

Dr. Győry Ákos

Munkahely: Miskolci Egyetem Földes Ferenc Gyakorló Gimnázium; Miskolci Egyetem; Nyíregyházi Egyetem

E-mail-cím: gyoryakos@ffg.hu, akos.gyory@uni-miskolc.hu, gyory.akos@nye.hu

Szekció: középiskola

Előadó: Taricska Dávid

Szeminárium címe: Tehetséggondozás a geometrián keresztül

A háromszög beírt és hozzáírt köreihez kapcsolódó feladatok

A tehetséggondozás során gyakran szükségessé válik az interneten fellelhető, sok esetben idegen nyelvű szakirodalom használata. A tanulók fejlődésének támogatása mellett ezért a pedagógus folyamatos önképzése is kiemelt jelentőségű. Ha olyan szakmai anyaggal találkozunk, amely a kitűzött feladatok megoldásait nem közli, érdemes ezeket önállóan kidolgoznunk. Ez nemcsak a tanár szakmai fejlődését segíti, hanem követendő példát is mutat a diákoknak: a kitaláló gondolkodás és a megoldáskeresés igénye őket is jobb teljesítményre ösztönözheti.

Jelen dolgozat alapjául Yufei Zhao *Three Lemmas in Geometry* című, egy 2010-es téli matematikai felkészítő táborra készített szakmai anyaga szolgál. A dolgozat a publikáció első, *Diameter of Incircle* című fejezetéhez kapcsolódik. Ebben a szerző ismerteti egy fontos geometriai lemmát, majd annak alkalmazásához feladatokat tűz ki. Ezek közül több kiválasztott feladat általam kidolgozott megoldását mutatom be. A feladatok és megoldásaik elsősorban haladó szintű tehetséggondozó matematikaszakkörök anyagát képezhetik.

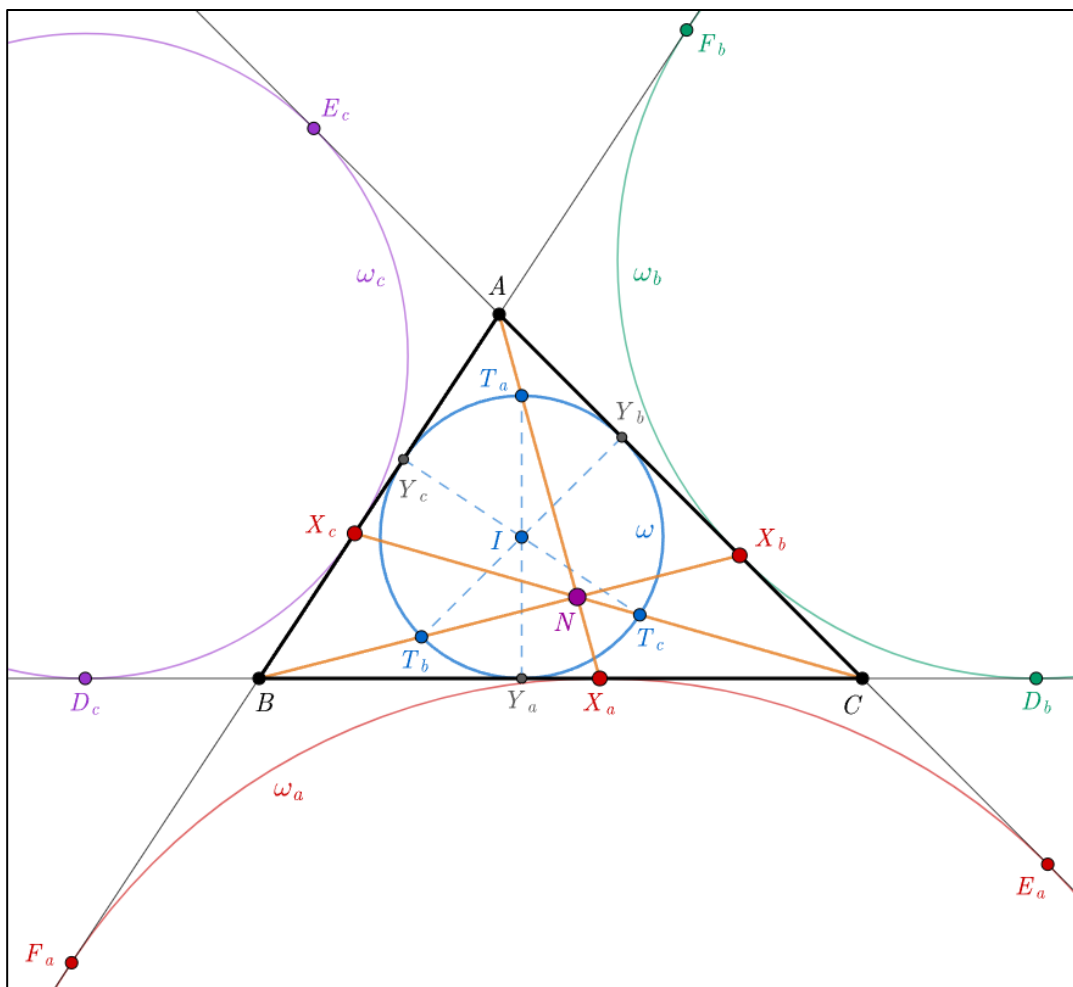
A felhasznált anyag elérhető: https://yufeizhao.com/olympiad/three_geometry_lemmas.pdf.

