Az  $n$  darab jobbra és  $k$  darab balra menő lépéssel elérhető mezőbe vezető, két egymást követő balra lépést nem tartalmazó útvonalak száma  $\binom{n+1}{k}$ .

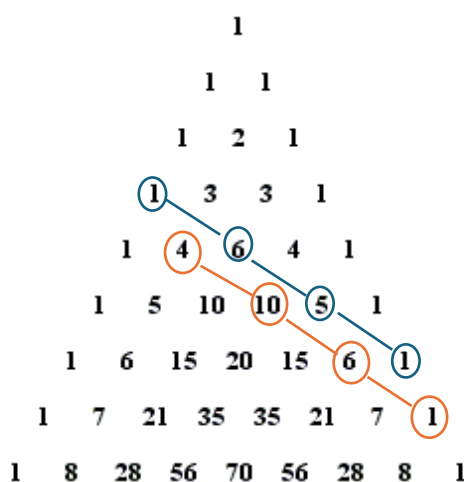
Vessük össze eredményünket a korábbi rekurzióval kapott számokkal:



Az alsó sorban a két nullát követően álló számok a zárt képlet szerint  $\binom{2+1}{3}, \binom{3+1}{2}, \binom{4+1}{1}, \binom{5+1}{0}$ , amelyek értéke valóban 1, 6, 5, 1.

Mindez pedig akkor válik a még érdekesebbé, ha összevetjük a rekurzív módon kapott eredményeinket az explicit módon kapottakkal. Korábban láttuk, hogy a sorokban lévő számok összege mindig Fibonacci-szám, most pedig az derült ki, hogy a sor elemei binomiális együtthatók, ezek szerint a megfelelő binomiális együtthatók összegei Fibonacci-számok.

Lássuk, hogy hogyan jelenik meg az előbbi ábra alsó sora a Pascal-háromszögben! Jelöljük ki a megfelelő együtthatókat kék színnel:



5. ábra: Fibonacci számok a Pascal-háromszögben

A megfelelő együtthatók éppen egy ferde (kék színű) vonalra illeszkednek, melyek összege Fibonacci szám, mégpedig a 13. Tovább lépve, ha a módosított Galton-deszkás feladatban a korábban vizsgálnál egy sorral lejjebb lépünk, az ottani útvonal-eredmények értékei  $\binom{4}{3} = 4$ ;  $\binom{5}{2} = 10$ ;  $\binom{6}{1} = 6$ ;  $\binom{7}{0} = 1$ . Ezeket szintén felfedezhetjük a Pascal-háromszögben, a fenti ábrán narancssárga vonalakkal és körökkel jelöltük őket.

Az is könnyen végiggondolható, hogy a kék és narancssárga vonallal párhuzamos egyenesek mentén összegezve kapjuk az újabb és újabb Fibonacci számokat, hiszen ezekben az átlókban található számok adják meg az előző probléma megoldásait soronként.

Így egy újabb Pascal-háromszögbeli érdekes összefüggésre kaptunk indoklást, mégpedig az eddigiekhez hasonlóan egy probléma rekurzív és explicit megoldásának összevetésével.

## Befejezés

A rekurzív és explicit módszerek külön-külön is nagyon érdekesek. Másfajta gondolkodást igényelnek, és fontos, hogy tehetséges diákjaink eszköztárának mindkét fajta megközelítés a része legyen. A kétféle megközelítési mód azonban nem két különálló eszköz, hanem egymással mély kapcsolatban lévő gondolatpár. Fontos, hogy az egyes eszközökkel kapott megoldások megszületése után reflektáljunk az eredményekre, keressük a kapcsolódási pontjaikat, mert azok összevetése a mélyebb megértés mellett akár érdekes formulák indoklását is eredményezheti.

## Irodalomjegyzék

1. **dr Gerőcs, László [et al].** *Matematika - Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.* Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó, 2013.
2. **Elekes, György.** *Kombinatorika feladatok.* Budapest : ELTE Eegyetemi jegyzet, 2002.