

Magyar Eszter

Munkahely: ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium

E-mail: magyar.eszter@apaczai.elte.hu

Szekció: középiskolai

Konkrét előadás/szeminárium: Erdős Gábor: Az algoritmikus gondolkodás fejlesztése

Rekurzív sorozatokkal megoldható feladatok

Bevezetés

Dolgozatom kiindulópontjául az Erdős Gábor előadásának algoritmikus gondolatokat, megoldási lépéseket tartalmazó sokszintű és sokszínű feladatsora szolgált, mellyel olyan absztrakt fogalmak megértését készíti elő már felső tagozatosokkal, mint a rekurzió és a teljes indukció. Az előadás rávilágított, hogyha a diákok képessé válnak egy összetett problémát önmagukhoz hasonló részproblémákra bontani, olyan módszert kapnak a kezükbe, amellyel igazi, algoritmikus problémamegoldó folyamatot alkothatnak és számos (verseny)feladatot sikerrel oldhatnak meg.

Olyan feladattípusokat és módszertani megközelítéseket szeretnék összegyűjteni és bemutatni, melyek ezt az algoritmikus gondolkodást igénylik, melyekre a rekurzív sorozatokkal megoldható feladatok kiváló terepet biztosítanak. Szándékom az is, hogy jól használható szakköri segédanyagot hozzak létre a következő évben versenyezni szándékozó diákjaim OKTV szakkörére. Az összeállított feladatlap és ötletgyűjtemény célja, hogy a diákok egy újfajta megoldási sémával találkozzanak, és többféle helyzetben kipróbálják a hasonló gondolatokat. Ebben a feladatsorban (és e dolgozatban) viszont nem cél, hogy a megoldás során használt rekurzív sorozatok explicit képletét is meghatározzuk, de az lenne a továbbhaladás természetes iránya, hogy a mértani sorozatos közelítéseken keresztül odáig is eljutunk. A feladatok egy részéhez kis applikációkat is készítettem, amelyek használatával konkrét tapasztalatokhoz is juthatnak a diákok, mielőtt kiszámolnánk a megoldást.

Az előadáson elhangzott kezdő feladat és megoldása

Egy emeletes ház minden emeletét pirosra, fehérre vagy zöldre festették. Tudjuk, hogy nincs három olyan közvetlenül egymás fölött lévő emelet, amelynek mindegyikét fehérre festették. Hányféleképp lehet kifesteni a házat a szabályoknak megfelelően, ha az emeletek száma 7? (kis NMMV 2018 7/8.)

1. megoldás: rekurzív sorozatokkal az előadásról

Jelöljük a_n -nel egy n emeletes ház feladatnak megfelelő színezései számát, így a_7 -et keressük. Vizsgáljuk meg a legfelső emeletek színezései szerint a házat.

A eset: a legfelső szint nem fehér (tehát kétféle lehet, piros vagy zöld): ilyenkor az alatta lévő $n-1$ emeletes ház szabályos színezésű, arra tehát a_{n-1} lehetőségünk van, a legfelső szinttel együtt ez $2 \cdot a_{n-1}$ darab színezést jelent.

B eset: a legfelső szint fehér, de az alatta lévő nem az: ilyenkor az utolsó előtti szintre 2 színezés lehetséges, és az alatta lévő $n-2$ emeletes házra pedig a_{n-2} -féle színezés, ez összesen $2 \cdot a_{n-2}$ féle színezés jelent.

C eset: a legfelső két emelet is fehér, ilyenkor persze a felülről harmadik nem lehet fehér, hanem csak kétféle színű. Alatta viszont a maradék $n-3$ emelet már szabályos színezésű, tehát arra a_{n-3} -féle színezés lehetséges, tehát ebben az esetben összesen $2 \cdot a_{n-3}$ féle színezés van.

Mivel a fenti három eset egymást kölcsönösen kizáró, ezért ezen esetek összegével megkapjuk az összes színezési lehetőséget egy n emeletes házra, így adódik a következő rekurzív összefüggés:

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2} + 2 \cdot a_{n-3} \text{ (ha } n > 3 \text{)}.$$

A három kezdő értéket könnyen meghatározhatjuk:

$a_1 = 3$, az egyemeletes ház mindhárom színezése szabályos,

$a_2 = 3^2 = 9$, a kétemeletes házak bármilyen színvariációja is szabályos, végül

$a_3 = 3^3 - 1 = 26$, mert az összes variációból csak a csupa fehér három emelet nem jó.

Ezekből a rekurzív képlet segítségével meghatározhatjuk a következőket:

$$a_4 = 2 \cdot 26 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = 76,$$

$$a_5 = 2 \cdot 76 + 2 \cdot 26 + 2 \cdot 9 = 222,$$

$$a_6 = 2 \cdot 222 + 2 \cdot 76 + 2 \cdot 26 = 648 \text{ és végül}$$

$$a_7 = 2 \cdot 648 + 2 \cdot 222 + 2 \cdot 76 = 1892, \text{ azaz } \mathbf{1892\text{-f\acute{e}le megfelel\acute{o} sz\acute{ı}nez\acute{e}s van.}$$

2. alternatív megoldás: komplementer módszerrel és esetszétválasztással

Érdemes lehet másik fajta megoldás(oka)t is megbeszélni a feladathoz, majd összehasonlítani a módszereket. Példaként álljon egy másik ötlet a házfestéses feladathoz. Összesen a héteemeletes ház (a szabály mellőzésével) $3^7 = 2187$ -féleképpen lehet kiszínezni. Számoljuk meg a tiltott színezéseket, amelyekben szerepel legalább egy háromtagú fehér blokk (FFF): csoportosítsuk aszerint a tiltott színezéseket, hogy alulról felfelé haladva hol kezdődik a legelső ilyen FFF blokk.

