

Feladattorony kerületi szögek, húrnégyszögek témaköréhez

Középiskola

Taricska Dávid:

*Tehetséggondozás a geometrián keresztül
szemináriumhoz kapcsolódva*

Meiszterics Zoltánné

Pécsi Janus Pannonius Gimnázium

meiszteragi@gmail.com

Bevezetés

A szeminárium előzetes anyaga nem szerepelt az absztraktban, így a címére hagyatkoztam, a szeminárium sok dologban megerősített, sok mindent hasonlóan látok. Betekintést kaphatott a hallgatóság a kolléga napi tehetséggondozó munkájába. A geometria témán keresztül könnyen fel lehet kelteni a bizonyítási igényt és bizonyítási módszerekre is rá lehet mutatni.

A PTE partnerintézményeként iskolánkban összefüggő tanítási gyakorlaton vannak a atnév során egyetemi hallgatók, akik a tanári pályára készülnek. Optimális esetben egy leendő tanár nagyon sok diákkal találkozott már hallgató (sőt középiskolás) korában, sokszor magyarázott társainak és ismertek előtte azok a helyzetek, amelyekben nem egyszerűen az a feladat, hogy bemutassunk egy-egy feladatmegoldást, hanem az, hogy megtanuljuk a minimális segítség elvét, azaz a legkevesebb előremutató kérdéssel a legtöbb gondolkodást és eredményt kicsalogatni a diákokból. Tapasztalatom szerint a hallgatóknak és a pályakezdő kollégáknak sokszor az okozza a legnagyobb nehézséget, hogy milyen kérdéseket tudnak föltenni a diákoknak, hogyan tudják előrevinni őket a gondolkodás folyamatában úgy, hogy ne mondják el közvetlenül a megoldást. Az összeállított feladatsor megkísérli megmutatni azt, hogy mikre figyeljünk tanárként egy-egy közös gondolkodás, feladatmegoldás során.

Feladattorony

A szemináriumon elhangzott „feladattorony” kifejezés jól leírja az olyan feladatsort, ahol egymásra épülő feladatokkal találkoznak a diákok. Ilyen feladatsort állítottam össze, amit a szakköri munka során használni tudok a csoportjaimban. A kitűzött feladatok után megjegyzésként összeszedtem néhány segítő, továbblendítő kérdést és a feladatok diszkussziójára is kitérek. Talán ez az a rész, ami segíthet egy kevésbé gyakorlott egyetemi hallgatónak.

A tehetséggondozó munka a tanórák utáni hetedik, nyolcadik órában valósul meg. Ekkor a diákok általában már fáradtak, nem könnyű munkára bírni őket. Érdemes lehet a feladatsorokkal már korábban megismertetni őket, elküldeni nekik, feltenni a közös csoportba, hiszen mindig akad néhány diák, aki „nem bír magával” és otthon előre foglalkozik a feladatokkal. Jó lehet, ha a szakkörökön ők is meg tudják mutatni a megoldásaikat a csoport előtt, a táblánál dolgoznak,

magyaráznak egymásnak. Tapasztalatom szerint nagyon sokat tanulnak egymás magyarázataiból, akár hibáiból, tévedéseiből is. Persze ez akkor működik, ha a csoport már ismeri egymást, összeszokott, egymás erőseit és hibáit is jól tolerálják.

Elméleti háttér

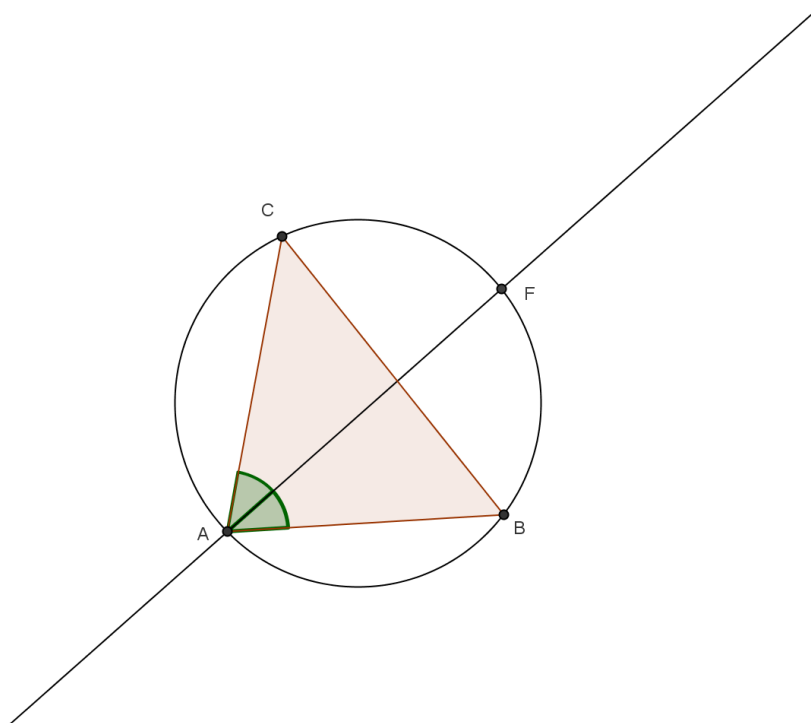
Természetesen minden feladatmegoldás előtt nagyon fontos, hogy pontosan ismerjük azokat a fogalmakat, tételeket, amik előkerülnek a feladatokban. A következő feladatsorban egymásra épülő, fokozatosan nehezedő feladatokon keresztül lehet eljutni az OKTV szintű feladatokig. Fontosnak gondolom, hogy a feladatmegoldás előtt feltérképezzük a diákok tudását, legalább szóban átismétljük azokat a fogalmakat, amikkel a feladat szövegének olvasása, majd a megoldás során találkozunk: háromszög nevezetes vonalainak fogalma és az azokra vonatkozó egyszerű tételek, kerületi szög, ív, húr, átmérő fogalma, Thalesz-tétel, húrnégyszög fogalma és tétele kerülnek elő a következő feladatsorban. Ezen elméletek a 10. évfolyam során kerülnek elő, de ezt az anyagot inkább a 11. évfolyamra érdemes bevinni szakkörökre.

