

Grallert Krisztina

Miskolci Egyetem Földes Ferenc Gyakorló Gimnázium

grallertk@ffg.hu

Szekció: speciális matematika, középiskola

Kapcsolódás: matematika tehetséggondozás (kombinatorika, számelmélet)

A dolgozat témája nem kapcsolódik közvetlenül a Vándorgyűlés előadásaihoz vagy szemináriumaihoz, mégis ezt választottam, „mert szép”.

Hány távolság van egy vonalzón?

Egy vonalzó rejtélye

Bevezetés

A dolgozat célja egy olyan téma bemutatása, amely középiskolai szakköri keretek között feldolgozható, több matematikai területet kapcsol össze, felkelti a diákok érdeklődését, és a hazai oktatási gyakorlatban még kevésbé elterjedt. E szempontok alapján esett a választásom a Golomb-vonalzók témakörére.

A dolgozat felépítése olyan, hogy közvetlenül használható szakköri foglalkozáshoz. A bevezető feladat, valamint az (1)-(3) feladatok egyszerűek, lehetőséget adnak próbálkozásra, kísérletezésre. Az első 13 feladat 7-8. osztályos tudással megoldható (vagyis eljuthatunk a tökéletes Golomb vonalzó hosszának meghatározásáig). A (14) feladattól kezdődő rész inkább középiskolásoknak való.

Bevezető feladat: Egy régi vonalzóról sok jelölés már lekopott, de a 0, 3, 5, 7, 11 tisztán látható rajta. Milyen távolságokat lehet mérni ezzel a vonalzóval?

Megoldás:

2 egység többféle módon is. $5 - 3 = 7 - 5$.

3 egység $3 - 0$.

4 egység $11 - 7$.

5 egység $5 - 0$.

6 egység $11 - 5$.

7 egység $7 - 0$.

8 egység $11 - 3$.

11 egység $11 - 0$.

- (1) Egy vonalzón a következő jelölések láthatók: 0, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 12. Le lehet-e ezzel a vonalzóval mérni az 1, 2, 3, ..., 12 egység távolságokat?

Igen, néhány távolságot több módon is, például:

$2 - 0 = 5 - 3 = 7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9$; $1 - 0 = 2 - 1 = 3 - 2 = 12 - 11$.

- (2) Mi a válasz akkor, ha a 0, 1, 3, 7 és 12 jelölések láthatók a vonalzón?

A 8 és a 10 egység nem mérhető, a többi távolság igen és csak egyetlen módon.

- (3) Milyen jelöléseknek és feliratoknak kell szerepelniük egy vonalzón, hogy 1-től 6 egységig minden egész távolságot mérni tudjunk vele? Készítsünk minél kevesebb feliratot tartalmazó, minél rövidebb vonalzót!

A feliratok $\{0, 1, 4, 6\}$: $1 - 0$; $6 - 4$; $4 - 1$; $4 - 0$; $6 - 1$; $6 - 0$

A Golomb-vonalzó

Ha egy vonalzón csak egész számoknál van jelölés és ezek közül bármelyik kettőnek a távolsága különböző, akkor Golomb-vonalzónak nevezzük.

Definíció: L hosszúságú, n -ed rendű Golomb-vonalzó az $\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ halmaz, ahol $a_i \in N$, minden $1 \leq i \leq n$ esetén, $0 = a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n = L$ és az $|a_i - a_j|$ távolságok különbözőek minden $i \neq j$; $1 \leq i, j \leq n$, $i, j \in N$ esetén.

Definíció: A Golomb-vonalzót tökéletesnek nevezzük, ha minden távolságot mér a hosszáig, azaz, ha $m \leq a_n - a_1$ egy pozitív egész szám, akkor léteznek $i \neq j$; $1 \leq i, j \leq n$ pozitív egész számok, amelyekre $m = a_j - a_i$.

A bevezető példákban szereplő vonalzók közül (1) nem Golomb-vonalzó, (2) Golomb-vonalzó, (3) tökéletes Golomb-vonalzó. (1) minden távolságot mér, az ilyen vonalzót kiterjedő/spanning vonalzónak nevezzük.

