

Tóth Tamás

Bajai III. Béla Gimnázium, lexikontotya@gmail.com

Szekció: Felső tagozat

Előadás: Egyed László - Oldjuk meg többféleképpen!

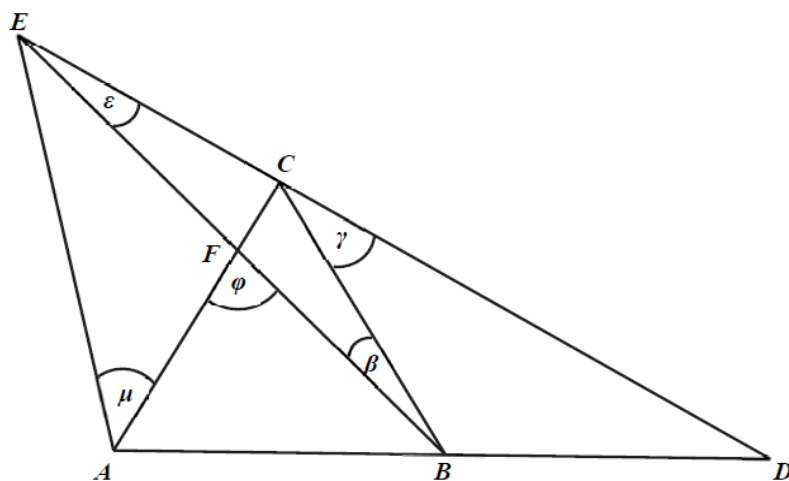
Geometria feladatok többféle megoldása

A 65. Rátz László Vándorgyűlésen számomra Egyed László „Oldjuk meg többféleképpen!” című szemináriuma volt az egyik leginteraktívabb és leghasznosabb.

A szeminárium feladatai között több geometriai probléma is helyett kapott. Az alábbiakban ezen példák közül választottam három feladat többféle megoldásának bemutatását. A választott példák a feladatsor 1., 3. és 5. feladata.

Az 1. feladat – amihez ábra is készült a feladatsorba – a következő:

Az alábbi ábrán vázolt ABC háromszög szabályos. Határozd meg az ábrán látható görög betűvel jelölt szögek nagyságát, ha tudjuk, hogy $\beta = 15^\circ$, az E , C és D pontok egy egyenesre illeszkednek és $AB = BD = EC$. (Az ábra csak tájékoztató jellegű vázlat, nem pontos méretű.)



1. megoldás:

Az ABC háromszög szabályos, így $AB = BC$, és mivel $AB = EC$, ezért teljesül, hogy $EC = BC$. Tehát az EBC háromszög egyenlőszárú háromszög. Ha $\beta = 15^\circ$, akkor EBC háromszögben igaz, hogy $\varepsilon = \underline{15^\circ}$.

Mivel $AB = BC = BD$, így a Thalész-tétel megfordítása alapján az ACD háromszög derékszögű háromszög, és a derékszög a C csúcsnál található. A C csúcsnál az ABC szabályos háromszög miatt az $ACB\alpha = 60^\circ$, így ennek pótszöge $BCD\alpha = \gamma = \underline{30^\circ}$.

Mivel $ABC\alpha = 60^\circ$ és $EBC\alpha = 15^\circ$, így $ABE\alpha = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$. Ezért ABF háromszögben az F csúcsnál lévő szög $180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$, azaz $\varphi = \underline{75^\circ}$.

E , C és D pontok egy egyenesre esnek és ACD háromszög derékszögű háromszög, így $ACE\alpha = 90^\circ$, azaz ACE háromszög is derékszögű háromszög. Mivel ABC szabályos háromszög, így $AB = AC$, valamint $AB = EC$, ezért ACE háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög, mert $AC = EC$. Két egyenlő nagyságú szögének összege 90° , ezért $\mu = \underline{45^\circ}$.

2. megoldás:

Az ABC háromszög szabályos, így $AB = BC = AC$ és minden szöge 60° -os. A $DBC\alpha = 120^\circ$, mert ez a szög az ABC háromszög külső szöge. A DBC háromszög egyenlőszárú, mert $BC = BD$, így a háromszög másik két szöge egyenlő és $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$ nagyságúak. Így $\gamma = \underline{30^\circ}$.

