

Csetneki Csilla

Miskolci Egyetem Földes Ferenc Gyakorló Gimnázium, csetnekics@ffg.hu

középiskola, speciális matematika tagozat

Dobos Sándor Feladatmegoldások az olimpiai szakkörökről c. előadása inspirálta.

A megunhatatlan Fibonacci - sorozat

Dolgozatom egy összefoglaló szakköri anyagnak készült, mely a mindennapi élethez köthető alkalmazásokat, érdekességeket is tartalmaz.

1. Fibonacci sorozat és az aranymetszés

$\frac{f_{n+1}}{f_n}$ vizsgálata:

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$
1	2	1,5	1,667	1,6	1,625	1,615	1,619

Sejtés:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = x_1$$

Bizonyítás:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -1$$

$$x_1 = -\frac{1}{x_2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = -x_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{f_{n-1}}{f_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}}$$

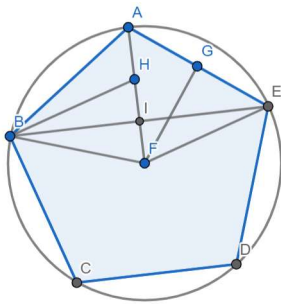
$$1 + \frac{1}{x_1} = x_1$$

$$x_1^2 - x_1 - 1 = 0$$

aranymetszés egyenlete

□

2. Szabályos ötszög és az aranymetszés



$$r = 1 = BF = AF = EF$$

Mekkora a szabályos ötszög átlója ($BE = p$) és oldala ($BA = AE = \dots = a$)?

$$a^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

$$p^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$$

Bizonyítás:

Megállapítások, melyeket a bizonyítás során felhasználunk:

$$FG \perp AE$$

$$BI = IE = \frac{p}{2}$$

$$BH \text{ szögfelező} \Rightarrow \angle ABH = \angle HBI = 18^\circ \Rightarrow BH = 1 \text{ és } HI = IF$$

$$\angle IBF = \angle IEF = 18^\circ$$

$$\angle ABI = \angle AEI = 36^\circ$$

$$\angle BAF = \angle FAE = 54^\circ$$

$$\angle BFI = \angle IFE = 72^\circ$$

$$\triangle AFG \sim \triangle AEI \Rightarrow \frac{1}{\frac{a}{2}} = \frac{a}{AI}$$

$$AI = \frac{a^2}{2} \Rightarrow IF = 1 - \frac{a^2}{2} = HI \Rightarrow AH = \frac{a^2}{2} - \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) = a^2 - 1$$

Szögfelezőtétel HBF-szög-re:

$$\frac{AH}{HI} = \frac{a}{\frac{p}{2}}$$

$$\frac{a^2 - 1}{1 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\frac{p}{2}}$$

$$p = \frac{2a - a^3}{a^2 - 1}$$

Pitagorasz-tétel IEF-szög-re:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^2 = 1^2$$

$$p^2 = 4a^2 - a^4$$

A két tételt összevetve:

$$\left(\frac{2a - a^3}{a^2 - 1}\right)^2 = 4a^2 - a^4$$

$$\text{Amiből } 0 = -a^8 + 5a^6 - 5a^4$$

$$0 = -a^4 \cdot (a^4 - 5a^2 + 5)$$

$$a^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Egyértelmű, hogy az ötszög oldala:

$$a = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

átlója:

$$p^2 = 4 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$$

$$p = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$$

□

A szabályos ötszög átlójának és oldalának hányadosa:

$$\frac{p}{a} = \frac{\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})^2}{25 - 5}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

3. Ikerprímek, Brun - szám

Euklidésztől származik az *ikerprím sejtés*: végtelen sok p prímszám van, melyre $p+2$ is prím.

Viggo Brun norvég matematikus 1918-ban bebizonyította, hogy az ikerprímek

reciprokösszege konvergál egy adott értékhez, melyet *Brun-konstans*nak neveznek.