- (4) Egy vonalzón a 2^k számoknál van jelölés, $k=0; 1; 2; 3; \dots; K \geq 3$. Golomb-vonalzó-e, illetve tökéletes Golomb-vonalzó-e?

A jelölések: 1; 2; 4; 8; 16; A mérhető páratlan távolságok $2^k - 1$ alakúak, így például az 5 nem mérhető, tehát a vonalzó nem lehet tökéletes. A mérhető páros távolságok $2^k - 2^l$ alakúak. Tegyük fel, hogy van közöttük két egyforma, azaz léteznek $k_1 > l_1, k_2 > l_2$ különböző pozitív egész számok, amelyekre $2^{k_1} - 2^{l_1} = 2^{k_2} - 2^{l_2}$. Ebből $2^{l_1}(2^{k_1-l_1} - 1) = 2^{l_2}(2^{k_2-l_2} - 1)$. Mindkét oldalon az első tényező páros, a

második páratlan. Vizsgálva a 2-hatványokkal való oszthatóságot azt kapjuk, hogy $l_1 = l_2$. Ekkor $2^{k_1-l_1} - 1 = 2^{k_2-l_2} - 1$, ebből $k_1 = k_2$. Tehát a páros távolságok egyediek a vonalzón, így az Golomb-vonalzó.

- (5) Adjunk példát olyan 12 egység hosszú vonalzóra, amellyel minden legfeljebb 12 egységnyi egész távolság mérhető és amelyen legfeljebb 7 jelölés van.

A vonalzó jelöléseinek számát a vonalzó rendjének is nevezzük. Az (5) feladatban olyan 12 egység hosszú, legfeljebb hetedrendű vonalzót keresünk, amellyel minden legfeljebb 12 egységnyi egész távolság mérhető.

Több ilyen vonalzó megadható, például: $\{0; 1; 3; 7; 8; 10; 12\}$, $\{0; 2; 4; 6; 8; 11; 12\}$, $\{0; 1; 4; 5; 7; 10; 12\}$

- (6) Adjunk példát olyan 12 egység hosszú vonalzóra, amellyel minden legfeljebb 12 egységnyi egész távolság mérhető és bármely jelölést elhagyva már nem mérhető vele minden egész távolság.

Ötödrendű, azaz öt jelölést tartalmazó vonalzóval legfeljebb $\binom{5}{2} = 10$ féle távolságot mérhetünk, vagyis több jelölés kell. Keressünk hatodrendű vonalzót, amellyel 12 egységig minden egész távolságot mérhetünk. A $\{0, 1, 7, 8, 10, 12\}$ vonalzó ilyen, ez rövid számolással ellenőrizhető. Az is igaz, hogy egy jelölés leghagyásával már nem lesz mérhető minden egész távolság, hiszen 5 jelöléssel legfeljebb 10 féle távolság mérhető. (Például az 1 leghagyásával nem mérhető a 6, 9, 11.)

- (7) Legalább hány jelölés kell arra a vonalzóra (a 0-t és a 12-t is beleértve), amellyel az 1, 2, 3, ..., 12 egész távolságok mindegyikét mérni tudjuk, bárhogyan is helyezzük el a jelöléseket az egész számoknál?

11 jelölés nem elegendő, hiszen ha a jelöléseket a 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 számoknál helyezzük el, akkor nem mérhető a 11 hosszúságú szakasz. Tehát legalább 12 jelölés kell. Ez elegendő is, hiszen ha 0, 1, ..., $k-1$, $k+1$, ..., 12 számoknál van jelölés a vonalzón, k is mérhető ($k+1$)-nél és 1-nél szereplő jelöléssel ($1 \leq k \leq 11$).

- (8) Adjunk példát 5 jelöléssel rendelkező 12 hosszú Golomb-vonalzóra!

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\{0, 1, 7, 10, 12\}$ megfelelő.

- (9) Létezik-e 6 jelöléssel rendelkező 12 hosszú Golomb-vonalzó?

A hat jelölésből $\binom{6}{2} = 15$ párt képezhetünk. Golomb-vonalzó esetén ez 15 különböző érték, de ezek nem lehetnek egy 12 egység hosszú vonalzón. Tehát nem létezik hatodrendű 12 hosszú Golomb-vonalzó.

