

Komplex számok bevezetése - tervezés mesterséges intelligencia segítségével

Molnár-Sáska Ildikó

Bevezetés

Hosszú ideje tanítok speciális matematikatagozatos osztályokban, ahol tananyag a komplex számokkal kapcsolatos ismeretek elsajátítása. Ezekben az osztályokban a Szent István Gimnáziumban szinte mindig két tanár tanít minden tanulócsoportot. Korábban sosem tanítottam ezt az anyagot, de szeretem ezt a témát. **Koren Balázs: Hatékony interaktív tananyagkészítés** c. előadása adta az ötletet, hogy a mesterséges intelligenciát segítségül hívva tervezem meg a téma bevezetését. A témát illetően pedig a **specmat szekció**ba illik be a dolgozat, noha konkrétan ezzel kapcsolatos előadás nem hangzott el idén.

Háttér

Egy ideje már használok mesterséges intelligenciát, de nem vagyok gyakorlott felhasználó. Az érdemi munkához Claude-ot (Fable 5) használtam, végső simítások javaslására pedig a Lovable-t. A Gemini ingyenes változatát kérdeztem a GitHub Pages kapcsán felmerülő kérdések esetén. Programozást is tanítok, így a HTML- és JavaScript-kódok kisebb módosítása nem okozott nehézséget.

Első prompt

Az előadásban elhangzott a PREP keretrendszer, igyekeztem ezt használni. Ez volt a beszélgetés kezdete:

AI Prompt

Egy magyarországi középiskolában, egy speciális matematikatagozatos osztályban szeretném felfedeztető módon (Pósa-módszerrel) bevezetni a komplex számokat. Ehhez kérem a segítségedet.

Nagyon fontos, hogy világos legyen nekik is a motiváció, hogy egy ilyen, egyáltalán nem intuitív dolgot miért akarunk bevezetni, honnan jön ez az igény. De ezt persze feladatokon keresztül, nem direkt közlés által.

Mit kérek?

- Egy feladatsort, megfelelő feladatokkal. Legyenek külön a gyakorló feladatok (ezeknek nincs központi szerepe a Pósa-módszerben, de a közoktatásban nem árt, ha ilyenekkel is rendelkezik a tanár.) Mindenképpen szeretném, ha megjelenne a történelmileg is hiteles motiváció, azaz a harmadfokú egyenletek megoldása. Ezen belül is a casus irreducibilis. Itt több nehéz ötlet is van, ezekre nem kell rávezetni a diákokra, csak aminél ez esélyes. Itt lehet több direkt közlés, izgalmas matematikatörténeti mese.
- Ha megítélésed szerint érdemes néhány interaktív HTML+JavaScript oldalt gyártani, amiből érthetőbb, szórakoztatóbb lesz az anyag, akkor ilyeneket is szeretnék.
- Egy dolgozat feladatsort.

A PREP (vagyis Prompt, Role, Explicit instructions, Parameters) jó iránymutatás, de nem követtem minden részletét illetően, némi szabadsággal alkalmaztam. A prompt elején a P és az R részek összeolvadnak, de az LLM számára világos lett a pontos kontextus. Az E rész a prompt jelentős része, és a második P integrálva van az E-be, illetve kevésbé van specifikálva. Itt úgy éreztem, hogy döntse el a Claude, hogy mit tart az output leghatékonyabb formájának.

A kérés kapcsán 3 darab .md és két darab .html fájlt kaptam, az előbbieket a Claude-ban ízlésesen megjeleníthetők. Az utóbbiakban természetesen a HTML nyelvű kód mellett viszonylag sok JavaScript kód is volt.

Az első válasz is már elég színvonalasra sikeredett, de azért még bőven tartalmazott számomra nem megfelelő elemeket. Ezeket átgondolva következett a második prompt, válaszul a Claude válaszára. Ebben törekedtem arra, hogy egyértelmű részfeladatokra tudja bontani a javítást, és arra is, hogy ezek olyan javítások legyenek, amik érdemben már nem módosítanak a jó koncepción, de a meglévő hibákat orvosolják.

Második prompt

AI Prompt

Kezdetnek remek.

Az alábbi javaslataim vannak:

- 1) A Cardano gép html aljából vedd ki a Bombelli számolás részt. (Egyrészt pongyola a szöveg, másrészt nem szépek a gyökjelek.) Hasonlóan a lap alján a Cardano-képlet sem kell.
- 2) Komplex sík html: A kérdések a felfedezéshez rész ne legyen látható, az nem jó, ha a diákok látják. Kerüljön be a feladatsor dokumentumba, abban már eddig is volt tanári útmutató szerű rész. Ugyanitt az egységgyököknél a kitevő ne az egységgyökök listája alatt, hanem felett legyen állítható. (Különben állítás közben elmozdul az egér alól a csúszka.)
- 3) A Pósa-módszerben szálak vannak (thread), ezt a kifejezést használd. De itt egymás utáni részek vannak, ez az egész egy nagy szál. Nem érdemes párhuzamosan futtatni őket, ezek egymásra épülnek, a szálak igazi értelme, hogy párhuzamosan haladhatnak. Ezek egyszerűen lehetnek csak kisebb részei az egész felépítésnek, a nevük legyen inkább fejezet.
- 4) A "Bizonyítsd be" kezdetű feladatokra szükség van, de a Pósa-módszerben kevésbé szívesen áruljuk el előre az állítást. Legyen nyitott a kérdés. Pl. amikor azt kell belátni, hogy egy algebrai kifejezés egyenlő egy egész számmal, akkor ahelyett, hogy megmondanánk, hogy mi ez az egész, lehet azt kérni, hogy "Hozd egyszerűbb alakra". A 7.3-as feladat sokkal érdekesebb úgy, hogy tudjuk a 3 komplex számról az egyenletet, és akkor mondjuk meg, hogy milyen alakzatot alkot a három szám a síkon.
- 5) A dolgozat matektagozatos diákoknak nagyon könnyű, és inkább mechanikus. Amit mérni akarunk, az a gondolkodás, kreativitás. Legyenek olyan feladatok is, amik nem ennyire sablonosak. A bónusz feladat egész jó, ha úgy szól a kérdés, hogy melyik egész számmal egyenlő a megadott kifejezés. De ez lehet normál feladat, nem kell bónusznak lennie.

Claude a javításokat szépen elkészítette, bár a szövegben még mindig maradtak olyan megfogalmazások, amelyekkel nem voltam elégedett. De az érdemi részt már megfelelőnek találtam.

Harmadik prompt

Ezek után azt gondoltam, hogy szerencsés lenne, ha egy külső szemlélő is megnézné a koncepciót, a konkrét feladatokat, megoldásokat. Koren Balázs ajánlotta a Lovable-t, így ennek ingyenes verzióját kértem meg, hogy lektorálja a Claude munkáját. A prompt ez volt:

AI Prompt

Egy magyarországi speciális matematikatagozatos osztályban szeretném tanítani a komplex számokat, felfedeztető szemléletben, Pósa-módszerrel. Ehhez állítottam össze egy tervet. 3 pdf-et találsz itt: <https://drive.google.com/drive/folders/...> az elsőben van az órai feladatok felépítése, a másodikban gyakorló feladatok, a harmadikban egy lehetséges dolgozat. Illetve készítettem két weboldalt, ami interaktív, és segít jobban megérteni a dolgokat, ezeknek a kiindulási oldala ez: <https://msildiko.github.io/komplexszamok/> Az lenne a kérésem, hogy nézd át ezeket, javasolj értelmes módosításokat, illetve javasolhatsz egyéb, hasznos interaktív alkalmazásokat, amiket el tudsz készíteni, és be lehet építeni az anyagba.

A Lovable elégedett volt a Claude produktumával, de érdemben növelte az összeállított anyag színvonalát.

A felépítésben is észrevett fontos didaktikai dolgokat, ezek megleptek engem, mert érdemi, kifejezetten jó észrevételek voltak. Erre nem számítottam, ez olyasmi szint, ami a tanároknak is nehezen megy.

A gyakorló feladatsorhoz is volt pár érdemi javaslata.

A dolgozat kapcsán azt vetette fel, hogy két feladat elég hasonló ötletre épül, ami nem szerencsés, és nem is való egy specmatos osztálynak. Javasolta, hogy azt cseréljük le, és témát is javasolt, azonban konkrét feladatot nem. Kértem, hogy javasoljon konkrét feladatot, és adja meg a megoldást is. Ezzel nem voltam igazán elégedett, ezért megtartottam az eredeti változatot. (Volt még egy másik észrevétele is, ami arra vonatkozott, hogy az egyik feladat megoldása hibás. De a következő mondatban már belátta, hogy mégsem hibázott a Claude, és a megoldás helyes.)

Ezen kívül javasolt pár interaktív alkalmazást, amivel még inkább érthetővé lehet tenni az anyagot a diákok számára. Több ötlete is volt, ebből én kettőnek a megvalósítását kértem tőle.

- Az első azt tudja, hogy egy komplex polinomot „ábrázol”, abban az értelemben, hogy a komplex síkon minden z értékére kiszámítja $|f(z)|$ -t, és ezt egy szürkeárnyalatú skálán színnel jelöli. Ha $|f(z)| < 0,1$, akkor fekete a síkon a z -hez rendelt szín, és minél nagyon $|f(z)|$, annál világosabb a hozzárendelt szín. (A Lovable eredetileg azt javasolta, hogy az $\arg(z)$ -t ábrázoljuk különböző színekkel, és akkor a gyökök jól látszanak, hiszen ott ez az ábra „örvénylik”. De szerintem ez ezen a ponton még nem annyira lesz könnyen emészthető a többségnek, ezért változtattam meg a html-t erre a fent említett verzióra.)
- A második pedig kifejezetten tetszett, mert erre eddig így nem is gondoltam. Ott is vizualizációt javasolt, de ott a redukált egyenletekkel kapcsolatban. Az az ötlete volt, hogy tekintsük az $x^3 + px + q = 0$ redukált harmadfokú egyenleteket és ezekhez rendeljük hozzá a (p, q) pontot a síkon. És a pont színét az határozza meg, hogy az adott redukált egyenletnek hány gyöke van. Ez szépen kirajzolja a határt is, ahol 3 gyökből 1 lesz, vagy fordítva.