1. feladat (Lásd [1], 62. oldal, 967. feladat)

Rajzoljuk meg a háromszög egyik csúcsához tartozó belső szögfelezőt, és hosszabbítsuk azt meg a köré írt körig. Mutassuk meg, hogy a szögfelező meghosszabbításának a körrel való metszéspontja egyenlő távol van a másik két csúctól.

1. feladat megoldása:

Mivel a szögfelező két egyenlő részre osztja a szögszárak által közrefogott ívet, így a két ívhez tartozó húr is egyenlő hosszúságú.



Megjegyzés: megbeszélhetjük a következő kérdéseket

- mi a szögfelező definíciója, mit tudható a keletkezett körívek hosszáról, mi következik ebből a húrok hosszára?

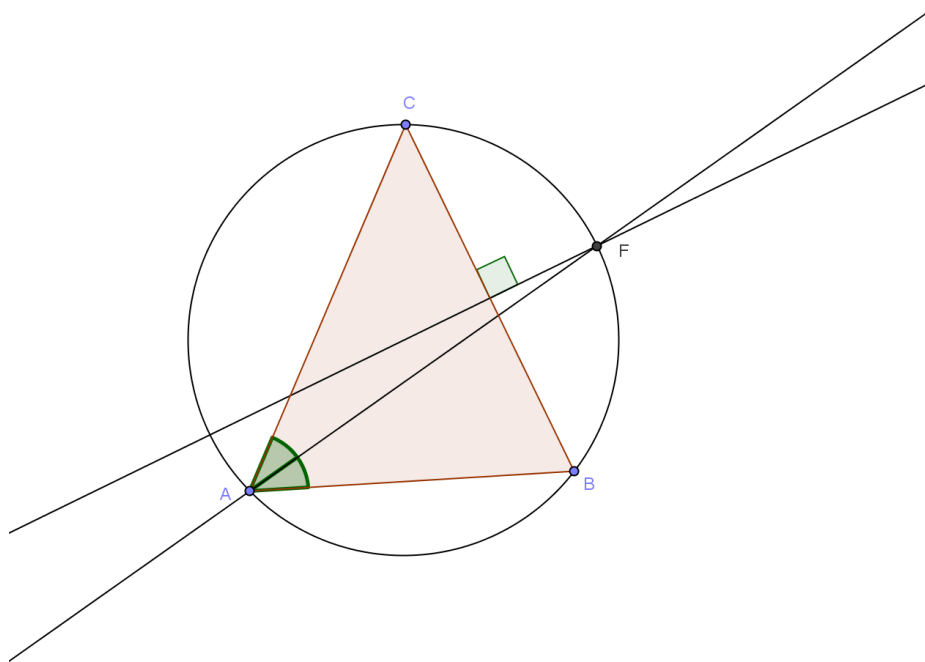
2. feladat (Lásd [1], 62. oldal, 968. feladat)

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög bármelyik szögének felezője és a szemközti oldalfelező merőlegese a háromszög köré írható körön metszik egymást.

2. feladat megoldása:

Az előző feladatból következően, mivel az A csúcsra illeszkedő belső szögfelezőnek a háromszög köré írható körrel vett F metszéspontja egyenlő távol van a háromszög B és C csúcsától, így szükségszerűen illeszkednie kell az F pontnak a BC oldal felező merőlegesére.

Megjegyzés: amennyiben a háromszög egyenlőszárú ($AC=AB$), akkor ez a két egyenes illeszkedik egymásra.

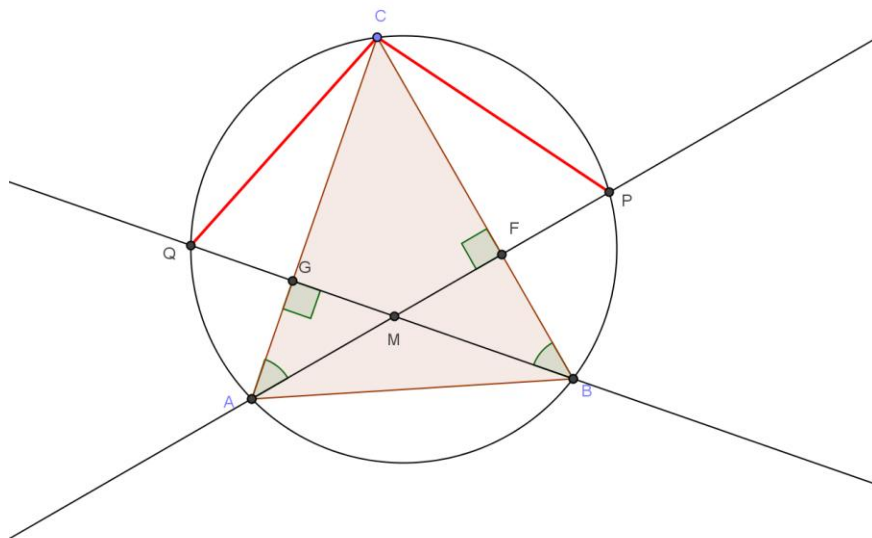


3. feladat (Lásd [1], 62. oldal, 970. feladat)

Igazoljuk, hogy a háromszög két magasságegyenesének meghosszabbításai a harmadik csúctól egyenlő távolságra metszik a köré írt kört.