$$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) + \dots$$

Érdekes észrevétel, ami lehet kapcsolat, vagy csak belemagyarázás:

$$B = 1,9021605777\dots$$

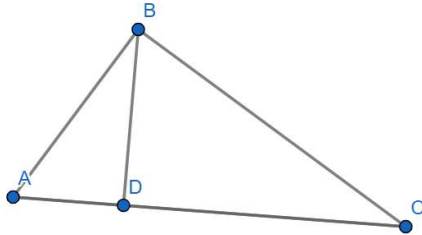
$$p = 1,9021130325\dots$$

Erdős Pál is foglalkozott a Brun-számmal. 1993-as előadásában beszél is róla:

https://www.youtube.com/watch?v=mZMW_zXcSi0

4. Aranyháromszög

Összekapcsolja az aranymetszés egyenletének gyökeit, az egységnyi sugarú körbe írt szabályos ötszög átlójának és oldalának hosszát. Bizonyítható, hogy a háromszög derékszögű.



$$DC = x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$AD = -x_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$AB = a = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

$$BC = p = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$$

Bizonyítás:

$$AB^2 + BC^2 = \left(\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \right)^2 = \frac{10}{2} = 5$$

$$AC^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$$

□

5. Algebrai megközelítés

5.1 Összegképlet

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

$$f_3 = f_1 + f_2$$

$$f_4 = f_2 + f_3 = f_2 + (f_1 + f_2) = 1 + f_1 + f_2$$

$$f_5 = f_3 + f_4 = f_3 + (1 + f_1 + f_2) = 1 + f_1 + f_2 + f_3$$

$$\Rightarrow f_n = 1 + f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-2}$$

$$\Rightarrow f_{n+2} = 1 + f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n$$

$$\sum_{i=1}^n f_i = f_{n+2} - 1$$

Teljes indukció:

1. lépés: $n=1$ -re igaz

2. lépés: indukciós feltevés

$$\sum_{i=1}^n f_i = f_{n+2} - 1$$

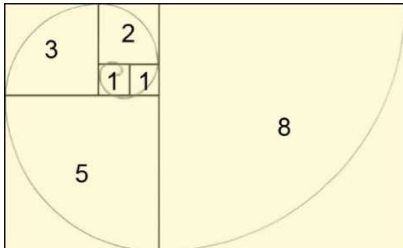
3. lépés: bizonyítás $(n+1)$ -re

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i = \sum_{i=1}^n f_i + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1} = f_{n+3} - 1$$

□

5.2 Négyzetösszeg

$n=6$ -ra:



A téglalap oldalai:

$$3+5 = 8 = f_4 + f_5 = f_6$$

$$5+8 = 13 = f_5 + f_6 = f_7$$

A téglalap területe, ami a négyzetek területeinek összege:

$$t = f_6 \cdot f_7 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + f_5^2 + f_6^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

Teljes indukció:

1. lépés: $n=1$ -re igaz $f_1^2 = f_1 \cdot f_2$

2. lépés: indukciós feltevés

$$\sum_{i=1}^n f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

3. lépés: bizonyítás $(n+1)$ -re

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2 + f_{n+1}^2 = f_n \cdot f_{n+1} + f_{n+1}^2 = f_{n+1} \cdot (f_n + f_{n+1}) = f_{n+1} \cdot f_{n+2}$$

□

5.3 Létezik-e olyan mértani sorozat, mely eleget tesz a Fibonacci sorozat képzési szabályának?

A kérdésfeltevés ötlete:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Mértani sorozat:

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{q} \quad a_n \quad a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Ha eleget tesz a Fibonacci sorozat képzési szabályának:

$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$$

$$a_n \cdot q = a_n + \frac{a_n}{q}$$

$$q = 1 + \frac{1}{q}$$

$$q^2 - q - 1 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Megjegyzés: $q_1 + q_2 = 1$ $q_1 - q_2 = \sqrt{5}$

Az alábbi sorozatok megfelelnek a feltételeknek:

$$a_0 \quad a_0 \cdot q_1 \quad a_0 \cdot q_1^2 \quad \dots$$

$$a_0 \quad a_0 \cdot q_2 \quad a_0 \cdot q_2^2 \quad \dots$$

5.4 Hatványsorozat

Érdeemes vizsgálni q_1 és q_2 hatványait.

$$q_1^0 = 1$$

$$q_1^1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$q_1^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = f_2 \cdot q_1 + f_1$$

$$q_1^3 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2 + \sqrt{5} = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = f_3 \cdot q_1 + f_2$$

$$\Rightarrow q_1^n = f_n \cdot q_1 + f_{n-1}$$

5.5 Összege sorozat, Lucas - faktor

A fentiekhez hasonlóan alkalmazzuk q_2 -re is.