A eset: az FFF a legelső emeleten kezdődik (vagyis az 1-3. emelet fehér), ilyenkor a maradék 4 emelet bármilyen színű lehet, erre $3^4 = 81$ lehetőség van.

B eset: az FFF a második emeleten kezdődik (vagyis a 2-4. emelet fehér), így az 1. nem fehér, de a felső három szint tetszőleges lehet, erre tehát $2 \cdot 3^3 = 54$ lehetőség van.

C eset: az FFF a harmadik emeleten kezdődik (vagyis a 3-5. emelet fehér), így a 2. nem fehér, de az első már bármilyen lehet, de felső két szint tetszőleges, erre tehát szintén $3 \cdot 2 \cdot 3^2 = 54$ lehetőség van.

D eset: az FFF a negyedik emeleten kezdődik (vagyis a 4-6. emelet fehér), így a 3. nem fehér, de az első kettő már bármilyen lehet és felső szint megint tetszőleges. Erre tehát $3^2 \cdot 2 \cdot 3 = 54$ lehetőség van.

E eset: az FFF az ötödik emeleten kezdődik (vagyis a 5-7. emelet fehér), így a 4. nem fehér. Az első három emeleten nem lehet FFF, ezért az első három emelet színezésére $3^3 - 1 = 26$ lehetőség van, a negyedik emeletre pedig 2, vagyis összesen ilyen esetből $26 \cdot 2 = 52$ lehetőség van.

Mivel a legelső FFF blokk csak ezeken az emeleteken kezdődhet, és megint egymást kölcsönösen kizáró esetekre bontottuk a tiltott színezéseket, ezért összesen

$$81 + 54 + 54 + 54 + 52 = 295 \text{ rossz színezés van, így}$$

$$\text{helyes színezésből } 3^7 - 295 = 2187 - 295 = \mathbf{1892\text{-f\acute{e}le van.}}$$

És a tovább gondolás

Az előadáson elhangzott feladat ötlete nyomán olyan további példákat igyekeztem összegyűjteni korábbi feladataimból, amik rekurzív sorozatok bevezetésével könnyebben vezetnek eredményre, és jól begyakoroltatják ezt a versenyeken is nagyon hasznos módszert. A kezdőpéldák ismert alapproblémák ebben a témakörben (például a Fibonacci-sorozatra vezető lépcsőjáró feladat, vagy a $2 \times n$ -es méretű téglalap csempézése), ezektől haladunk az összetettebb példák és gondolatok felé. Az előadáson hallott ötletadó feladat így valahová a feladatsor közepére került.

A 0. feladat és megoldásai

0. *Hányféleképpen juthatunk fel egy 7 lépcsős lépcső tetejére, ha egyszerre 1 vagy 2 lépcsőt léphetünk? (Két lépéssorozat különböző, ha az egyikben van olyan lépcsőfok, ami a másikban nem szerepel.)*

A feladat vizualizációjához készítettem egy egyszerű applikációt, amelyben elkészíthetünk ugrássorozatok, többféle módon kódolhatjuk a meglévő különböző sorozatokat és a diákok gyakorlati tapasztalatokat gyűjthetnek a megoldásokról, mielőtt kiszámolnák a lehetőségek számát: <https://nyuszi-a-lepcson.lovable.app/>.

1. megoldás - esetszétválasztással

Válasszuk szét aszerint az eseteket, hogy hányszor lépünk kettőt. Mivel összesen 7 lépcsőfok van, ezért maximum 3-szor léphetünk kettőt.

A eset: 0 db kettes lépés, persze ilyenkor 7 db 1-es, ez $1 \left(= \binom{7}{0} \right)$ lehetőség.

B eset: 1 db kettes lépés és 5 db 1-es lépés, ezek sorrendje $\binom{6}{1} = 6$ -féle lehet.

C eset: 2 db kettes lépés és 3 db 1-es lépés, ezek sorrendje $\binom{5}{2} = 10$ -féle lehet.

D eset: 3 db kettes lépés és 1 db 1-es lépés, ezek sorrendje $\binom{4}{3} = 4$ -féle lehet.

Tehát összesen $1 + 6 + 10 + 4 = \mathbf{21}$ -féle lépéssorozat van.

2. megoldás – rekurzív sorozatok bevezetésével

Kezdjük kisebb lépcsők vizsgálatával, sőt, vizsgáljunk egyszerre sok esetet! Készítsük el az alábbi táblázatot, melyben minden lépcsőfokhoz odaírjuk, hogy hányféleképpen lehet odáig feljutni 1-es vagy 2-es lépésekkel. A kitöltéshez akár összeszámolhatjuk módszeresen a lépéseket az egyes szinteken, vagy használhatjuk a kombinatorikából már ismert módszert: nézzük meg honnan érkezhünk egy adott lépcsőfokhoz, és adjuk össze az odáig vezető utak számát.