3. feladat megoldása:

Az AFC_{Δ} és a CGB_{Δ} mindegyikében a C csúcsnál lévő szög közös és mindegyik háromszögben van még egy derékszög, így az A és B csúcsnál megjelölt szögek egyenlők. Ebből következik, hogy azon ívek is egyenlő hosszúak, amelyekhez tartozó kerületi szögek. Az ívek egyenlőségéből következik a húrok egyenlősége.



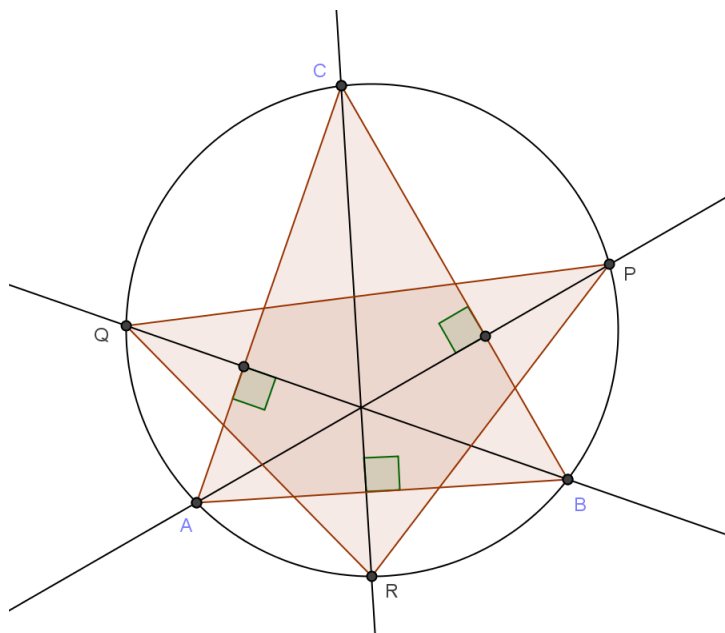
Megjegyzés: természetesen a diákokat célszerű fordított gondolkodás módszerével rávezetni, azaz feltenni azt a kérdést, hogy

- ha $CP = CQ$ teljesül, akkor abból mi következik (nyilván $CP = CQ$ ívek egyenlősége);
- kerületi szögek tétele alapján mi mondható el az egyenlő hosszúságú ívekhez tartozó szögekről (nyilván egyenlő nagyságúak);
- az egyenlő nagyságú szögek mely háromszögekben találhatóak meg (és itt lehetne megfelelő háromszögeket keresni, esetleg az AFC_{Δ} és a CGB_{Δ} megtalálása mellett AMG_{Δ} és a FMB_{Δ} -re is lehet utalni).

4. feladat (Lásd [1], 62. oldal, 972. feladat)

Hosszabbítsuk meg a háromszög magasságait a köré írt körig. Mutassuk meg, hogy a három metszéspont alkotta háromszög szögfelezői éppen az eredeti háromszög magasságvonalai lesznek.

4. feladat megoldása:



Az előző feladatból következően $CP = CQ$. Így a húrokhoz tartozó kerületi szögek egyenlőségéből következik, hogy CR szögfelező a $PQR\Delta$ -ben. Hasonlóan belátható PA és QB esetében, hogy szintén szögfelezők.

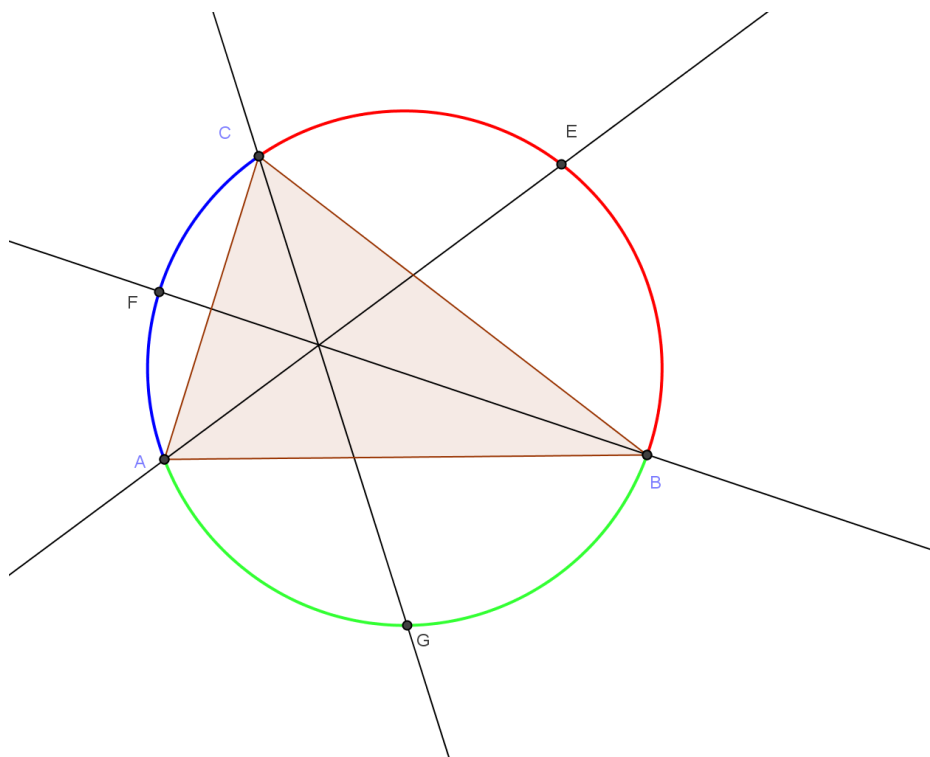
Megjegyzés: szükséges vázlatot rajzolni és azon gondolkodni. Érdekes lehet akár az óra elején feltenni ennek a feladatnak a kérdését az előzetes feladatok megoldása előtt, esetleg nem elárulva, hogy a $PQR\Delta$ -nek melyik nevezetes vonala lesz az eredeti háromszög magasságvonala. Mindig akad a csoportban egy-két diák, aki nagyon jól érzi magát az állítást és sokkal gyorsabban gondolkodik, mint a többiek.