- (10) Létezik-e 12 hosszú Golomb-vonalzó, amellyel az 1, 2, 3, ..., 12 távolságok mindegyike mérhető?

A (8) feladat szerint hatodrendű vonalzó nincs. Ötödrendű vonalzón az öt jelölésből $\binom{5}{2} = 10$ párt képezhetünk, de 12-féle távolságot kell mérnünk. Azaz nem létezik tökéletes 12 egység hosszú Golomb-vonalzó.

A $\{0; 1; 3; 7\}$, a $\{4; 5; 7; 11\}$ és a $\{0; 4; 6; 7\}$ jelölésekkel rendelkező vonalzókkal ugyanazok a távolságok mérhetők. Ezt úgy mondjuk, hogy a számhalmazok ugyanazokat a vonalzókat reprezentálják, ezek a vonalzók lényegében nem különböznek.

- (11) Keressünk egy másik olyan egészekből álló halmazt, amely a $\{0; 2; 3; 5; 11\}$ vonalzót reprezentálja.

Megfelelő számhalmazhoz jutunk eltolással, például $\{3; 5; 6; 8; 14\}$ vagy tükrözéssel. Az 5,5 pontra tükrözve a $\{0; 6; 8; 9; 11\}$ halmazhoz jutunk.

- (12) Adjunk meg 20 hosszúságú, hatodrendű Golomb-vonalzót! A megadott vonalzó tökéletes-e?

Például: $\{0; 1; 3; 7; 12; 20\}$, $\{0; 1; 3; 7; 15; 20\}$, $\{0; 2; 6; 7; 10; 19\}$. Egyik sem tökéletes.

- (13) Igazoljuk, hogy egy n -ed rendű Golomb-vonalzó hossza legalább $\frac{n(n-1)}{2}$.

Az n -ed rendű vonalzón két jelölést $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ féle módon választhatunk ki. A vonalzó Golomb-vonalzó, így minden távolságot egyedien mér, ezért a hossza legalább $\frac{n(n-1)}{2}$. Ha a vonalzó tökéletes is, azaz hosszáig minden távolságot mér, akkor hossza éppen $\frac{n(n-1)}{2}$.

- (14) Tegyük fel, hogy $\{0; a_2; a_3; \dots; a_{n-1}; L\}$ egy $L \geq 10$ hosszúságú tökéletes Golomb-vonalzó. Igazoljuk, hogy $n \geq 5$ és $a_2 = 1$ vagy $a_{n-1} = L - 1$, de a kettő egyszerre nem teljesülhet.

Az előző feladat szerint a vonalzó hossza $L = \frac{n(n-1)}{2}$. Egy negyedrendű vonalzón $\binom{4}{2} = 6$ távolság mérhető, így $L \geq 10$ miatt $n \geq 5$. Az $L - 1$ méréséhez az $a_{n-1} - 0$ és az $L - a_2$ lehetőségek közül pontosan az egyiket használhatjuk. Így $a_{n-1} = L - 1$ vagy $a_2 = 1$, és a kettő egyszerre nem igaz.

- (15) Tegyük fel, hogy $\{0; 1; a_3; \dots; a_{n-1}; L\}$ egy $L \geq 10$ hosszúságú tökéletes Golomb-vonalzó. Igazoljuk, hogy $a_3 = 4$ vagy $a_{n-1} = L - 2$.

$a_2 = 1$, emiatt $a_{n-1} \leq L - 2$, $a_{n-2} \leq L - 3$ és $a_3 \geq 3$. Az $L - 2$ méréséhez csak az a_{n-1} és a 0 használható, ezért $a_{n-1} = L - 2$. Így $a_3 \geq 4$ és $a_{n-2} \leq L - 5$, különben $2 = L - a_{n-1} = a_3 - 1$ vagy $2 = L - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$ teljesülne. Így az $L - 4$ méréséhez csak az L és a_3 használható, vagyis $a_3 = 4$.

- (16) Tegyük fel, hogy $\{0; 1; 4; a_4; \dots; a_{n-2}; L - 2; L\}$ egy $L \geq 10$ hosszúságú Golomb-vonalzó. Igazoljuk, hogy ez nem lehet tökéletes!