	1. lépcső	2. lépcső	3. lépcső	4. lépcső	5. lépcső	6. lépcső	7. lépcső
lehetőségek száma	1	2	3	5	8	13	21

Ez utóbbi gondolat elvezet a rekurzív sorozatos képlethez is, ha a_n -nel jelöljük, hogy hányféleképpen lehet feljutni az n -edik lépcsőfokig. A lépéssorozatok csoportosítsuk aszerint, hogy milyen az utolsó lépés benne. Ha 1-esre végződik, akkor előtte a_{n-1} -féleképpen lehetett feljutni az $n-1$ darab lépcsőre, ha pedig 2-es lépéssel végződött, akkor előtte a_{n-2} -féleképpen lehetett feljutni az $n-2$ darab lépcsőfokra. Ezek az esetek egymást kölcsönösen kizárják, így az összes lépéssorozat számára az alábbi jól ismert rekurzív képlet adódik:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (\text{ha } n > 2).$$

Az első két értéket meghatározva ($a_1 = 1$ és $a_2 = 2$) a sorozat összes tagját megkaphatjuk (mint a táblázatban), amelyből $a_7 = 21$ -féle lépéssorozat van. Érdekes lehet a sorozatot elnevezni, esetleg az alternatív szokásos indexeléssel együtt, vagyis hogy itt éppen $a_n = F_{n+1}$.

A kétféle megoldás együttes vizsgálata pedig szépen mutatja a Fibonacci-számok és a Pascal-háromszög átlós összegeinek kapcsolatát.

Az 1. feladat és megoldásai

1. Berzsián minden matematikaórán vagy piros pontot vagy fekete pontot kap (pontosan az egyiket), de azért arra figyel, hogy két fekete pontot ne kapjon egymás után. Hányféle sorozata lehet 7 matekóra után?

1. Megoldás: félbevágós módszer, nézzük meg a 4. óráján lévő pontot

Ha a középső épp egy piros pont, akkor az első hármas és az utolsó három pont is egymástól függetlenül 5-féle lehet: PPP, PPF, PFP, FPP és FPF. Ez $5 \cdot 5 = 25$ -féle lehetőség. Ha a középső pedig egy fekete pont, akkor a mellette lévő két pontnak pirosnak kell lennie, így a két első és a

Tehát összesen $9 + 25 = \mathbf{34\text{-féle lehetőség van.}}$

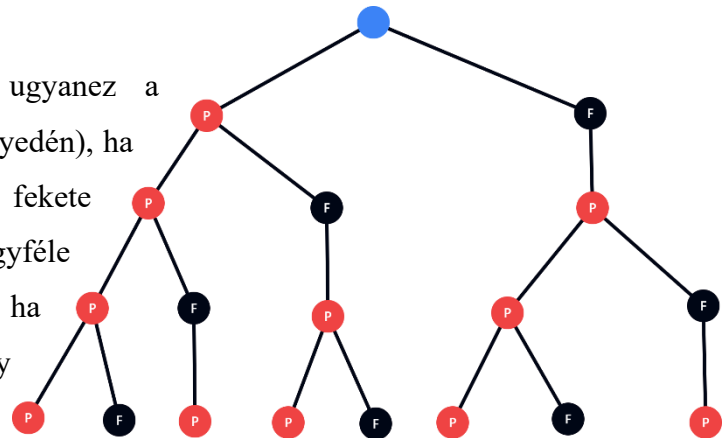
2. Megoldás: algoritmikus módszer

Megint gondolkozzunk egyszerre, számoljuk ki kisebb esetekre is a feladat kérdését. Érdemes egy részletesebb táblázatot készíteni, amelyben külön számoljuk az egyes sorozatoknál, hogy hány darab piros pontra végződő és hány darab fekete pontra végződő van benne. Kis elemszámokra könnyű akár felsorolással is megtalálni a darabszámokat. Például az első óra 2 db lehetséges kimenetele közül 1 db feketére és 1 db pirosra végződő, a két óránál már 1 db feketére végződő van (előtte csak piros lehetett), és 2 db pirosra végződő lehet (hiszen előtte bármi lehetett). A táblázat kitöltésekor hamar észre lehet venni a rekurzív szabályt a konkrét esetekben: három hosszú pontsorozatnál annyi feketére végződő lesz, mint az kettő óra utáni pirosra végződőekből (mert a feketére végződőeket nem folytathatjuk feketével), és annyi pirosra végződő, mint amennyi lehetőség volt a két óra után, hiszen bármelyiket addig is folytathatjuk piros ponttal.

	1 óra után	2 óra után	3 óra után	4 óra után	5 óra után	6 óra után	7 óra után
feketére végződő sorozatok száma	1	1	2	3	5	8	13
pirosra végződő sorozatok száma	1	2	3	5	8	13	21
Berzsián összes lehetséges pontsorozatainak száma	2	3	5	8	13	21	34

Talán még egyszerübben látható ugyanez a gondolatmenet (és a helyes megoldás is könnyedén), ha

felrajzoljuk a választásaink fagráfját: ha fekete pontnál járunk, akkor onnan csak egyféle lehetőségünk lesz: piros ponttal kell folytatni, ha piros pont volt utoljára, akkor onnan bárhogy folytathatjuk. A következő óránál annyi



fekete pont lehetőségünk lesz, mint amennyi az előtte lévő órán volt a piros pontos lehetőségünk száma, és annyi piros pontot fogunk rajzolni, mint az előző szinten lévő összes pontjaink száma.