Mindenekelőtt összefoglalok néhány könnyen igazolható, a későbbi feladatokhoz kapcsolódó, ugyanakkor nem feltétlenül közismert tényt.

1. tény: Jelölje az ABC háromszög beírt körének a BC oldallal való érintési pontját Y , az A csúccsal szemközti hozzáírt körének a BC oldallal való érintési pontját pedig X . Ekkor $BY = CX$, vagy ezzel ekvivalens módon $BX = CY$.

2. tény: Az X pont kerületfelező pont abban az értelemben, hogy az $A - B - X$ és $A - C - X$ töröttvonalak hossza egyenlő.
3. tény: A beírt kör egy T pontja akkor és csak akkor a körnek a BC oldaltól vett legtávolabbi pontja, ha T az AX félegyenesnek az A -hoz közelebbi metszéspontja a beírt körrel.
4. tény: A háromszög másik két oldalán is az X ponthoz hasonló kerületfelező pontokat kapunk. Ha a háromszög minden csúcsát összekötjük a szemközti oldalán található kerületfelező ponttal, akkor a Ceva-tételből következően az így kapott három szakasz egy pontban metszi egymást. Ezt a pontot a háromszög Nagel-pontjának nevezzük.¹

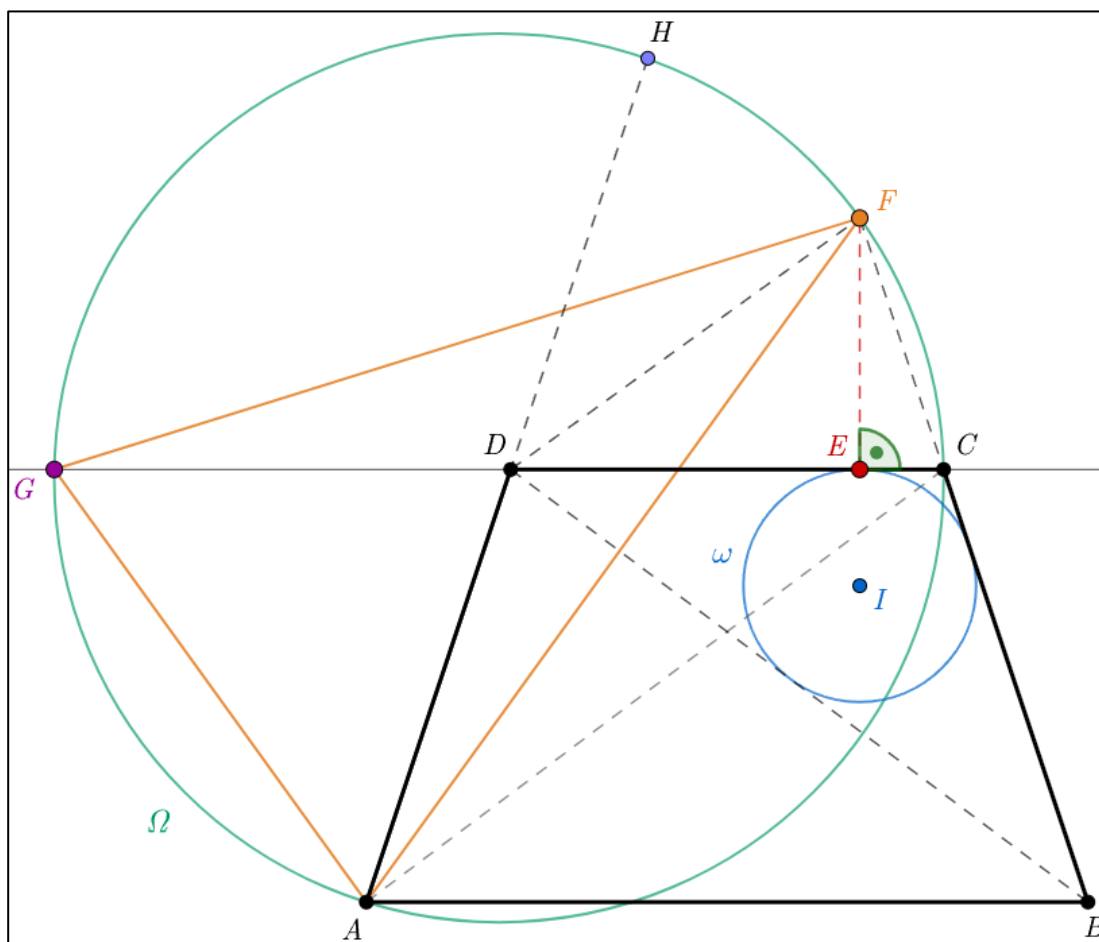
Az alábbi ábra az előzőekben ismertetett négy tényt szemlélteti.