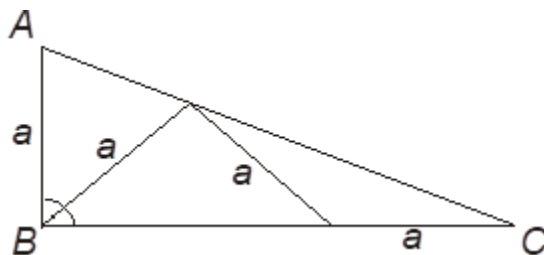
BED háromszögben így ismert két szög. $EBD\alpha = 120^\circ + \beta = 135^\circ$ és $BDE\alpha = 30^\circ$. Így $BED\alpha = 180^\circ - (135^\circ + 30^\circ) = 15^\circ$, tehát $\varepsilon = \underline{15^\circ}$.

BFC háromszögben is ismert két szög, mert $FCB\alpha = 60^\circ$ az ABC szabályos háromszög miatt, és tudjuk, hogy $\beta = 15^\circ$. A BFC háromszög F csúcsánál lévő külső szöge egyenlő ezen két belső szög összegével, azaz $\varphi = \underline{75^\circ}$.

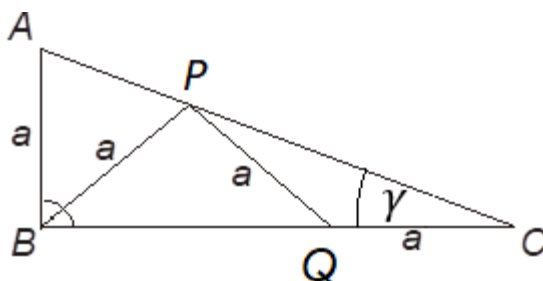
FEC háromszög F csúcsánál lévő külső szöge a φ szög ismeretében $AFC\alpha = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$. Ez a külső szög egyenlő az FEC háromszög E és C csúcsánál lévő belső szögek összegével. Mivel $\varepsilon = 15^\circ$, így $FCE\alpha = 105^\circ - 15^\circ = 90^\circ$, tehát FEC és emiatt ACE háromszög is derékszögű háromszög. $AC = EC$, így ACE egyenlőszárú derékszögű háromszög. Az egyenlőszárú derékszögű háromszögek hegyesszögei 45° -osak, így $\mu = \underline{45^\circ}$.

Az 3. feladat – amihez szintén került ábra is a feladatsorba – a következő:

Az ABC derékszögű háromszöget az ábrán látható módon három egyenlő szárú háromszögre osztottuk fel. Mekkora az ABC derékszögű háromszög hegyesszögei?



Legyen $BCA\alpha = \gamma$, az ABC háromszög AC oldalán a két egyenlőszárú háromszög közös pontja P , míg a BC oldalon a két egyenlőszárú háromszög közös pontja legyen Q .



1. megoldás:

Mivel PQC háromszög egyenlőszárú, így $QPC\alpha = \gamma$. PQC háromszög külső szöge a $BQP\alpha$, aminek nagysága 2γ . BQP háromszög is egyenlőszárú, így $QBP\alpha = 2\gamma$, és $BPQ\alpha = 180^\circ - 4\gamma$ a háromszög belső szögösszege miatt. A P pontnál lévő három szög összege egyenesszög, azaz 180° , így a BPA egyenlőszárú háromszögben a $BPA\alpha = 180^\circ - (180^\circ - 4\gamma + \gamma) = 3\gamma$. Így a szimmetria miatt $BAP\alpha = 3\gamma$.

Így az eredeti ABC derékszögű háromszög két hegyesszögének nagysága $BAC\alpha = BAP\alpha = 3\gamma$ és $BCA\alpha = \gamma$. A két szög összege 4γ , ami a derékszög miatt 90° -kal egyenlő a háromszög belső szögösszegeire hivatkozva. Ha $4\gamma = 90^\circ$, akkor $\gamma = \frac{90^\circ}{4} = 22,5^\circ$, ennek háromszorosa pedig $67,5^\circ$.

Tehát a két hegyesszög nagysága $BAC\alpha = \underline{\underline{67,5^\circ}}$ és $BCA\alpha = \underline{\underline{22,5^\circ}}$.