A táblázat és a fagráf alapján is feltűnhet, hogy hasonló számokat kaptunk, mint az előző, lépcsős feladatnál, könnyen meg is találhatjuk ugyanazt a rekurzív képletet. Jelöljük b_n -nel, hogy hányféle

megfelelő pontsorozata lehet Berzsiánnak az n -edik óráig. A sorozatokat a táblázathoz hasonlóan csoportosítsuk aszerint, hogy milyen az utolsó pont benne. Ha pirosra végződik, akkor előtte bármilyen $n-1$ -es addig jó sorozat lehetett, ez b_{n-1} -féle lehetőség. Ha pedig feketére végződik, akkor előtte mindenképpen piros pontnak kellett lennie, de az azelőtti $n-2$ pont bármilyen megfelelő sorozatot alkotott: vagyis b_{n-2} -féle ilyen sorozat van. Ezek az esetek egymást kölcsönösen kizárják, így az összes pontsorozatra ugyanaz a rekurzív képlet adódik, mint az előző esetben:

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \text{ (ha } n > 2 \text{)}.$$

Az első pár tagot kiszámolva, majd a rekurzív képletet többször alkalmazva adódik ebből a megoldásból is, hogy $b_7 = 34$ -féle pontsorozata lehet Berzsiánnak.

Az is könnyen megmutatható, hogy előző két tárgyalt feladat analóg: a lépcsős feladat lépéssorozatát egyértelműen meghatározza, hogy melyik lépcsőkre lépünk rá, vagy hogy melyikeket hagyjuk ki. Ha a kimaradó lépcsőfokoknál fekete pontot írunk, és (az utolsó kivételével) amikre rálépünk, azokra pedig pirosat, akkor egy olyan pontsorozatot fogunk kapni, amiben nem lesz két fekete pont egymás után (hiszen nem tudunk két egymás utáni lépcsőfokot is kihagyni). És Berzsián minden pontsorozata hasonlóan meghatároz egy-egy lépéssorozatot. Persze mivel az utolsó lépcsőre mindenképpen rálépünk, ezért a hétfokos lépcsőhöz egy hatórás pontsorozat tartozik, ezért így $a_7 = b_6 = 21$.

Bár a következő feladatokhoz is lehetne többféle megoldást írni az előző ötletek mintájára, de a továbbiakban ettől eltekintek, és leginkább a rekurzív sorozatos megoldások vizsgálatára fogok szorítkozni.

A 2. feladat és megoldása

2. *Hányféleképpen fedhető le hézagmentesen és átfedés nélkül egy 2×7 -es méretű téglalap*

a) 2×1 -es méretű dominókkal;

b) 2×1 -es méretű dominókkal és 2×2 -es méretű négyzetlapokkal?

Ehhez a feladathoz is készítettem egy kis játék-applikációt: <https://csempezos-feladat.lovable.app/>, itt is javasolt játszani egy kicsit a megoldások előtt.

Megoldás:

Az a) feladatban jelöljük újra a_n -nel egy $2 \times n$ -es téglalap lefedéseinek számát, és vizsgáljuk meg, hogy az utolsó csempére (például a jobb felsőre) milyen dominót tettünk. Ha függőlegesen, akkor az előző $2 \times (n-1)$ -es téglalapot a_{n-1} -féleképpen tudjuk kitölteni. Ha pedig a jobb felső dominóra vízszintes dominót tettünk, akkor alatta is csak vízszintes lehet, és így a maradék $2 \times (n-2)$ -es téglalapot a_{n-2} -féleképpen lehet kitölteni. Amiből adódik a rekurzív képlet: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (ha $n > 2$). Mivel $a_1 = 1$ és $a_2 = 2$, ezért ez újra a Fibonacci-sorozat (eltolva), melyből $a_7 = 21$ -féleképpen lehetséges a csempézés. (Könnyen lehet itt is bijekciót teremteni a lépcsős feladattal: függőleges dominónál 1 lépcsőfokot lépünk, vízszintesnél 2-t a lépcsőn.)

A b) feladatban jelöljük b_n -nel a lefedések számát, és szokás szerint nézzük meg a jobb felső mezőt lefedő csempét. Ha az függőleges dominó, akkor előtte b_{n-1} lehetőségünk van. Ha az vízszintes dominó, akkor alatta is az van, előtte viszont b_{n-2} -féle csempézést tudunk csinálni. Hasonlóan akkor is, ha a jobb felső mezőt egy 2×2 -es négyzettel fedtük le. Tehát összesen $b_n = b_{n-1} + 2 \cdot b_{n-2}$ (ha $n > 2$).

Az első két tag könnyen megadható: $b_1 = 1$ és $b_2 = 3$ (két függőleges, két vízszintes vagy egy négyzet), ezért $b_3 = 3 + 2 \cdot 1 = 5$, $b_4 = 5 + 2 \cdot 3 = 11$, $b_5 = 11 + 2 \cdot 5 = 21$, $b_6 = 21 + 2 \cdot 11 = 43$, $b_7 = 43 + 2 \cdot 21 = 85$ -féle lefedés létezik ezekkel a csempékkel.

A 4. feladat és megoldása

4. Kosárlabdában, ha egy csapat a labdát a kosárba juttatja, akkor ezzel vagy 1, vagy 2, vagy 3 pontot szerez. Egy mérkőzésen a hazai csapat a harmadik perc végén már 7:3-ra vezetett, a vendégeknek egyszer sikerült a labdát a kosárba dobniuk.

- Hányféleképpen alakulhatott ki ez az eredmény, ha a vendégcsapat dobta az utolsó kosarat?
- Hányféleképpen alakulhatott ki ez az eredmény, ha csak annyit tudunk, hogy a vendégek közben egyszer sem vezettek?