¹ Christian Heinrich von Nagel (1803–1882) német matematikus.

- 1. feladat.** Legyen $ABCD$ egyenlő szárú trapéz, ahol $AB \parallel CD$. A BCD háromszög beírt köre érintse a CD oldalt az E pontban. Jelölje F a DAC szögfelezőjének azt a pontját, melyre $EF \perp CD$. Az ACF háromszög körülírt köre a CD egyenest a C ponton kívül még a G pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az AFG háromszög egyenlő szárú. (USAMO, 1999)

Megoldás. Készítsünk ábrát. Jelölje Ω az ACF háromszög körülírt körét, H pedig az AD egyenes és az Ω kör A -tól különböző metszéspontját.



Legyen Y az ACD háromszög beírt körének, X pedig az A csúccsal szemközti hozzáírt körének CD -n fekvő érintési pontja. Jelöljük ez utóbbi kört k -val. A szimmetria folytán $DY = CE$. Az 1. tény szerint $DY = CX$, így $CE = CX$, vagyis $E = X$. Tehát E a k kör CD -n fekvő érintési pontja.

A k kör középpontja egyrészt az EF félegyenesen, másrészt a $DAC\alpha$ szög belső szögfelezőjén helyezkedik el. E két félegyenes metszéspontja F , ezért F a k kör középpontja.

Mivel A, D, H , valamint G, D, C kollineárisak, továbbá DF felezi a $CDH\alpha$ szöget, ezért

$$ADF\alpha = ADC\alpha + CDF\alpha = GDH\alpha + HDF\alpha = GDF\alpha. \quad (1)$$

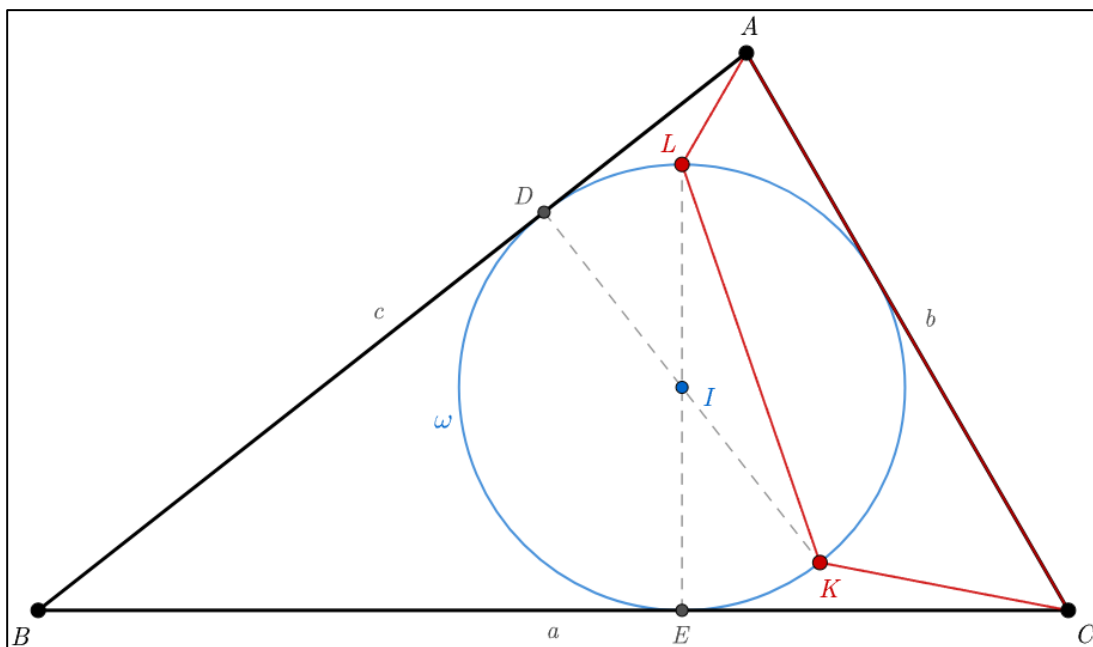
Másrészt G, D, C kollineárisak, ezért $FGD\alpha = FGC\alpha$. Mivel $GACF$ húrnégyszög, az $FGC\alpha$ és $FAC\alpha$ azonos íven nyugvó kerületi szögek, következésképpen azonos nagyságúak. Továbbá AF felezi a $DAC\alpha$ szöget, így

$$FGD\alpha = FGC\alpha = FAC\alpha = FAD\alpha. \quad (2)$$

Az (1) és (2) alapján a DFG és DFA háromszögek két-két megfelelő szöge egyenlő, a DF oldal pedig közös. A két háromszög tehát egybevágó, ezért $FG = FA$, vagyis az AFG háromszög egyenlő szárú.