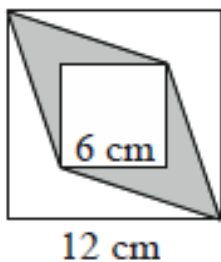
2. megoldás:

Legyen $\angle BAC = \alpha$. Mivel BPA egyenlőszárú háromszög, így $\angle BPA = \alpha$ a szimmetria miatt. Ekkor $\angle ABP = 180^\circ - 2\alpha$ a háromszög belső szögösszege miatt. Az eredeti ABC derékszögű háromszögben a B csúcsnál van a derékszög, így $\angle QBP = 90^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha - 90^\circ$. A BQP háromszög is egyenlőszárú, így $\angle BQP = 2\alpha - 90^\circ$. A BQP a PQC egyenlő szárú háromszög külső szöge, így a nem mellette fekvő két – azonos nagyságú – szög összegével egyenlő. Így
$$\gamma = \frac{2\alpha - 90^\circ}{2} = \alpha - 45^\circ.$$

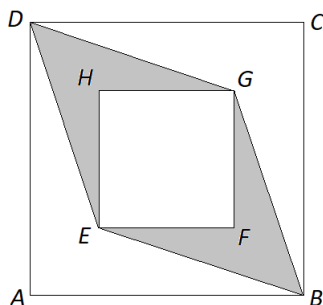
Így az eredeti ABC derékszögű háromszög két hegyesszögének nagysága $\angle BAC = \alpha$ és $\angle BCA = \alpha - 45^\circ$. A két szög összege $2\alpha - 45^\circ$, ami a derékszög miatt 90° -kal egyenlő a háromszög belső szögösszegére hivatkozva. Azaz $2\alpha - 45^\circ = 90^\circ$, így $\alpha = \frac{135^\circ}{2} = 67,5^\circ$. Ekkor $\gamma = 67,5^\circ - 45^\circ = 22,5^\circ$. Tehát a két hegyesszög nagysága ezzel a megoldással is **$\angle BAC = 67,5^\circ$** és **$\angle BCA = 22,5^\circ$** .

A feladatsor 5. feladat már nem a szögekkel kapcsolatos ismeretekre összpontosult, hanem területszámításra. Ehhez a feladathoz szintén meg volt adva egy ábra is. A feladat szövege a következő:

A 6 centiméter és 12 centiméter oldalú négyzetek megfelelő oldalai párhuzamosak és közös középpontjuk (lásd ábra). Hány négyzetcentiméter a szürke rész területe?



Érdekes az ábrán a négyzetek csúcsait megbetűzni a könnyebb magyarázat érdekében. Legyenek a nagyobb négyzet csúcsai rendre A, B, C és D , valamint a kisebb négyzet csúcsai E, F, G és H .



1. megoldás

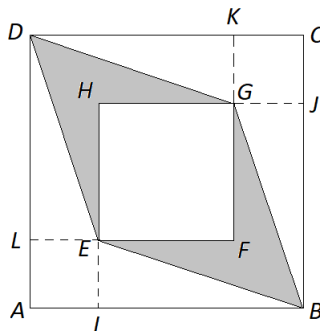
Az ábra alapján a keresett terület a $DEBG$ rombusz és az $EFGH$ négyzet területének különbsége.

Pitagorasz-tétel segítségével kiszámítható a rombusz két átlójának hossza, hiszen ezek a két négyzet egy-egy átlójával egyeznek meg. A rombusz DB átlójának hossza a nagyobb négyzet oldalhosszának ismeretében $DB = \sqrt{2} \cdot 12$ cm. A rövidebb EG átlójának hossza a kisebb négyzet oldalhosszának ismeretében $EG = \sqrt{2} \cdot 6$ cm. Így a rombusz területe az átlók szorzatának számolva $T_{DEBG} = \frac{\sqrt{2} \cdot 12 \cdot \sqrt{2} \cdot 6}{2} = \frac{2 \cdot 72}{2} = 72$ cm².

Az $EFGH$ négyzet területe $T_{EFGH} = 6^2 = 36$ cm².

Így a keresett terület nagysága $T_{DEBG} - T_{EFGH} = 72 - 36 = \underline{\underline{36 \text{ cm}^2}}$.

A következő megoldáshoz érdemes a kisebb négyzet oldalait az E és G csúcsnál meghosszabbítani a nagyobb négyzet oldaláig. Ezáltal – tovább bontva a fehér területrészeket – négy darab egybevágó derékszögű háromszög és két 3 cm oldalhosszúságú négyzet alakul ki. Az újonnan létrejövő metszéspontokat is érdemes megbetűzni. Ezek legyenek I , J , K és L pontok.