(az alapfeladat Erdős Gábortól, illetve NMMV 2026. 6/8-as feladata)

Megoldása:

Mivel a vendégeknek egyetlen kosarat sikerült dobniuk, ezért az egyetlen kosaruk 3 pontot ért. Jelölje a_n a lehetséges pontsorozatokat 1, 2 vagy 3 pontos dobásokból összesen n pont

elérésekor. Az utolsó dobás lehet rendre 1, 2 vagy 3 pontos, ezért az előzőekben leírt érveléssel adódik az alábbi rekurzív képlet: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ (ha $n > 3$).

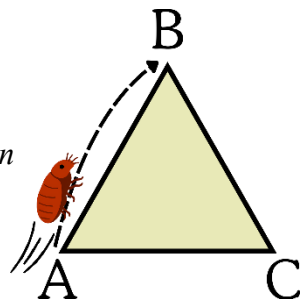
Határozzuk meg az első néhány tagot: $a_1 = 1$ (csak egy pontos dobás), $a_2 = 2$ (két egy pontos vagy egy kétpontos dobás lehet) és $a_3 = 4$ (lehet $1+1+1$, $1+2$, $2+1$ vagy 3). Ebből $a_4 = 4+2+1 = 7$, $a_5 = 7+4+2 = 13$, $a_6 = 13+7+4 = 24$ és végül $a_7 = 24+13+7 = 44$. Az a) feladatban elsőként a hazai csapat először dob 7 pontot (ezt 44-féleképpen teheti meg), majd a vendégcsapat bedobja a hárompontos kosarát, tehát **44-féleképpen** alakulhatott ki az eredmény.

A b) feladatban már arra is kell figyelni, mikor dobhatták a vendégek a kosarat: a hazai csapatnak legalább 3 pontot kell elsőként szereznie. Ha pont 3 pontot szerzett a vendégkosár előtt, akkor arra $a_3 = 4$ lehetősége volt, a vendégkosár után viszont a maradék 4 pontot $a_4 = 7$ -féleképpen dobhatták be. Ebből az esetnél tehát $a_3 \cdot a_4 = 4 \cdot 7 = 28$ -féleképp érheték el a 7:3-as eredményt. Hasonlóan, ha a vendégek 4, 5, 6 vagy 7:0 után dobták be a hárompontosukat, akkor rendre $a_4 \cdot a_3$, $a_5 \cdot a_2$, $a_6 \cdot a_1$ illetve a_7 -féleképpen jöhet ki a 7:3-as eredmény. Tehát összesen: $a_3 \cdot a_4 + a_4 \cdot a_3 + a_5 \cdot a_2 + a_6 \cdot a_1 + a_7 = 4 \cdot 7 + 7 \cdot 4 + 13 \cdot 2 + 24 \cdot 1 + 44 = 150$ -féleképp alakulhat ki a 7:3-as eredmény.

5. feladat és megoldása

5. Egy bolha ugrál az ABC szabályos háromszög csúcsain: minden másodpercben ugrik egyet a másik két csúcs valamelyikére. Hányféleképpen érkezik vissza pontosan 7 ugrás után a kiindulási A csúcsba?

Megoldása:

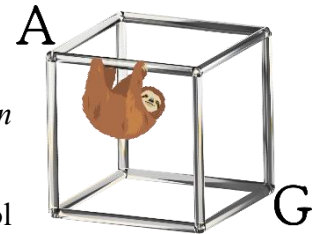


Jelölje a_n, b_n és c_n azt, hogy az n -edik ugrás után hányféleképpen juthat a bolha az A, B illetve C csúcsokra. Mivel a B és C csúcs szerepe szimmetrikus, ezért $b_n = c_n$. Az A csúcsba az n -edik ugrással a B -ből vagy C -ből érkeztetett, ezért $a_n = b_{n-1} + c_{n-1} = 2 \cdot b_{n-1}$. A B csúcsba pedig az n -edik ugrással B -ből vagy C -ből érkeztetett, ezért $b_n = a_{n-1} + c_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1}$. Felhasználva az első összefüggést, adódik, hogy $a_{n-1} = 2 \cdot b_{n-2}$, így pedig b_n -re megkaphatjuk az alábbi rekurziót: $b_n = b_{n-1} + 2 \cdot b_{n-2}$ (ha $n > 1$).

Vizsgáljuk meg kis ugrásszámokra: $b_0 = 0$ (mert A csúcsból indul) és $b_1 = 1$, innen már a rekurzív képletből: $b_2 = 1 + 2 \cdot 0 = 1$, $b_3 = 1 + 2 \cdot 1 = 3$, $b_4 = 3 + 2 \cdot 1 = 5$, $b_5 = 5 + 2 \cdot 3 = 11$, $b_6 = 11 + 2 \cdot 5 = 21$, végül pedig $a_7 = 2 \cdot b_6 = 42$ -féleképpen juthat a bolha 7 ugrással végül vissza az A csúcsba.

6. feladat és megoldása

6. Egy lajhár egy drótból készült kocka A csúcsából indul és minden órában átmászik a kocka egy szomszédos csúcsába a drótvázon. Hányféleképpen juthat el az A csúccsal átellenes G csúcsba pontosan 7 lépés alatt?



A feladat modellezésére egy egyszerű webes játékot is fejlesztettem, ahol mozgathatjuk a lajhárt egy 3D-s kocka vázán, gyűjthetjük a helyes hétlépéses utakat, vagy véletlenszerű 7 lépéses utat is generálhatunk: <https://lajhar-a-kockan.lovable.app>. Az app segít térben tájékozódni, a konkrét utak megalkotása és a véletlen utak vizsgálata közben könnyebb lesz az összefüggéseket észrevenni a diákoknak.