2. feladat. Legyen ABC olyan háromszög, amelyre $AB + BC = 3AC$. Jelölje I a háromszög beírt körének középpontját. A beírt kör az AB , illetve a BC oldalt rendre a D , illetve az E pontban érintse. Legyen K a D pont, L pedig az E pont I -re vonatkozó tükörképe. Bizonyítsuk be, hogy az $ACKL$ négyszög húrnégyszög. (IMO Shortlist, 2005)

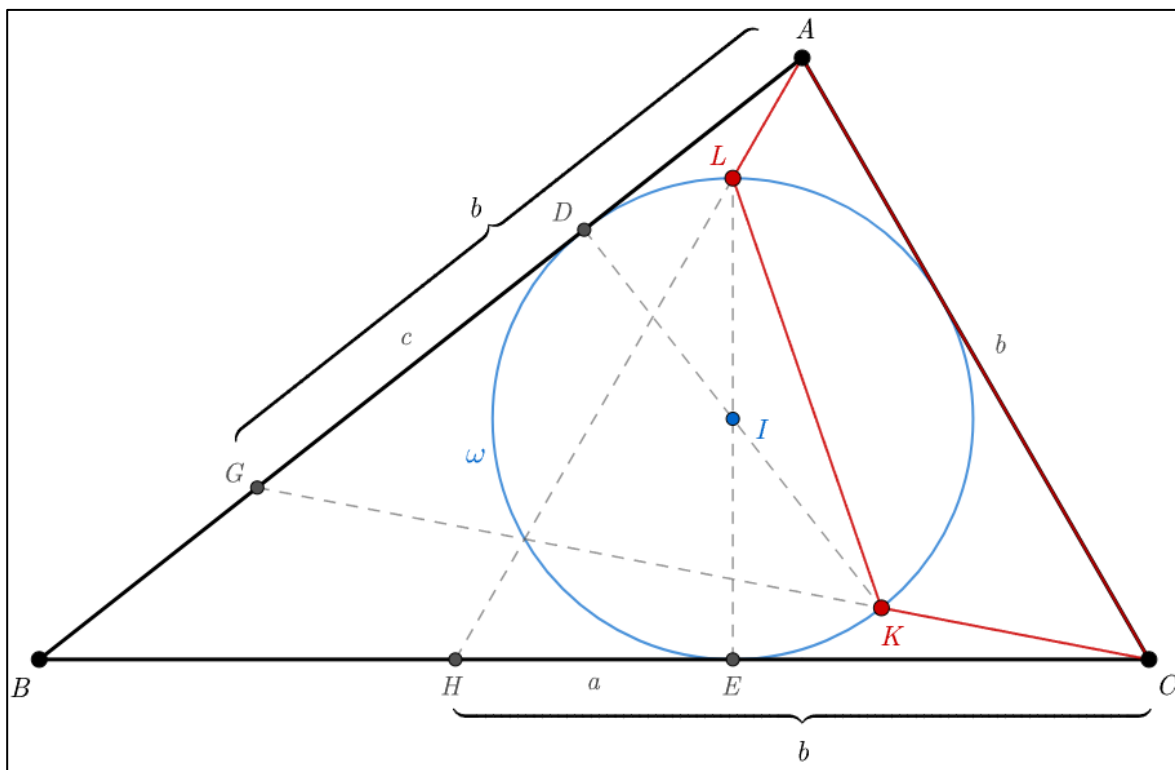
Megoldás. Készítsünk ábrát.



Vezessük be a szokásos jelöléseket: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, és jelölje s a háromszög félkerületét. A feltétel alapján

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{3b + b}{2} = 2b.$$

A 2. és 3. tény alkalmazását az alábbi ábra szemlélteti.



G a CK félegyenes és az AB oldal, H pedig az AL félegyenes és a BC oldal metszéspontját jelöli.

A 2. és 3. tény alapján $AG = s - b = b = AC$, valamint $CH = s - b = b = CA$. Ezért a GCA és az AHC háromszögek egyenlő szárúak.