Tekintsük a $0; 1; 4; L - 2; L$ jelöléseket. Ezekkel a következő távolságok állíthatók elő: $1; 2; 3; 4; L - 6; L - 4; L - 3; L - 2; L - 1$ és L . $L \geq 10$ miatt az $L - 5$ távolságot még nem állítottuk elő. Az előállításához a következő táblázatban szereplő párok valamelyikére szükség van, azonban ezek mindegyike ismétlődéshez vezet:

	ismétlődés
0 és $L - 5$	$4 - 1 = (L - 2) - (L - 5)$
1 és $L - 4$	$4 - 0 = L - (L - 4)$
2 és $L - 3$	$4 - 1 = L - (L - 3)$
3 és $L - 2$	$3 - 1 = L - (L - 2)$
4 és $L - 1$	$1 - 0 = (L - 1) - (L - 2)$
5 és L	$1 - 0 = 5 - 4$

Tehát a Golomb-vonalzó nem tökéletes.

Láttuk, hogy egy n -ed rendű tökéletes Golomb-vonalzó hossza $L = \frac{n(n-1)}{2}$ háromszögszám. A 10-nél kisebb háromszögszámok 0, 1, 3, 6; a megfelelő vonalzók $\{0\}$, $\{0; 1\}$, $\{0; 1; 3\}$ és $\{0; 1; 3; 6\}$ (vagy ezeknek más reprezentációja). Nagyobb hosszúságú tökéletes Golomb-vonalzó nem létezik.

Optimális Golomb-vonalzó

Az előzőek szerint kevés tökéletes Golomb-vonalzó létezik. Keressünk „kevésbé tökéletes” Golomb vonalzót, azaz a „minden távolságot mérjen a hosszaiig” követelmény helyett törekedjünk arra, hogy minél több távolságot mérjen.

Definíció: Jelölje $G(n)$ a lehetséges legrövidebb hosszt az összes n -ed rendű (n rögzített) Golomb-vonalzó között. Egy n -ed rendű Golomb-vonalzót optimálisnak nevezünk, ha a hossza $G(n)$.

A tökéletes Golomb-vonalzók egyben optimálisak is. $G(n)$ -re nem ismert explicit képlet, de becsléssel próbálkozhatunk. A (12) feladat szerint $G(n) \geq \frac{n(n-1)}{2}$. Ahhoz, hogy felülről is becsülni tudjuk, egy eljárást adunk Golomb-vonalzó szerkesztésére.

Legyen $n \geq 5$ egész szám. Képezzük a következő sorozatot:

$$a_k = (nk - n - 1)(k - 1), 1 \leq k \leq n$$

Annak bizonyítása előtt, hogy a megadott sorozat Golomb-vonalzó, alkalmazzuk ezt egy ötödrendű vonalzó előállításához.

$$a_1 = (5 \cdot 1 - 5 - 1)(1 - 1) = 0$$

$$a_2 = (5 \cdot 2 - 5 - 1)(2 - 1) = 4$$

$$a_3 = (5 \cdot 3 - 5 - 1)(3 - 1) = 18$$

$$a_4 = (5 \cdot 4 - 5 - 1)(4 - 1) = 42$$

$$a_5 = (5 \cdot 5 - 5 - 1)(5 - 1) = 76$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a távolságok egyediek.

Az általános eset bizonyításához tegyük fel indirekt úton, hogy léteznek $1 \leq k < m \leq n$ és $1 \leq k' < m' \leq n$, $m \neq m'$ és $k \neq k'$ pozitív egészek, amelyekre $a_m - a_k = a_{m'} - a_{k'}$. Ebből

$$(mn - n - 1)(m - 1) - (nk - n - 1)(k - 1) = \\ (m'n - n - 1)(m' - 1) - (nk' - n - 1)(k' - 1)$$

Beszorzás, rendezés és szorzattá alakítás után:

$$(m - k)(n(m + k) - 2n - 1) = (m' - k')(n(m' + k') - 2n - 1)$$

Vizsgálva a két oldal n szerint maradékát: $m - k \equiv m' - k' \pmod{n}$.

Mivel $1 \leq m, k, m', k' \leq n$, a maradékok egyenlőségéből $m - k = m' - k'$ is következik, így $n(m + k) - 2n - 1 = n(m' + k') - 2n - 1$, azaz $m + k = m' + k'$.