Megoldása:

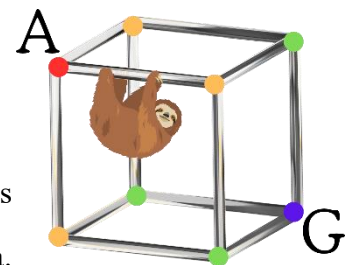
Érdeemes a kocka csúcsait „szintezni” az A csúcsból mért távolságuk alapján az alábbi módon, hogy ne túl sok rekurzív sorozatot kezeljünk egyszerre.

0. szint: A csúcs, jelölje a_n , hogy n lépés után hányféleképpen érkezhetsz A -ba a lajhár.

1. szint: A csúccsal szomszédos csúcsok (3 db), jelölje b_n , hogy n lépés után hányféleképpen érkezhetsz az 1. szint valamelyik csúcsába.

2. szint: G csúccsal szomszédos csúcsok (3 db), jelölje c_n , hogy n lépés után hányféleképpen érkezhetsz a 2. szint valamelyik csúcsába.

3. szint: G csúcs, jelölje d_n , hogy n lépés után hányféleképpen érkezhetsz G -be a lajhár.



Ekkor az alábbi rekurzív összefüggéseket tudjuk felírni a lajhár lépései alapján:

$$a_n = b_{n-1} \quad (\text{hiszen } A\text{-ba lépni minden 1. szinten lévő csúcsból egyféleképpen lehet}),$$

$$b_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot c_{n-1} \quad (\text{az } A \text{ csúcsból 3 féle úton érkezhetsz az 1. szintre, a 2. szint bármelyik csúcsából pedig kétféle úton juthatsz az 1. szintre}),$$

$c_n = 2 \cdot b_{n-1} + 3 \cdot d_{n-1}$ (az 1. szint bármelyik csúcsából kétféle úton juthatunk a 2. szintre, a G csúcsból 3 féle úton érkezhetünk a 2. szintre), és

$d_n = c_{n-1}$ (hiszen G -be lépni minden 2. szinten lévő csúcsból egyféleképpen lehet).

Innentől érdemes lehet táblázatban kitölteni a kezdeti értékektől a rekurziók alapján a szintekhez tartozó értékeket, a részszámításokat most nem részletezem.

	0 óra után	1 óra után	2 óra után	3 óra után	4 óra után	5 óra után	6 óra után	7 óra után
a_n	1	0	3	0	21	0	183	0
b_n	0	3	0	21	0	183	0	1641
c_n	0	0	6	0	60	0	546	0
d_n	0	0	0	6	0	60	0	546

Vagyis összesen **546 féle olyan cammogássorozata van** a lajhárnak, amelynél 7 óra alatt ér el a kocka átellenes csúcsába.

Néhány algebrai lépéssel megkaphatjuk a d_n -re vonatkozó tiszta rekurziót is, mint az előző feladatnál, csak több lépésben. Használjuk az első összefüggést a másodikban:

$$b_n (= 3 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot c_{n-1}) = 3 \cdot b_{n-2} + 2 \cdot c_{n-1},$$

és a negyedik összefüggést a harmadikban:

$$c_n (= 2 \cdot b_{n-1} + 3 \cdot d_{n-1}) = 2 \cdot b_{n-1} + 3 \cdot c_{n-2}, \text{ amiből } 2 \cdot b_{n-1} = c_n - 3 \cdot c_{n-2}.$$

Toljuk el eggyel az indexeket: $2 \cdot b_n = c_{n+1} - 3 \cdot c_{n-1}$, vagyis $b_n = \frac{1}{2} c_{n+1} - \frac{3}{2} c_{n-1}$. Ezt felhasználva az előzőleg kapott b_n és c_n közti összefüggésben, kapjuk, hogy:

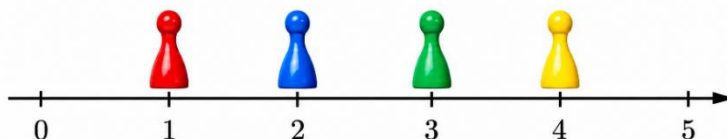
$$\frac{1}{2} c_{n+1} - \frac{3}{2} c_{n-1} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} c_{n-1} - \frac{3}{2} c_{n-3} \right) + 2 \cdot c_{n-1}, \text{ amelyet átrendezve (és kettővel szorozva):}$$

$c_{n+1} = 10 \cdot c_{n-1} - 9 \cdot c_{n-3}$, amivel egyből meg is van, hogy $d_{n+2} = 10 \cdot d_n - 9 \cdot d_{n-2}$. Ennek indexeit visszatolva kapjuk a d_n -re a rekurzív összefüggést: $d_n = 10 \cdot d_{n-2} - 9 \cdot d_{n-4}$ (ha $n > 3$). (Amiből egyébként az is látszik, hogy egy adott tag értéke a vele azonos paritású korábbi elemektől függ, persze, hiszen a kocka, amin a lajhár cammog, páros gráf). Mivel legalább 3 óra kell az átellenes csúcsraéréshez, ezért $d_0 = 0$ és $d_2 = 0$, így a sorozat összes páros indexű tagja nulla lesz. A páratlan indexű tagoknál $d_1 = 0$, de $d_3 = 6$ (mert csak azt kell megválasztunk, milyen sorrendben

cammogjon a lajhár a tér három irányában egyet). Innen $d_5 = 10 \cdot 6 - 9 \cdot 0 = 60$ és $d_7 = 10 \cdot 60 - 9 \cdot 6 = 546$, vagyis **546-féle útvonal van**.