Jelölje a háromszög szögeit szokásos módon rendre α, β, γ . Ekkor

$$\angle LAC = \angle HAC = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}, \quad (3)$$

Továbbá $AG = AC$, ezért az AGC háromszög egyenlő szárú, és mivel G az AB oldalon fekszik, $\angle GAC = \alpha$. Így

$$\angle AGC = \angle ACG = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Mivel K, G, C kollineárisak, ezért

$$\angle KGD = \angle AGC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Másrészt $KD \perp AB$, továbbá A, D, G kollineárisak, így $\angle GDK = 90^\circ$. Következésképpen

$$\angle GKD = \frac{\alpha}{2}.$$

Továbbá $IK = IL$ és $\angle KIL = 180^\circ - \beta$, így $\angle IKL = \frac{\beta}{2}$. Ennélfogva

$$\angle GKL = \angle GKD + \angle IKL = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}. \quad (4)$$

A (3) és (4) összefüggésekből következik, hogy

$$\angle LAC = \angle GKL.$$

Mivel C, K, G ebben a sorrendben kollineárisak, ezért

$$\angle LAC + \angle LKC = 180^\circ,$$

tehát az $ACKL$ négyszög húrnégyszög.

3. feladat. Legyen az ABC háromszög beírt köre ω , amely a BC és az AC oldalt rendre a D_1 , illetve az E_1 pontban érinti. Válasszuk meg a $D_2 \in BC$ és $E_2 \in AC$ pontokat úgy, hogy $CD_2 = BD_1$ és $CE_2 = AE_1$. Az AD_2 és BE_2 szakaszok metszéspontját jelölje P . Az ω kör és az AD_2 szakasz két metszéspontja közül jelölje Q az A -hoz közelebbit. Bizonyítsuk be, hogy $AQ = D_2P$. (USAMO, 2001, 2. feladat)

Megoldás. Vezessük be a szokásos jelöléseket: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$; jelölje s a háromszög félkerületét, r a beírt kör sugarát, r_a pedig az A csúccsal szemközti hozzáírt kör sugarát.

Jelölje X az A csúccsal szemközti hozzáírt körnek a BC egyenesen fekvő érintési pontját. Az 1. tény szerint $CX = BD_1$. Mivel $CD_2 = BD_1$, ezért $CX = CD_2$, vagyis $X = D_2$. Hasonlóképpen E_2 a B csúccsal szemközti hozzáírt körnek az AC oldalegyenesen fekvő érintési pontja.

$$\frac{r_a}{r} = \frac{s}{s-a}.$$
$$\frac{AQ}{AD_2} = \frac{s-a}{s}. \quad (5)$$
$$\frac{CB}{BD_2} \cdot \frac{D_2P}{PA} \cdot \frac{AE_2}{E_2C} = 1.$$

Mivel

$$CB = a, BD_2 = s - c, AE_2 = s - c, E_2C = s - a,$$

ezért

$$\frac{a}{s - c} \cdot \frac{D_2P}{PA} \cdot \frac{s - c}{s - a} = 1 \Rightarrow \frac{D_2P}{PA} = \frac{s - a}{a}.$$

Ez azt jelenti, hogy valamely $\lambda > 0$ számra $D_2P = \lambda(s - a)$, $PA = \lambda a$. Mivel P az AD_2 szakasz belső pontja, így $AD_2 = AP + D_2P = \lambda a + \lambda(s - a) = \lambda s$. Ennélfogva

$$\frac{D_2P}{AD_2} = \frac{\lambda(s - a)}{\lambda s} = \frac{s - a}{s}. \quad (6)$$