5. feladat (Lásd [1], 65. oldal, 1013. feladat)

Szerkesszünk háromszöget, ha ismertek szögfelezőinek a köré írt körrel való metszéspontjai.

5. feladat megoldása:

I. megoldás:



Mivel a szögfelezőknek a körrel való metszéspontjai és a csúcsok három egyenlő ívpárra osztják a háromszög köré írt kört, így vezessük be a következő jelölést:

$$CE = EB = a \quad BG = GA = c \quad AF = FC = b$$

Mivel $2a + 2b + 2c$ egyenlő a kör kerületével, így $a + b + c$ a kör félkerülete. Mivel $a + b$, $b + c$, $c + a$ ismertek, így a , b és c külön szerkeszthetők.

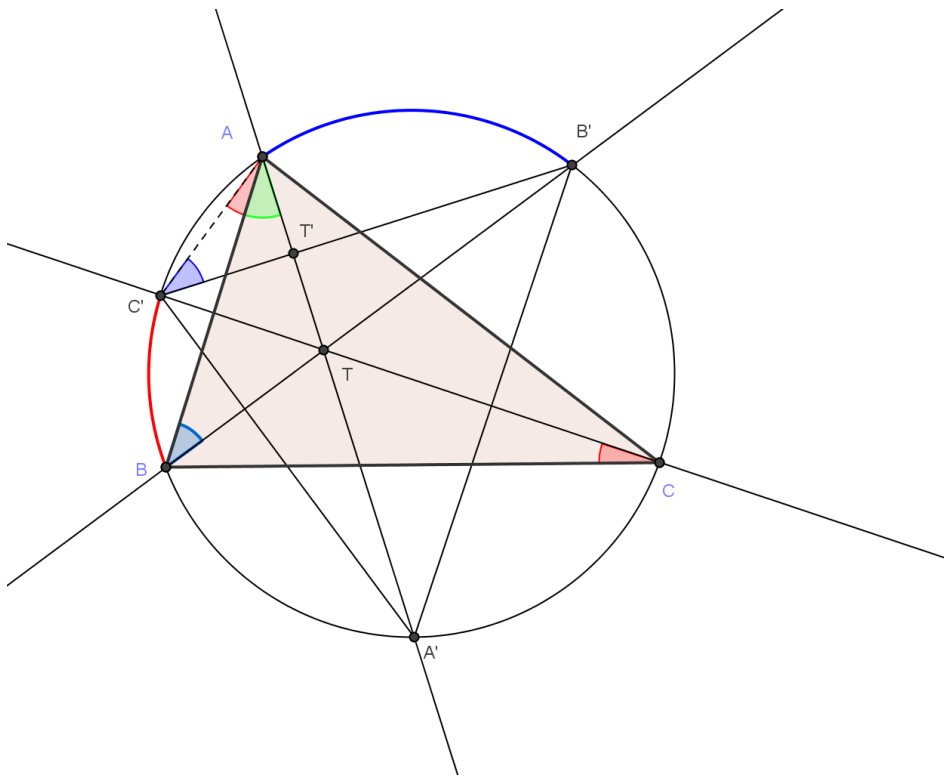
Megjegyzés: vázlatára készítése fontos, hiszen azon lehet jól gondolkodni. Ez a megoldás feltételezi, hogy a körívek ismeretéből tulajdonképpen a szerkesztést a húrokkal kell elvégezni. A megoldás inkább algebrai jellegű, szimmetria-megfontolásokat tartalmaz, egész könnyen rávezethetők a diákok.

Lehetséges kérdések:

- vannak-e egyenlő hosszúságú ívek, hogyan jelöljük ezeket (a , b , c);
- melyek az ismert ívhosszak ($a + b$, $b + c$, $c + a$);

- mely hosszakat kellene meghatározni az eredeti háromszög megszerkesztéséhez (2a, 2b és 2c).

II. megoldás:



Az egyformán jelölt szögek egyenlőségéből következik, hogy az $AT'C'_\Delta$. A-nál és C'-nél fekvő szögeinek összege az ABC_Δ szögösszegének felével egyenlő, így az $AT'C'_\Delta \sphericalangle = 90^\circ$. AA' ezért magassága az $A'B'C'_\Delta$ -nek.

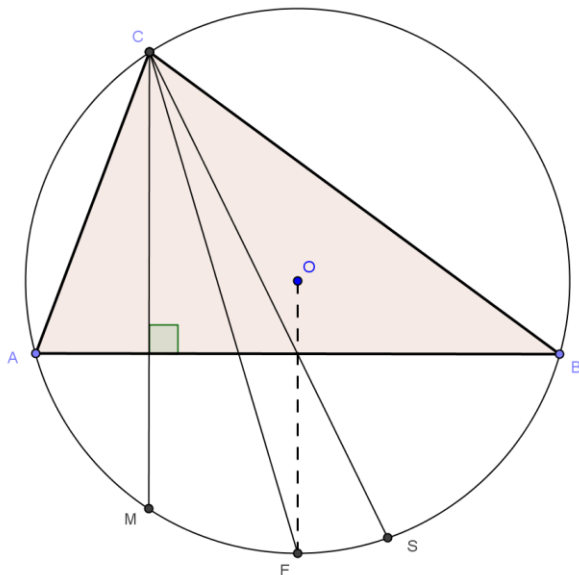
Megjegyzés: a vázlat elkészítése után érdemes gondolkodni. Ez a megoldás nem kézenfekvő, nehezebb, hiszen be kell húzni egy olyan vonalat, amit nem feltétlenül egyértelmű megtalálni. Miért azt rajzoljuk be? Hogyan lehetne erre rávezetni a diákokat? Egyáltalán be kell-e ezt rajzolni vagy közvetlenül meghatározható az előző feladatokból?