Az $m - k = m' - k'$ és $m + k = m' + k'$ csakúgy teljesülhet, ha $m = m'$ és $k = k'$, indirekt feltételünk tehát nem igaz.

(17) Határozzuk meg az előző eljárással előállított n -ed rendű Golomb-vonalzó hosszát és igazoljuk, hogy $G(n) < n^3$.

$$\text{A vonalzó hossza } L = a_n = (n^2 - n - 1)(n - 1) = n^3 - 2n + 1 < n^3 \text{ mivel } n \geq 5.$$

A következő táblázat mutatja az ismert optimális Golomb-vonalzók hosszát (L) $n \leq 11$ – re

n	L	jelölések pozíciója
1	0	0
2	1	0, 1
3	3	0, 1, 3
4	6	0, 1, 4, 6
5	11	0, 1, 4, 9, 11 0; 3; 4; 9;11
6	17	0, 1, 4, 10, 12, 17 0; 1; 4; 10; 15; 17; 0; 3; 5; 9; 16; 17; 0; 4; 6; 9; 16; 17
7	25	0, 2, 3, 10, 16, 21, 25 0; 1; 4; 10; 18; 23; 25 0; 2; 6; 9; 14; 24; 25 0; 1; 7; 11; 20; 23; 25 0; 3; 4; 12; 18; 23; 25
8	34	0, 1, 4, 11, 20, 26, 32, 34
9	44	0, 5, 12, 18, 23, 27, 32, 39, 44
10	55	0, 6, 9, 19, 29, 31, 38, 43, 53, 55
11	72	0, 1, 9, 19, 24, 31, 42, 53, 58, 69, 72 0; 1; 4; 13; 28; 33; 47; 54; 64; 70; 72

Nem ismert rájuk matematikai képlet, a pontos értékeket keresőprogramok határozzák meg (mint például a [Distributed.net OGR](https://distributed.net) projekt). 2022. november 23-án 28-ad rendű optimális Golomb-vonalzót találtak.

A Golomb-vonalzók alkalmazásai:

- rádióantennák és rádióteleszkópok elrendezésének tervezése, rádiócsillagászat: A csillagászok gyakran egy egyenes mentén elhelyezett rádiótávcső-hálózatot használnak arra, hogy egy távoli csillagból érkező fény vagy elektromágneses sugárzás különböző jellemzőit mérjék. Az interferometriának nevezett eljárás során két, egymástól különböző

helyen lévő távcső ugyanabban a pillanatban végzett méréseit hasonlítják össze. A két mérés különbségének vizsgálatával több információ nyerhető ki, mint az egyes távcsövek megfigyeléseinek önálló elemzésével. A két mérés különbözőnek tekinthető, ha az első méréshez használt két távcső közötti távolság eltér a második méréshez használt távcsőpár távolságától. Ha a távcsöveket egy Golomb-vonalzó jelöléseinek megfelelő helyekre telepítik, akkor a különböző távcsőpárok közötti távolságok száma maximális lesz.

- kódolás, hibajavító kódok
- Sidon-halmazok: A véges Sidon-halmaz a természetes számok egy olyan $S = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_{n-1}; a_n\}$ halmaza, amelyben bármely két elem összege különböző. A halmaz névadója Sidon Simon magyar matematikus.

A Sidon-halmazok és a Golomb-vonalzók között szoros a kapcsolat, hiszen ha a páronkénti különbségek mind egyediek a halmazban, akkor a páronkénti összegek is egyediek:

$a_i - a_j \neq a_l - a_k \Leftrightarrow a_i + a_k \neq a_l + a_j$, vagyis minden Golomb-vonalzó egy véges Sidon-halmaz és fordítva: minden véges Sidon-halmaz egy Golomb-vonalzó.

Források:

Roger C. Alperin Vladimir Drobot: *Golomb Rulers*; DRAFT VOL. 83, NO. 5, DECEMBER 2010

Yingkun Li: *Golomb Rulers*

Apostolos Dimitromanolakis: *Analysis of the Golomb Ruler and the Sidon Set Problems, and Determination of Large, Near-Optimal Golomb Rulers*

en.wikipedia.org/wiki/Golomb_ruler