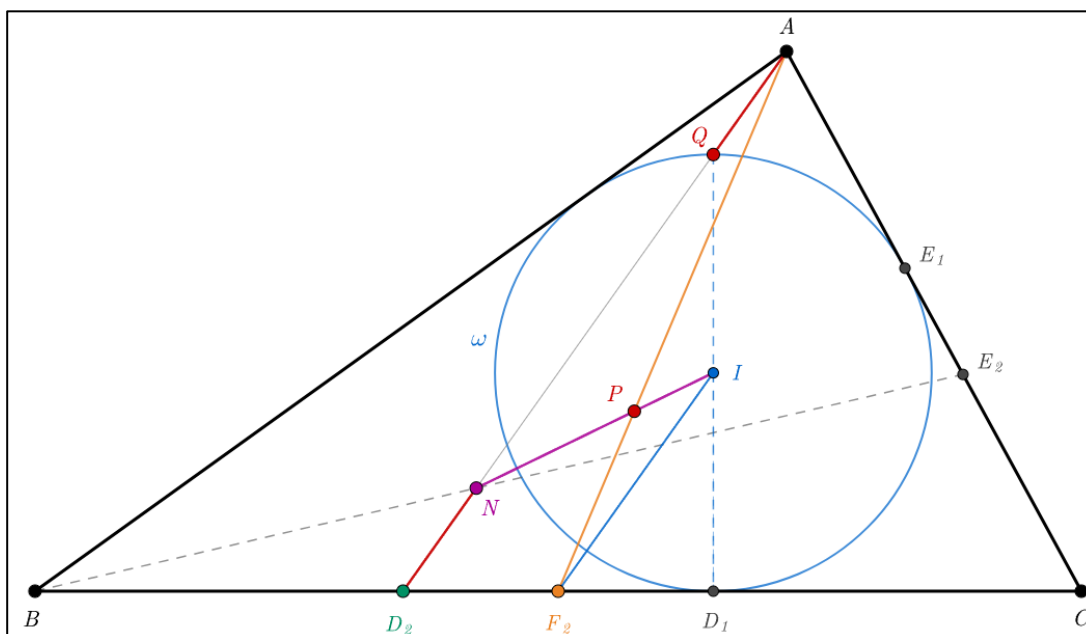
Az (5) és (6) összefüggésekből

$$\frac{AQ}{AD_2} = \frac{D_2P}{AD_2},$$

tehát $AQ = D_2P$.

4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy nem szabályos háromszög beírt körének I középpontja, S súlypontja és N Nagel-pontja kollineárisak, továbbá S az IN szakasz I -hez közelebbi harmadolópontja. Ezt az egyenest a háromszög Nagel-egyenésének nevezzük.

Megoldás. Készítsünk ábrát az előző feladat jelöléseinek felhasználásával. Legyen F_2 a D_1D_2 szakasz felezőpontja. A 4. tény alapján az AD_2 és BE_2 szakaszok metszéspontja a háromszög Nagel-pontja; jelöljük ezt N -nel. Az NI és az AF_2 egyenesek metszéspontja legyen P .



Az előző feladat eredménye szerint

$$AQ = ND_2. \quad (7)$$

Mivel A, Q, N, D_2 egy egyenesen helyezkednek el, továbbá Q és N egyaránt az AD_2 szakasz belső pontja,

$$AD_2 = AQ + QD_2 = AN + ND_2.$$

Az $AQ = ND_2$ egyenlőségből ezért

$$AN = QD_2. \quad (8)$$

Korábban megállapítottuk, hogy D_2 az A csúccsal szemközti hozzáírt kör BC oldalegyenessel vett érintési pontja, vagyis a 3. tényben szereplő X pont. Mivel Q az AD_2 félegyenesnek az A -hoz közelebbi metszéspontja a beírt körrel, a 3. tény alapján Q a beírt körnek a BC oldaltól vett legtávolabbi pontja.

Mivel D_1 a beírt kör és a BC oldal érintési pontja, a QD_1 szakasz a beírt kör átmérője, ezért I a QD_1 szakasz felezőpontja. A $CD_2 = BD_1$ egyenlőség miatt

$$BD_1 + BD_2 = CD_2 + BD_2 = BC.$$

Abból pedig, hogy F_2 a D_1D_2 szakasz felezőpontja, következik, hogy

$$BF_2 = \frac{BD_1 + BD_2}{2} = \frac{BC}{2},$$

vagyis F_2 a BC oldal felezőpontja is egyben. Így a QD_1D_2 háromszögben IF_2 középvonal, tehát

$$IF_2 \parallel QD_2 \text{ és } IF_2 = \frac{1}{2} QD_2.$$

A (8) összefüggés alapján ebből

$$IF_2 \parallel AN \text{ és } IF_2 = \frac{1}{2} AN. \quad (9)$$

Az AN és az IF_2 egyenesek párhuzamossága miatt a PAN és PF_2I háromszögek hasonlóak. A (9) összefüggésből következik, hogy

$$\frac{AP}{PF_2} = \frac{PN}{PI} = \frac{AN}{IF_2} = 2.$$

Mivel P az IN szakaszon helyezkedik el, az I, S és N pontok kollineárisak, továbbá

$$IS:SN = IP:PN = 1:2,$$

tehát S az IN szakasz I -hez közelebbi harmadolópontja.

5. feladat. Adott a síkon egy ω kör, az ω kört érintő e egyenes, valamint az e egyenes egy M pontja. Határozzuk meg azoknak a P pontoknak a mértani helyét, amelyekhez léteznek olyan Q és R pontok az e egyenesen, hogy M a QR szakasz felezőpontja, és ω a PQR háromszög beírt köre. (IMO, 1992).

Megoldás. Jelölje D az ω kör és az e egyenes érintési pontját, E pedig a kör D -vel átellenes pontját. Legyen F a D pont M -re vonatkozó tükörképe, vagyis M a DF szakasz felezőpontja. Megmutatjuk, hogy a keresett mértani hely az FE félegyenes E -n túli része.