A Lovable-t arra is kértem, hogy az új fájlok megjelenése minél hasonlóbb legyen a két, már meglévő fájl megjelenéséhez. Ezt a kérést is remekül teljesítette.

Néhány észrevétel

A feladatsoron bőven lehet finomítani, de ez már a csoporttól is függ, a felfedezettő tanításban ez lényeges elem, nincs minden csoportra működő feladatsor, felépítés. Például az, hogy a 2.5. és 2.6. feladatokat hogyan adja fel a tanár, nagyon függ a csoporttól. Egy kevésbé erős csoportban jó az a megoldás, amit a Claude javasol. De én egy erősebb csoportban inkább egyszerre adnám fel a feladatot, és nem mondanék egy szót sem arról, hogy szoros kapcsolat van közöttük.

A 4.7. nagyon fontos feladat. A számfogalom bővülésénél mindig hangsúlyozom, hogy a bővítéstől kapunk valamit, amink eddig nem volt, de szinte mindig veszünk is valamit. A komplex számok esetében két dolgot szoktam hangsúlyozni: az egyik, hogy nincs olyan rendezés, amit eddig megszoktunk, a másik, hogy a gyökvonásnál pont emiatt nincs igazán értelme kitüntetni egy gyököt. Ez a feladat ennek önálló feldolgozását segíti. Az azonban, hogy ellentmondás-e az, hogy $-1 > 0$, ahogy a Claude javasolja, az nálam a csoport erősségétől függ. Hiszen valójában ez még nem jelenti azt, hogy nem rendezhetők a komplex számok a rendezési axiómáknak megfelelően, mert elképzelhető lenne, hogy úgy rendezhetők, hogy $-1 > 0$. Itt még folytatnám a bizonyítást azzal, hogy akkor viszont $1 < 0$, és ez ellentmond annak, hogy minden a esetén $a^2 > 0$, amit már korábban a Claude is felhasznált, hiszen így jutott el oda, hogy $i^2 = -1 > 0$.

A 7.2. feladat ötlete szellemes, de nyilván nem adnám fel úgy, hogy elmondom a jobb oldalt, illetve

a feladat szövegében megmondom, hogy milyen módszerrel „kell” megoldani.

A dolgozatot lényegében teljesen úgy hagytam, ahogy a Claude javasolta. Ez azonban a Claude ítéletével ellentétben egy elég könnyű dolgozat lenne, és ezek eléggé sablonos feladatok. Itt azért elég határozottan azt éreztem, hogy azt ezekkel a promptokkal nem tudtam elérni, hogy tudassam vele, hogy milyen is egy jó specmatos dolgozat.

A fenti észrevételek a teljesség igénye nélkül készültek. A célom a megemlítésükkel az volt, hogy különböző, még meglévő problémákra felhívjam a figyelmet, ezzel ismét hangsúlyozva, hogy nem gondolom, hogy ez az anyag tökéletes lenne.

A három pdf szövegezése több helyen nem tetszik nekem, nem fogalmaznék így. De ezeket nem módosítottam, mert egy konkrét felhasználás esetén a végleges koncepciót érdemes tökéletesre csiszolni. Azonban a szöveg mindenhol eléri azt a szintet, ami alapján a tanár számára világos, hogy mit tud kezdeni az adott feladattal, mi a javasolt megoldás stb.

A végeredmény

Egy tananyagfejlesztésnek sosincs vége, így talán túlzás végeredményről beszélni. De ebben kontextusban most van egy végeredmény, ami áll három pdf fájlból ebben a mappában, illetve 4 html-ből ezen a weboldalon.

Az .md fájlokat a Dillinger webalkalmazással szerkesztettem, és ott konvertáltam pdf-fé.

Az én megítélésem szerint a befektetett munkaórákhoz képest egy színvonalas anyag keletkezett. MI nélkül ez nekem sokkal több idő alatt lett volna kész, és egész több dolog is van benne, amihez a régi módszereimmel nem jutottam volna el.

Zárszó

A fent említett dokumentumok bárki számára elérhetőek, így szabadon tovább is fejleszthetőek. Akár saját kézzel, fejjel, de akár ugyanezekkel az MI modellekkel, vagy akár másokkal.

Ezen tapasztalat alapján mindenkit biztatok arra, hogy próbálja meg hasonló módon bevonni a MI-t, de természetesen arra is, hogy nagyon kritikus szemmel nézze a kapott produktumot.