- mit tudtunk meg a 4. feladatból, milyen vonalaknak felelnek meg a szögfelezők (magasságvonalak);
- hogyan szerkesztenénk meg ennek segítségével az eredeti háromszöget?

6. feladat (Lásd [1], 65. oldal, 1014. feladat)

Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott az a három pont, amelyben az egy csúcsból kiinduló magasság, szögfelező és súlyvonal a köré írt kört metszik.

6. feladat megoldása:



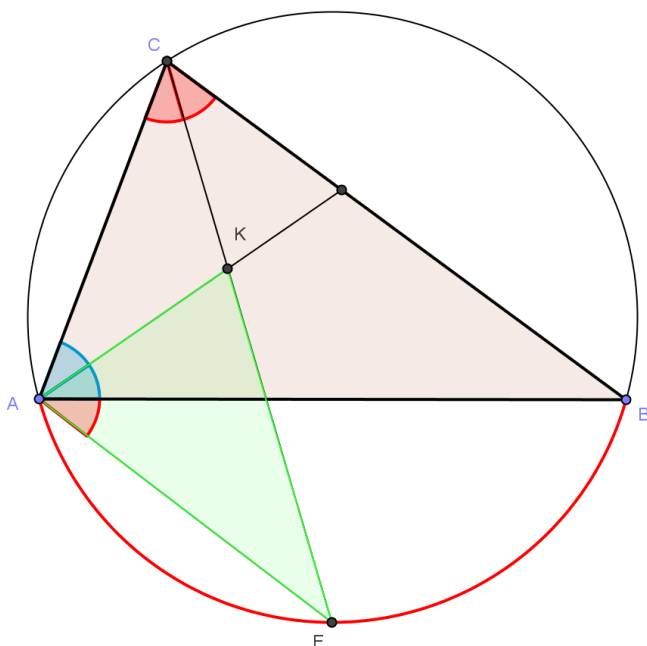
A háromszög köré írt kör középpontja O . A C -hez tartozó magasságvonal, szögfelező, súlyvonal a köré írt kört az M , F , S pontokban metszik. Mivel F felezi az AB ívet (1. feladat alapján), OF párhuzamos MC -vel, így C szerkeszthető. FO és CS metszéspontja az AB felezőpontja, így A és B is szerkeszthető.

Megjegyzés: érdemes mindig vázlatot készíteni a szerkesztés előtt. A vázlatábrába berajzolva az adatokat a szerkesztés elég kézenfekvő. Tulajdonképpen a magasságvonal és az oldalfelező merőlegesek párhuzamosságát kell észrevenni. A definíciókra rákérdezve ez azért észrevehető.

7. feladat (Lásd [1], 68. oldal, 1046. feladat)

Legyen F az ABC háromszög köré írt kör C -t nem tartalmazó AB ívének felezőpontja. Mutassuk meg, hogy F ugyanolyan távol van a háromszögbe írt kör középpontjától, mint az A és B csúcsoktól.

7. feladat megoldása:



Legyen K pont a belső szögfelező egyenesek metszéspontja (a beírható kör középpontja). Az 1. Feladat alapján $FA=FB$. Az ábrán azonos színnel jelölt szögek egymással egyenlők. Az $AKF\angle$ az $AKC\Delta$ külső szöge, így egyenlő nagyságú $KAF\angle$ -gel. Tehát $AFK\Delta$ egyenlőszárú, így $FA=FK$, ezzel beláttuk az állítást.

Megjegyzés: a vázlatábrán jelöljük be az adatokat és jelöljük F pontot. Több kérdés felmerül

- mely szakaszok egyenlőségét ismerjük korábbi feladatból (nyilván $FA=FB$);
- mely szakaszok egyenlőségét kell belátnunk (nyilván $FA (=FB)$ és FK);
- a $KAF\Delta$ milyen speciális tulajdonsággal kell, hogy rendelkezzen (egyenlőszárú);
- hogyan bizonyíthatjuk rá az egyenlőszárúság tulajdonságát (szögeket nézzünk);
- mely ívekhez tartozó szögeket érdemes jelölni ($FA=FB$, így a hozzájuk tartozó kerületi szögek egyenlők, azaz $ACF\angle = FCB\angle = FAB\angle$, amit érdemes azonos módon jelölni);

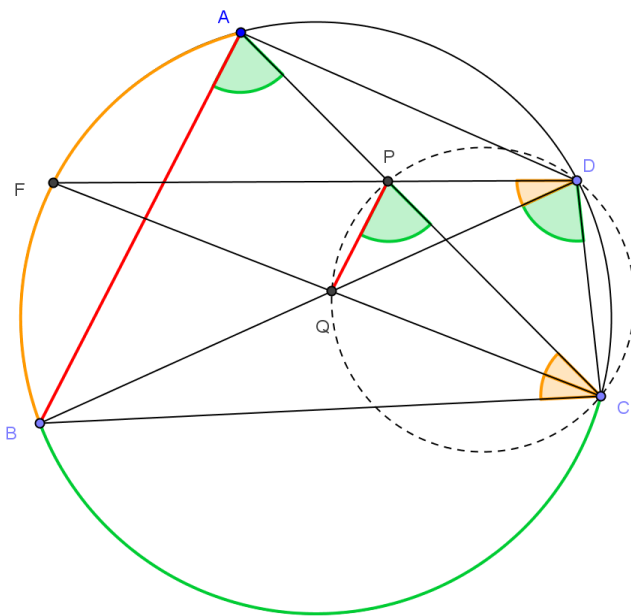
- milyen szögek egyenlőségét vehetjük észre (az A csúcsnál lévő belső szögfelező miatt két egyenlő szög keletkezik);
- szögszámítást melyik háromszögre érdemes kiterjeszteni (AKC_{Δ} és KAF_{Δ});
- milyen ismereteink vannak a háromszög belső és külső szögeire vonatkozóan.