Tegyük fel először, hogy P megfelelő pont, és Q, R az e egyenes olyan pontjai, amelyekre M a QR szakasz felezőpontja, továbbá ω a PQR háromszög beírt köre. A PE egyenes az e egyenest messe F' -ben. A Q és R pontokat úgy jelöljük, hogy D a QM szakaszon helyezkedjen el. Ekkor az e egyenesen a pontok sorrendje Q, D, M, F', R .

Mivel E a beírt körnek a QR oldaltól legtávolabbi pontja, a 3. tény alapján F' a QRP háromszög P csúccsal szemközti hozzáírt körének a QR oldalegyenesen fekvő érintési pontja. Az 1. tényből ezért következik, hogy

$$QD = RF'.$$

Másrészt M a QR szakasz felezőpontja, tehát

$$QM = MR.$$

Ezeket felhasználva kapjuk, hogy

$$QM = QD + DM = RF' + DM,$$

valamint

$$QM = MR = MF' + F'R.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $DM = MF'$. Ez azt jelenti, hogy M a DF' szakasz felezőpontja. Az e egyenesen azonban D -nek M -re vonatkozóan egyetlen tükörképe van, ezért $F' = F$.

Következésképpen P, E és F kollineárisak. A 3. tényből a pontok F, E, P sorrendje is következik, ezért P az FE félegyenes E -n túli részén helyezkedik el.

Térjünk rá a megfordításra. Legyen ezért P az FE félegyenes E -n túli tetszőleges pontja. A P -ből az ω körhöz húzott két érintő az e egyenest Q -ban, illetve R -ben messék. A Q és R jelölést úgy választjuk, hogy a pontok sorrendje az e egyenesen Q, D, M, F, R legyen. Az ω kör mindhárom oldalegyenest érinti, és a PQR háromszög belsejében helyezkedik el, ezért a háromszög beírt köre.

Mivel E a körnek az e egyenestől legtávolabbi pontja, és a PE egyenes az e egyenest F -ben metszi, az 1. és a 3. tény alapján

$$QD = RF.$$

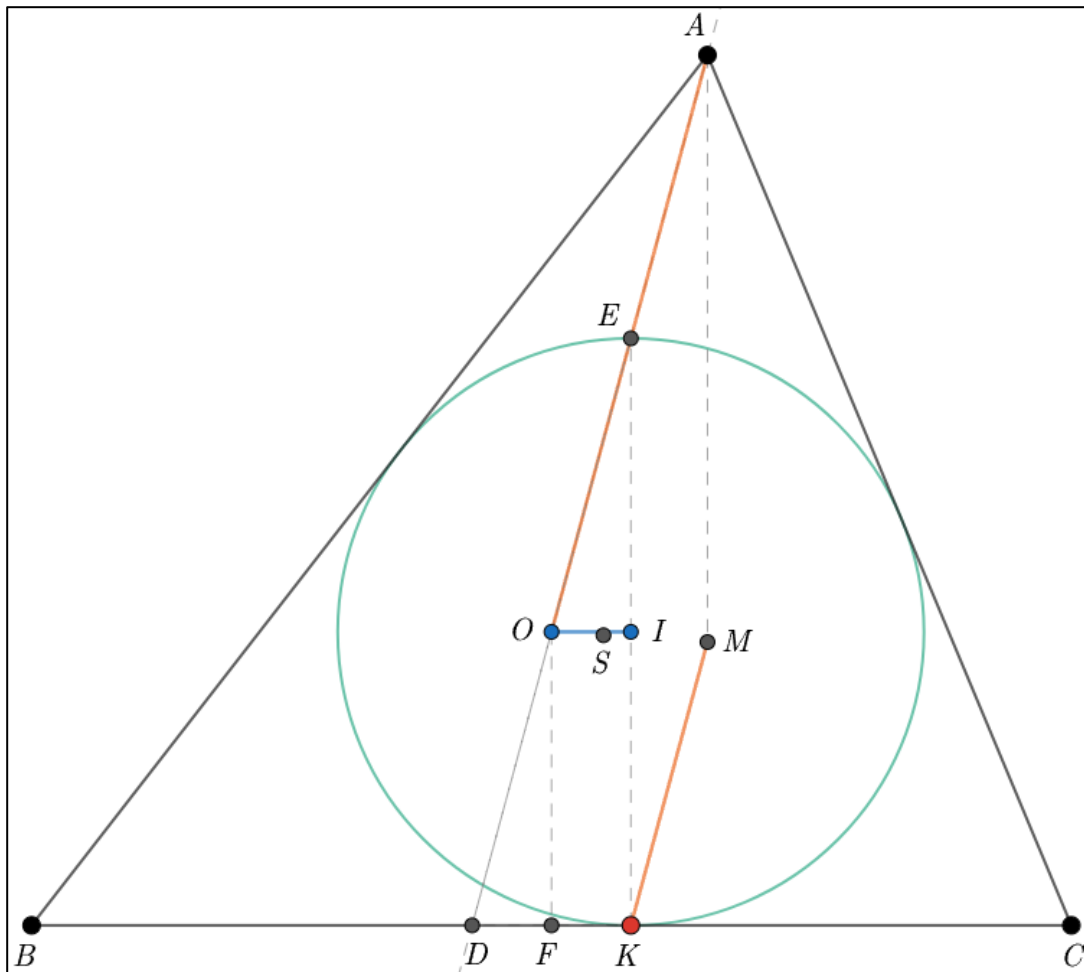
Mivel F definíciója szerint D és F egymás M -re vonatkozó tükörképei, ezért $DM = MF$, így