7. feladat és megoldása (Purple Comet! versenyfeladat, 2026 HS/13. feladata alapján)

7. A számegyenes 1, 2, 3 és 4 pontján áll egy bábu. Egy adott pillanatban minden bábu vagy egyet jobbra lép, vagy egyet balra, vagy a helyén marad (véletlenszerűen egyenlő esélyekkel, egymástól függetlenül). Mekkora a valószínűsége, hogy a kör végén egyik bábu sem áll ugyanazon a helyen, azaz nem lesz „torlódás”?



A feladat modellezésére egy egyszerű webes játékot is fejlesztettem, ahol véletlengenerátor segítségével mozog a négy bábu, és a program meghatározza a torlódásmentes lépések relatív gyakoriságát: <https://torlodas-a-szamegyenesen.loveable.app/>. Ennél a feladatnál is hasznos lehet a valószínűség meghatározása előtt személyes tapasztalatot gyűjteni, vizualizálni a lépéseket.

Megoldása:

Általánosítsuk a feladatot, álljon n bábu a számegyenes 1, 2, 3, ..., n pontján, mozogjanak a fenti feladatnak megfelelően. Jelentse a_n az összes jó (torlódásmentes) mozgási lehetőségek számát az n bábu esetén. Válasszuk szét az eseteket a baloldali, 1-es mezőn álló bábu (legyen innentől piros) mozgása szerint: legyen b_n eset, amikor a baloldali még balra lép, és c_n olyan eset, amikor a baloldali bábu nem lép ki balra. Így persze

$$a_n = b_n + c_n.$$

Ha a baloldali piros bábu balra kilép (a 0-ra), akkor a maradék $n-1$ bábu torlódásmentesen a_{n-1} -féleképpen tud mozogni, tehát $b_n = a_{n-1}$.

Nézzük meg, hogyan lehet, hogy a baloldali bábu nem lép ki balra, azaz hogy jöhet ki a c_n lehetőség. Ha a baloldali piros bábu helyben marad, akkor a fennmaradó $n-1$ bábu közül a baloldali (kék) nem léphet ki balra, erre tehát c_{n-1} -féle lehetőség van. Ha pedig a piros jobbra lép a kék helyére, akkor még mindig két lehetőséget kell vizsgálnunk: ha a kék belép a piros helyére (vagyis csak helyet cseréltek), akkor a maradék $n-2$ bábu úgy lép, hogy közülük a baloldali (zöld) nem léphet balra, ez tehát c_{n-2} lehetőség. Ha pedig a piros és kék is jobbra lépett, akkor onnantól minden további bábusnak jobbra kell lépnie, ez tehát 1 lehetőség. Ezekből a következő rekurzív képlet adódik:

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2} + 1 \text{ (ha } n > 2 \text{)}.$$

Vagyis $a_n = a_{n-1} + c_n$ és $c_n = c_{n-1} + c_{n-2} + 1$ rekurziókat kaptuk a problémára. A kezdeti értékek könnyen meghatározhatók: $a_1 = 3$ (egy bábu bárhová léphet torlódásmentesen), $c_1 = 2$ (de csak két helyre úgy, hogy nem lép balra). Két bábunál akár akkor, ha a baloldali a helyén marad vagy akár akkor is, ha jobbra lép, mindkét esetben a másik bábu két helyre léphet, így $c_2 = 4$. Innentől egy szokásos táblázatba foglalva az adatokat, elsőként meghatározhatjuk c_n értékeit, majd azután a_n -t is.

	1 bábuval	2 bábuval	3 bábuval	4 bábuval
a_n	3	7	14	26
c_n	2	4	7	12

Mivel a 4 bábu mindegyike egymástól függetlenül 3-3 irányban léphetett, ezért összesen 3^4 -féle lépéssorozatuk volt. Ebből a táblázat alapján 26 olyan, amikor nem alakul ki torlódás, szóval **ennek a valószínűsége** $\frac{26}{81}$.

Még egy érdekességet fel lehet fedezni a feladatban: ha a c_n -re kapott rekurziónál mindkét oldalhoz egyet hozzáadunk, akkor ezt a nagyon ismerősnek látszó összefüggést kapjuk: $c_n + 1 = c_{n-1} + 1 + c_{n-2} + 1$. Vezessünk be új jelölést $c_n + 1$ -re, legyen $d_n = c_n + 1$, és ekkor a rekurzió egyenletére ezt kapjuk: $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$. Mivel $d_1 = c_1 + 1 = 3$ és $d_2 = c_2 + 1 = 5$, ezért d_n sorozat a Fibonacci-sorozat eltoltja, így $d_n = F_{n+3}$, vagyis $c_n = F_{n+3} - 1$. Innen a_n sorozatra is kaphatunk egy szebb zárt alakot, ha visszaírjuk a rekurziójába c_n -t, aztán még egy kicsit alakítunk rajta:

$$a_n = a_{n-1} + F_{n+3} - 1. \text{ Ebből}$$

$$a_2 = a_1 + F_5 - 1,$$

$$a_3 = a_2 + F_6 - 1 = a_1 + F_5 - 1 + F_6 - 1 = a_1 + F_5 + F_6 - 2,$$

$$a_4 = a_3 + F_7 - 1 = a_1 + F_5 + F_6 - 2 + F_7 - 1 = a_1 + F_5 + F_6 + F_7 - 3, \text{ és így tovább:}$$

$$a_n = a_1 + F_5 + F_6 + \dots + F_{n+3} - (n-1).$$

Mivel a Fibonacci-sorozatban $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$, ezért

$$a_n = a_1 + F_{n+5} - 1 - (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) - (n-1) = 3 + F_{n+5} - 1 - 7 - (n-1) = F_{n+5} - 4 - n.$$

(És valóban, így $a_4 = F_9 - 4 - 4 = 34 - 4 - 4 = 26$.)