8. feladat (Lásd [2], Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2023/2024, Haladó III. kategória, 1. forduló 3. feladat)

Legyen F az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének azon pontja, amely felezi a kör C és D pontokat nem tartalmazó AB ívét. A DF és AC egyenesek a P , a CF és BD egyenesek pedig a Q pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy a PQ és AB egyenesek párhuzamosak.

8. feladat megoldása:

Készítsünk ábrát és jelöljük az F , P és Q pontokat a feladatnak megfelelően.



Az AF és BF ívek hosszúságának egyenlősége miatt $\angle BCF = \angle FCA$. Figyelembe véve, hogy a $BCDF$ húrnégyszög körülírt körében az FB íven nyugvó kerületi szögek megegyeznek, ezért

$\angle BCF = \angle BDF$. Ezt felhasználva $\angle QCP = \angle BCF = \angle FCA = \angle BDF = \angle QDP$. Így a PQ szakasz a C és D pontokból azonos szög alatt látszik, és mivel C és D is a PQ egyenes azonos oldalán helyezkedik el, ezért a $CDPQ$ négyszög húrnégyszög. Az említett húrnégyszög körülírt körében $\angle CPO = \angle CDO$ (azonos íven nyugvó kerületi szögek). Másrészt az $ABCD$ húrnégyszög alapján $\angle CDO = \angle CDB = \angle CAB$. Így $\angle CPO = \angle CAB$, és mivel a szögek egyik szögszára azonos egyenesre esik, ezért a két szög egyállású, ami azt jelenti, hogy $PQ \parallel AB$.

Megjegyzés: a feladathoz készített ábra alapján érdemes az azonos hosszúságú ívekhez tartozó kerületi szögeket azonosan jelölni (akár színezn).

Kérdések:

- mi következik a $\angle QCP = \angle QDP$ egyenlőségből ($CDPQ$ négyszög húrnégyszög),
- ebben a húrnégyszögben hol találhatók egyenlő nagyságú szögek ($\angle CPO = \angle CDO$ zölddel jelölt szögek);
- a pirossal jelölt szakaszok párhuzamosságához mit kellene belátnunk (azt, hogy az A csúcsnál lévő szög is zölddel jelölhető);
- miért igaz ez (ugyanazon BC ívhez tartozó kerületi szögek a nagy húrnégyszögben).

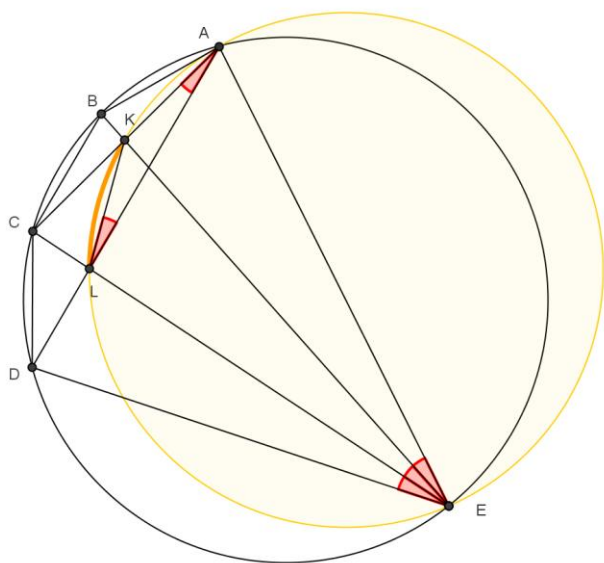
Nagyon nyilvánvalónak tűnhet egy-egy részállítás igazsága, de fontos, hogy a megoldás megértése után pontosan leírásra is kerüljön.

9. feladat (Lásd [3], Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2020/2021, Haladó II. kategória,

3. (döntő) forduló 1. feladat)

Az $ABCDE$ körbe írható ötszögben $AB = BC = CD$. Az AC és BE átlók a K pontban, az AD és CE átlók pedig az L pontban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy $AK = KL$.

9. feladat megoldása:



Mivel adott körben az azonos hosszúságú ívekhez azonos nagyságú kerületi szögek tartoznak, ezért $AB = BC = CD$, innen $\angle BEA = \angle CEB = \angle DEC = \angle DAC$, amiből következik, hogy $\angle LEK = \angle LAK$, azaz $AKLE$ húrnégyszög. Az $AKLE$ húrnégyszög körülírt körében az AK ívhez tartozó kerületi szögek egyenlősége alapján: $\angle KLA = \angle KEA = \angle BEA$. Így $\angle KLA = \angle LAK$, tehát az AKL háromszög egyenlőszárú, és $AK = KL$.

Megjegyzés: a feladat egyszerűnek tűnik, de a viszonylag kicsi szögek miatt az ábra nem könnyen látható át. főleg a húrnégyszöget nem könnyű észrevenni.