2. megoldás

Az ábra alapján a keresett terület az $ABCD$ négyzet és a fehéren hagyott területrészek különbsége. Ezek a területrészek a négy egybevágó derékszögű EIB , GJB , GKD és ELD háromszög, a két egybevágó, 3 cm oldalhosszúságú $AIEL$ és $GJCK$ négyzet, valamint a 6 cm oldalhosszúságú $EFGH$ négyzet.

Az $ABCD$ négyzet területe $T_{ABCD} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$. Az $EFGH$ négyzet területe $T_{EFGH} = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$. Az $AIEL$ és $GJCK$ négyzetek területe (T -vel jelölve) $T = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$.

A derékszögű háromszögek befogói rendre $12 - 3 = 9 \text{ cm}$ és 3 cm hosszúságúak. Így az egybevágó háromszögek területe (t -vel jelölve) $t = \frac{3 \cdot 9}{2} = 13,5 \text{ cm}^2$.

Így a keresett terület nagysága $T_{ABCD} - (T_{EFGH} + 2T + 4t) = 144 - (36 + 2 \cdot 9 + 4 \cdot 13,5) = 144 - (36 + 18 + 54) = 144 - 108 = \underline{\underline{36 \text{ cm}^2}}$.

3. megoldás

A keresett terület két egybevágó konkáv deltoid területének összege. Így például az $EBGF$ deltoid területének kétszeresét véve is megkapható a keresett terület rész nagysága.

A konkáv deltoid területe az átlói szorzatának felével adható meg. Az $EBGF$ deltoid hosszabb – a deltoid területén kívül eső – EG átlója az $EFGH$ négyzet átlójával egyezik meg. Ez Pitagorasz-tétel segítségével számítható ki, nagysága $EG = \sqrt{2} \cdot 6 \text{ cm}$. A rövidebb FB átlója egy 3 cm oldalhosszúságú négyzet átlójával egyezik meg az $ABCD$ és $EFGH$ négyzetek helyzetének ismeretében. Így az FB átló hossza $FB = \sqrt{2} \cdot 3 \text{ cm}$. Ezek alapján az $EBGF$ deltoid területe

$$T_{EBGF} = \frac{\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 6}{2} = \frac{2 \cdot 18}{2} = 18 \text{ cm}^2.$$

Így a keresett terület nagysága $2 \cdot T_{EBGF} = 2 \cdot 18 = \underline{\underline{36 \text{ cm}^2}}$.

Összegzés

Ezek a geometria feladatok összetettek és nem csupán 2-3 lépésből állnak. Ennek ellenére az a véleményem, hogy az általános iskola felső tagozatán nemcsak szakkörön érdemes feladni ezeket. Ezek a példák a geometria témakörből akár egy összefoglaló órán is alkalmasak lehetnek arra, hogy felidézzék a témakörben tanult ismereteket.

Az 1. és 3. feladat a háromszögek belső és külső szögeivel kapcsolatos ismeretek gyakorlására és átismétlésére egyaránt alkalmasak. A feladatok megoldása során az egyenlőszárú és derékszögű háromszögek egyéb tulajdonságai – mint a szimmetria vagy a Thalész-tétel – is felelevenítésre kerülhetnek.

Az 5. feladat pedig a különböző sokszögek területének és azokkal kapcsolatos oldalak közti összefüggések ismereteire ad jó terepet. A derékszögű háromszögek mellett a speciális négyszögek – négyzet, rombusz, deltoid – ismereteinek gyakorlására és átismétlésére kiváló ez a feladat. Előkerülnek a szimmetriával és az egybevágósággal kapcsolatos ismeretek, illetve a konkáv sokszög fogalma is. A Pitagorasz-tétel ismerete több megoldás során is elengedhetetlen volt, így nemcsak a geometria témakörében vehető elő ez a feladat, hanem a hatványozás és négyzetgyökvonás gyakorlása során is.

Összességében a feladatok összetettsége és az érintett ismeretek miatt ezek a példák a felső tagozat mellett a középiskolai órákon is terítékre kerülhetnek. Előzetes ismeretekre hivatkozva a 9. évfolyam óráin remek gyakorló példák lehetnek ezek. Az érettségire való ismétlés gyanánt akár a 12. évfolyamon is alkalmasak lehetnek gyakorlófeladatnak.

Ezek a példák is megerősítik azt, hogy a geometria kifejezetten jó területe a matematikának arra, hogy a diákság számára is világossá tegyünk, a feladatokat nemcsak egyetlen módszerrel lehet megoldani a matematika világában.