Összegzés

A fenti feladatlappal és a megoldásokkal olyan feladatsort szeretnék létrehozni, mely egyszerűbb példákkal kezdetben begyakoroltatja, majd összetettebb példákon keresztül mutatja be a trükkösebb megoldásokat arra, hogy hogyan érdemes rekurzív sorozatokkal különböző problémákat modellezni. A következő évben egészen biztosan kipróbálom majd.

Felhasznált források:

Ujházy Márton: Bolyongások az oktaéderen ;

Erdős Gábor: Az algoritmikus gondolkodás fejlesztése (2026. RLV) előadásáról

- a 2018. évi Nemzetközi Magyar Matematika Verseny hetedik osztályos [8. feladata](#) és
- a 2026. évi Nemzetközi Magyar Matematika Verseny hatodik osztályos [8. feladata](#) ;

A Purple Comet 2026-os High School feladatsorának [13. feladata](#) ;

Melléklet: a feladatlap

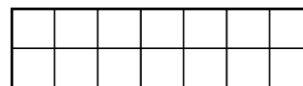
TALÁLD MEG A (Z ALGO)RITMUST

0. Hányféleképpen juthatunk fel egy 7 lépcsős lépcső tetejére, ha egyszerre 1 vagy 2 lépcsőt léphetünk? (Két lépéssorozat különböző, ha az egyikben van olyan lépcsőfok, ami a másikban nem szerepel.)
1. Berzsián minden matematikaórán vagy piros pontot vagy fekete pontot kap (pontosan az egyiket), de azért arra figyel, hogy két fekete pontot ne kapjon egymás után. Hányféle sorozata lehet 7 matekóra után? Töltsétek ki a táblázatot!

	1 óra után	2 óra után	3 óra után	4 óra után	5 óra után	6 óra után	7 óra után
feketére végződő sorozatok száma							
pirosra végződő sorozatok száma							
Berzsián összes lehetséges pontsorozatainak száma							

2. Hányféleképpen fedhető le hézagmentesen és átfedés nélkül egy 2×7 -es méretű téglalap

a) 2×1 -es méretű dominókkal;

b) 2×1 -es méretű dominókkal és 2×2 -es méretű négyzetlapokkal?


3. Egy hétemeletes ház minden emeletét pirosra, fehérre vagy zöldre festették.

a) Hányféleképp lehet kifesteni a házat úgy, hogy ne legyen két közvetlenül egymás fölött lévő fehér emelete?

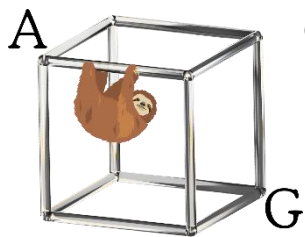
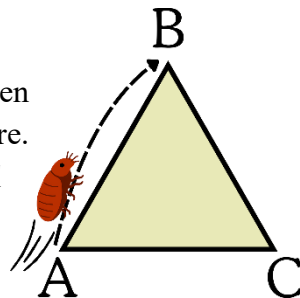
b) Hányféleképp lehet kifesteni a házat úgy, hogy ne legyen három közvetlenül egymás fölött lévő fehér emelete?

4. Kosárlabdában, ha egy csapat a labdát a kosárba juttatja, akkor ezzel vagy 1, vagy 2, vagy 3 pontot szerez. Egy mérkőzésen a hazai csapat a harmadik perc végén már 7:3-ra vezetett, a vendégeknél egyszer sikerült a labdát a kosárba dobniuk.

a) Hányféleképp alakulhatott ki ez az eredmény, ha a vendégcsapat dobta az utolsó kosarat?

b) Hányféleképp alakulhatott ki ez az eredmény, ha csak annyit tudunk, hogy a vendégek közben egyszer sem vezettek?

5. Egy bolha ugrál az ABC szabályos háromszög csúcsain: minden másodpercben ugrik egyet a másik két csúcs valamelyikére. Hányféleképpen érkezhet vissza pontosan 7 ugrás után a kiindulási A csúcsba?



6. Egy lajhár egy drótból készült kocka A csúcsából indul és minden órában átmászik a kocka egy szomszédos csúcsába a drótvázon.
- Töltsd ki az alábbi táblázatot, hogy az A csúctól különböző távolságokra lévő helyekre hányféleképpen juthat el a lajhár az adott óra végén!
 - Hányféleképpen juthat el az A csúccsal átellenes G csúcsba pontosan 7 lépés alatt?

	0 óra után	1 óra után	2 óra után	3 óra után	4 óra után	5 óra után	6 óra után	7 óra után
A csúcsba								
1 távolságra								
2 távolságra								
3 távolságra								

7. A számegyenes 1, 2, 3 és 4 pontján áll egy bábu. Egy adott pillanatban minden bábu vagy egyet jobbra lép, vagy egyet balra, vagy a helyén marad (véletlenszerűen egyenlő eséllyel, egymástól függetlenül). Mekkora a valószínűsége, hogy a kör végén egyik bábu sem áll ugyanazon a helyen, azaz nem lesz „torlódás”?