Kérdések:

- mit mondhatunk az adott körben egyenlő nagyságú körívekhez tartozó kerületi szögekről (jelöljük be az azonos nagyságú szögeket);
- a $\angle DEC = \angle DAC$ észrevétele kulcsfontosságú a feladatban, hiszen az $AKLE$ húrnégyszög volta ebből következik;

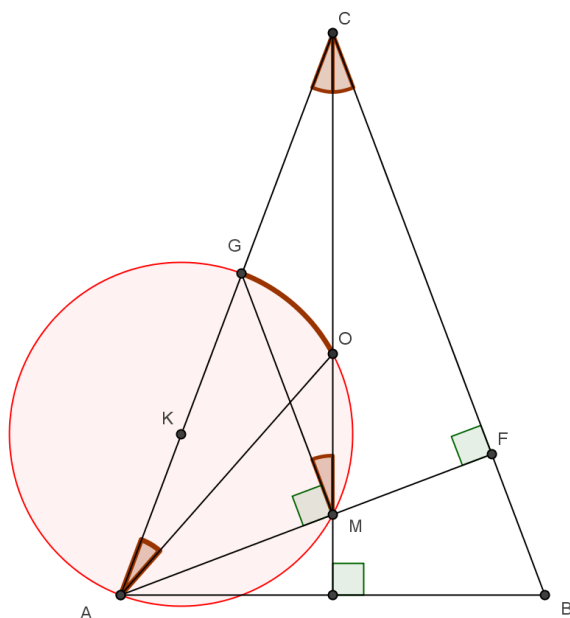
Az ívek és a húrok kapcsolata, a kerületi szögek tételének használata a két körben csak úgy sikerülhet, ha előtte az elméletet is átismétljük. A húrnégyszög felismerése után már viszonylag egyértelmű a megfelelő szögek megtalálása. Természetesen itt is érdemes kiindulni abból, hogy a két szakasz egyenlősége ekvivalens a megfelelő szögek egyenlőségével.

10. feladat (Lásd [4], OKTV 2020/2021, I. kategória, I. forduló. 6.feladat)

A hegyesszögű ABC háromszögben $CA=CB$, a háromszög magasságpontja M , körülírt körének középpontja O . Mutassa meg, hogy ha ABC háromszög nem szabályos, akkor az AMO háromszög köré írt kör középpontja illeszkedik az AC oldalra.

10. feladat megoldása:

Készítsünk ábrát.



Az AMO háromszög körülírt köre az AC oldalt G pontban metszi. Megmutatjuk, hogy AG szakasz az AMO háromszög körülírt körének átmérője, így a kör középpontja illeszkedik az AC szakaszra.

Az AOC háromszög egyenlő szárú, ugyanis OA és OC szakasz is az ABC háromszög körülírt körének sugara. Ebből következően az AC alapon fekvő szögei egyenlő nagyságúak: $\angle OCA = \angle OAC$.

Az AMO háromszög köré írt kör OG ívéhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak: $\angle OAG = \angle OMG$.

Mivel az ABC háromszög szimmetrikus a CM egyenesre nézve, ezért a CMF derékszögű háromszögben $FCM\angle = ACM\angle$, amelyből következően $CMF\angle = 90^\circ - FCM\angle$.

Ezek alapján a $GMF\angle = OMG\angle + OMF\angle = 90^\circ$.

Az $AMG\angle$ a $GMF\angle$ mellékszöge, tehát derékszög.

Az AMG háromszög derékszögű, így Thalész-tételének megfordítása alapján a körülírt körének középpontja az AG szakasz felezőpontja. De az AMO és AMG háromszögek körülírt köre azonos, így az AMO háromszög körülírt körének középpontja valóban illeszkedik az AC oldalra.

Ha az ABC háromszög szabályos, akkor az M és O pontok azonosak, tehát az AMO háromszög nem jön létre.

Megjegyzés: érdemes itt is nagy és átlátható ábra készítésére buzdítani a diákokat. Visszafelé gondolkodva a már kész ábrába rajzoltassuk be a piros kört és jelöljük az AC oldallal vett metszéspontját.

Kérdések:

- az AG milyen húrja a körnek (átmérője, így ez a kör egyben Thalész-kör);
- vizsgáljuk az AMG háromszöget, mit mondhatunk el róla, milyen háromszögnek kell lennie ahhoz, hogy igaz legyen az állítás (derékszögű);
- milyen tételeket használhatunk a keletkezett szögek vizsgálatához (kerületi szögek tétele alapján a Thalész-körben belátható a jelölt szögek egyenlősége);
- milyen pont az O pont, mit tudunk róla (a háromszög köré írható körének középpontja);
- egyenlőszárú háromszögből indultunk ki, így mit tudunk a magasságvonaláról, van-e valami specialitása, hiszen az alaphoz tartozó magasságot rajzoltuk be (felezi a szöget);

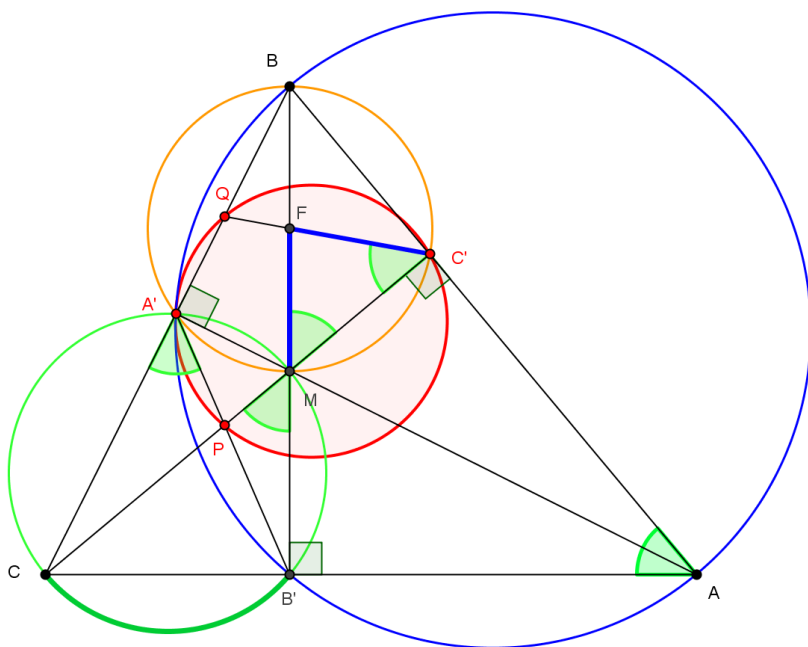
Innen már könnyen látják (és belátják), hogy az azonosan jelölt szögek egyenlők. Nyilván érdemes megbeszélni, hogy szabályos háromszög esetén O és M illeszkedik egymásra, így nem jön létre háromszög.