$$QM = QD + DM = RF + FM = RM,$$

vagyis M a QR szakasz felezőpontja. Ezért az FE félegyenes E -n túli részének minden P pontja megfelel a feltételeknek. A keresett mértani hely tehát az FE félegyenes E -n túli része.

6. feladat. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja M , beírt körének középpontja I , körülírt körének középpontja pedig O . Érintse a beírt kör a BC oldalt a K pontban. Tudjuk, hogy IO párhuzamos a BC oldallal. Bizonyítsuk be, hogy AO párhuzamos MK -val. (Tournament of Towns, 2003, őszi forduló)

Megoldás. Készítsünk ábrát. Jelölje E a beírt kör K -val átellenes pontját, vagyis legyen KE a beírt kör átmérője. Az AE egyenes a BC oldalegyenest messe D -ben. Jelölje továbbá F a BC oldal felezőpontját, S pedig az ABC háromszög súlypontját.



Mivel E a beírt kör BC oldaltól legtávolabbi pontja, a 3. tény alapján D az A csúcshoz tartozó hozzáírt kör BC oldalegyenessel vett érintési pontja. Az 1. tényből ezért

$$BK = CD.$$

Mivel F a BC oldal felezőpontja, így a fenti egyenlőségből következik, hogy

$$FK = FD,$$

tehát F a KD szakasz felezőpontja.

A K érintési pont miatt IK merőleges BC -re. Másrészt O rajta van a BC oldal felezőmerőlegesén, ezért OF is merőleges BC -re. A feladat feltétele szerint IO párhuzamos BC -vel, ezáltal KF -nel is. Így a $KIOF$ négyszög téglalap.

Fejezzük ki helyvektorok nyelvén azt, hogy a $KIOF$ négyszög téglalap:

$$\vec{o} - \vec{i} = \vec{f} - \vec{k} \Rightarrow \vec{o} = \vec{i} + \vec{f} - \vec{k}.$$

Mivel az I pont KE -t, F pedig KD -t felezi, így

$$\vec{o} = \frac{\vec{k} + \vec{e}}{2} + \frac{\vec{k} + \vec{d}}{2} - \vec{k} = \frac{\vec{e} + \vec{d}}{2}.$$

Tehát O az ED szakasz felezőpontja. Mivel A , E , O és D kollineárisak, így az AO és az AE egyenesek egybeesnek.

Tekintsük most a S középpontú, -2 arányú középpontos hasonlóságot. Ez a hasonlóság F -et A -ba, illetve O -t M -be képezi (utóbbi az Euler-egyenes tulajdonságából adódik). Következésképpen

$$AM = 2 \cdot FO.$$

A $KIOF$ téglalapban $FO = IK$, míg $KE = 2 \cdot IK$. Ebből kapjuk, hogy

$$AM = KE.$$

Az AM és a KE szakaszok egyaránt merőlegesek BC -re, tehát párhuzamosak is. Így az $AMKE$ négyszög paralelogramma, ezért

$$MK \parallel AE.$$

Mivel az AE és az AO egyenesek egybeesnek, végül

$$MK \parallel AO,$$

amit bizonyítani kellett.

Összegzés: A bemutatott feladatok jól szemléltetik, hogy a háromszög beírt és hozzáírt körei közötti egyszerű összefüggések miként alkalmazhatók összetettebb geometriai problémák megoldásában. A felhasznált forrásban számos további kitűzött feladat, valamint két másik geometriai lemma is található, így az anyag még sok lehetőséget kínál az önálló gondolkodásra és a szakköri munkára. Mindez egyaránt hozzájárulhat a pedagógus szakmai fejlődéséhez, valamint a tanulók problémamegoldó és bizonyítási készségének fejlesztéséhez.

Irodalomjegyzék

1. Reiman István – Dobos Sándor: *Nemzetközi matematikai diákolimpiák 1959–2003*.
Typotex Kiadó, Budapest, 2003.
2. Zhao, Yufei: *Three Lemmas in Geometry*. Winter Camp, 2010.
https://yufeizhao.com/olympiad/three_geometry_lemmas.pdf
3. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpia hivatalos honlapja:
<https://www.imo-official.org/>