11. feladat (Lásd [5])

Az ABC hegyesszögű háromszög A , B és C csúsaiból induló magasságok talppontjai rendre A' , B' , C' . Jelölje M a háromszög magasságpontját, F a BM szakasz felezőpontját. Az $A'B'$ szakasz CC' szakaszt P pontban, $C'F$ egyenese a BC oldalt Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $A'PC'Q$ négyszög húrnégyszög.

11. feladat megoldása:

Készítsünk ábrát!



Az AB oldal Thalész-körére illeszkedik A' , B' magasságtalppontok, tehát az $ABA'B'$ négyszög húrnégyszög. A húrnégyszögre vonatkozó tétel miatt $\angle CAB = \angle CA'B' = \alpha$.

$B'MA'C$ húrnégyszög, mivel CM Thalész-körére illeszkednek B' és A' pontok.

A CB' ívhez tartozó kerületi szögek egyenlők, így $\angle CMB' = \angle CA'B' = \alpha$.

$\angle CMB' = \angle C'MB = \alpha$, mivel csúcsszögek.

$MC'B$ derékszögű háromszögben F az MB felezőpontja, így $FM=FC'$, ezért $MC'F \sphericalangle = \alpha$.

A $QA'P \sphericalangle = 180^\circ - \alpha$, ezért az $A'PC'Q$ négyszög szemközti szögeinek összege 180° , így az húrnégyszög.

Megjegyzés: a feladat nagyon összetett, még egy jó ábrán is könnyű eltévedni. Fontos, hogy a derékszögeket mindenképpen bejelöltessük az ábrán és azt is, hogy mely négyszögről akarjuk belátni, hogy húrnégyszög. Érdekes akár előre pirossal jelölni azt a kört, amelyet meg akunk találni.

Segítő kérdések lehetnek:

- érdemes azt tisztázni, hogy mit értünk, a húrnégyszög definícióját (olyan síknégyszög, melynek oldalai ugyanazon kör húrjai), vagy a rá vonatkozó tételt, illetve annak megfordítását használjuk (a szögek meghatározásának igényére lenne jó rávezetni a diákokat);
- látunk-e olyan négyszögeket, amelyek biztosan húrnégyszögek (a sok derékszög jelenléte nagyon sugja a Thalész-tétel miatti köröket, érdemes azokat vizsgálni, így juthatunk el sorban vagy akár össze-vissza, ahogyan előkerül a kék, zöld és narancssárga Thalész-kör);
- lehetséges a visszafelé gondolkodás, azaz mi kellene ahhoz, hogy az $A'PC'Q$ négyszög húrnégyszög legyen, azaz mit mondhatunk a C' és az A' csúcsoknál található szögeiről (itt már előkerül, hogy $CA'B \sphericalangle = QC'P \sphericalangle$ igazolása szükséges);
- mit igazolhatunk a zöld Thalész kör segítségével ($CMB' \sphericalangle = CA'B' \sphericalangle = \alpha$);
- ezen a ponton a csúcsszögek már nyilvánvalók ($CMB' \sphericalangle = C'MB \sphericalangle$);
- a narancssárga Thalész-körre átugorva már könnyebb észrevenni, hogy miért egyenlők az azonosan jelölt szögek.

Természetesen többféle más módon is el lehet jutni az állítás igazolásához, érdemes mindent összeszedni (akár olyan dolgokat is, amiket a későbbiekben a megoldás leírásakor nem is használunk föl). Általában abban a korban, amikor ilyen összetett feladattal kell foglalkozniuk a diákoknak, eljutnak oda, hogy nem csak a bizonyítás gondolata köti le őket, hanem annak leírására is könnyebben kaphatóak.

Összegzés

Miközben készítettem a segítő kérdéseket, arra is rá kellett jönnöm, hogy pontos útmutatóval sosem lehet szolgálni. Az osztályteremben nem lehet előre kiszámítani a diákok reakcióját, ötleteit, de fontos, hogy legyen gondolatunk arról, hogy milyen kérdések merülhetnek fel. A gyakorlott tanár tudja előre a diákok kérdéseit, esetleg helytelen gondolatokat, útvesztőket, elrejtett hibákat is már korábban láthatja. A kevesebb tapasztalattal rendelkező hallgatóknak viszont érdemes pontosan átgondolni a kitűzött feladatokat és saját kérdésekkel előkészülni. Remélem, ennek a kis segédanyagnak a tanulmányozása segítheti hallgatók munkáját is.

Irodalomjegyzék

- [1] Geometriai feladatok gyűjteménye I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985
- [2] https://www.bolyai.hu/files/AD_2024_feladatok_megoldasok.pdf
- [3] https://www.bolyai.hu/files/AD_2020-2021-feladatok-megoldasok.pdf
- [4] https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tanulmanyi_versenyek/oktv/oktv2020_2021_1ford/mat1_javutlf_oktv_2021.pdf
- [5] Négy megye Fejér Lipót Matematikaverseny 2022/2023, 11. évfolyam 6. feladat