$$q_1^n = f_n \cdot q_1 + f_{n-1}$$

$$q_2^n = f_n \cdot q_2 + f_{n-1}$$

$$\Rightarrow q_1^n + q_2^n = f_n \cdot (q_1 + q_2) + 2 \cdot f_{n-1} = f_n + f_{n-1} + f_{n-1} = f_{n+1} + f_{n-1}$$

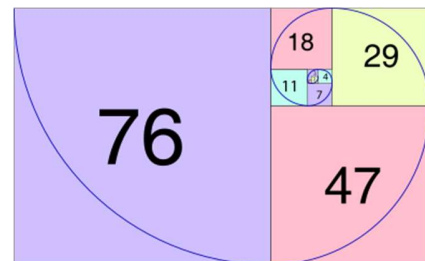
Szemléletesebben:

$$\begin{array}{l} n: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots \\ F_n: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \\ L_n: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots \end{array}$$

Diagram showing the addition of Fibonacci numbers to form Lucas numbers:

```

      0 1 1 2 3 5 8 13 21
      | | | | |
      + + + + +
      | | | | |
      2 1 3 4 7 11 18 29 47
  
```



Ezt az összege sorozatot nevezik Lucas-számoknak. (Édouard Lucas (1842-1891) francia matematikus.)

5.6 Különbség sorozat, Binet – formula

$$q_1^n - q_2^n = f_n \cdot (q_1 - q_2) = f_n \cdot \sqrt{5}$$

Tehát az n -edik Fibonacci-szám képezhető explicit módon:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (q_1^n - q_2^n)$$

5.7 Összefüggések

Az alábbi eredmények a sorozat képzési szabályából adódnak. Ahogy a szakirodalom szokta mondani: „bizonyítását az olvasóra bízjuk”.

$$f_{n+k} = f_{k-1} \cdot f_n + f_k \cdot f_{n+1}$$

$$f_{n-k} = f_{-k-1} \cdot f_n + f_{-k} \cdot f_{n+1}$$

$$f_{-n} = f_n \cdot (-1)^{n+1}$$

Megjegyzés:

A Fibonacci – sorozat kiterjeszthető negatív irányba:

$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$$

$$\Rightarrow a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

$$\text{Így } a_0 = 0 \quad a_{-1} = 1 \quad a_{-2} = -1 \quad a_{-3} = 2 \dots$$

$$f_{n-k} = (f_{k+1} \cdot f_n - f_k \cdot f_{n+1}) \cdot (-1)^k$$

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$$

$$f_{2n} = f_n \cdot (f_{n-1} + f_{n+1})$$

$$f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$$

$$f_{n(k+1)} = f_n \cdot f_{nk+1} + f_{nk} \cdot f_{n-1}$$

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} = f_n^2 + (-1)^n$$

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} = (f_n + 1) \cdot (f_n - 1)$$

5.8 Érdekességek

5.8.1 Számrendszerek versenye (komputeralgebrai kérdés)

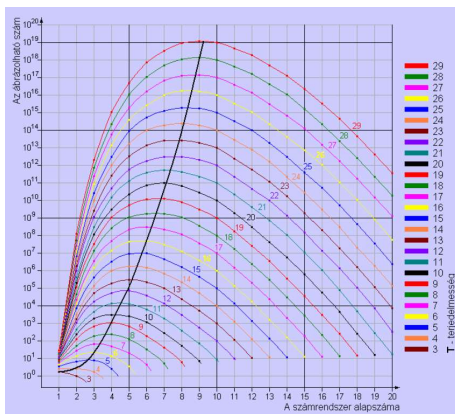
<http://www.t-es-t.hu/minden/tudom/szamrend.htm>

Milyen szempontok alapján vizsgálódjunk?

Például:

Számrendszer alapszáma	5	8	10	12	16
A tanulás anatómiai alapja	egy kéz ujjainak száma (a másik kéz lehet a magasabb helyiérték) 5	két kéz ujjai a hüvelykujjak nélkül 3	két kéz ujjainak száma 4	nincs egyszerű alap 2	nincs egyszerű alap 1
Az alapszám osztói	nincs egész osztó 1	4 - felezhető 2 - negyedelő 4	5 - felezhető 2	6 - felezhető 4 - harmadolható 3 - negyedelő 5	8 - felezhető 4 - negyedelő 4
A szorzótábla mérete	$5 \times 5 = 25$ 5	$8 \times 8 = 64$ 4	$10 \times 10 = 100$ 3	$12 \times 12 = 144$ 2	$16 \times 16 = 256$ 1
A kettes számrendszerbe való átalakíthatóság	nehéz 1	nagyon könnyű 5	nehéz 1	nehéz 1	könnyű 4
Tömörség a gyermeki tartományban (1000-ig)	kiváló 5	jó 4	közepes 3	rossz 2	nagyon rossz 1
Tömörség a hetiköznapi tartományban (10 ¹⁵ -ig)	jó 4	kiváló 5	jó 4	közepes 3	rossz 2
Tömörség a tudományos tartományban (10 ¹⁰⁰ -ig)	rossz 2	közepes 3	jó 4	jó 4	kiváló 5
Összesen:	23	28	21	19	18

Az ábrázolható szám a számrendszer alapszámának függvényében:



Kártyákra írunk egy-egy számjegyet, melyekből kirakhatjuk az adott értéket. Milyen számrendszerben kell a lehető legkevesebb kártyával dolgoznunk? (Minden helyiértéken rendelkezünk kell az összes lehetséges kártyával.)

Például:

2-es számrendszerben:

$$2^{10} = 1024 \quad \text{kártyák száma: } 2 \cdot 10 = 20$$

10-es számrendszerben:

$$10^3 = 1000 \quad \text{kártyák száma: } 10 \cdot 3 = 30$$

Ezek alapján mi lehet az ideális számrendszer?

a : számrendszer alapszáma

n : kitevő

s : a vizsgált szám

k : kártyák száma

$k = a \cdot n$ -nak milyen a -nál lesz minimuma?

$$a^n = s$$

$$\ln a^n = \ln s$$

$$n = \frac{\ln s}{\ln a}$$

$$a \cdot n = a \cdot \frac{\ln s}{\ln a}$$

$$\frac{k}{\ln s} = \frac{a}{\ln a}$$

Szélsőérték vizsgálat:

$$\left(\frac{a}{\ln a}\right)' = \frac{1 \cdot \ln a - a \cdot \frac{1}{a}}{\ln^2 a} = 0$$

$$\ln a = 1$$

$$a = e$$

Tehát ebből a szempontból az ideális számrendszer az e alapú lenne.

Fibonacci-számrendszer:

Kikötjük, hogy csak a 0 és 1 fordulhat elő (2 szereplése miatt).

...	8	5	3	2	1	érték
	1	0	0	0	0	8
	0	1	1	0	0	8
	0	1	0	1	1	8

Ez némileg problémás, hogy többféle felírása létezik egy adott értéknek.

Itt jön Edouard Zeczkendorf (1901-1983) fogorvos (!), amatőr matematikus *tétele*:

Minden pozitív egész szám felírható különböző Fibonacci számok összegeként. Ha a Fibonacci számok között nem lehet két egymást követő, akkor a felírás egyértelmű.

5.8.2 Fibonacci Nim játék

<https://hirmagazin.sulinet.hu/hu/pedagogia/fibonacci-nim>

A Nim egy ősi kínai matematikai stratégiai játék, melynek különböző fajtái léteznek.



Játékszabályok:

Adott egy kavics halom, amelyben ismert számú kavics van. Két játékos felváltva vehet el valahány kavicsot. A kezdő játékos tetszőleges számú kavicsot elvehet, de az összeg nem lehet nagyobb, mint a halom jelenlegi állapota. Legalább 1 kavicsot minden lépésben el kell venni. Minden további lépésben mindegyik játékos legfeljebb az előző lépésben elvett kavicsok számának a kétszeresét veheti el. A játékot az nyeri, aki az utolsó kavicsot veszi el.

A *nyerő stratégia* kialakításához használjuk a Fibonacci számrendszert. Legyen a kavicsok száma x . Ha az x nem Fibonacci szám, akkor írjuk fel Fibonacci számrendszerben! Ha mindig annyi kavicsot veszünk el, mint amennyit a legkisebb helyi értékű 1-es számjegy jelez, akkor az ellenfél nem tudja elvenni a megmaradó kavicsok számában levő legkisebb helyi értékű 1-es számjegy által jelzett számú kavicsot.



5.8.6 Fibonacci bélyegeken



6. Feladat

C. 997. Bizonyítsuk be, hogy a Fibonacci-sorozat minden negyedik tagja osztható 3-mal. (A Fibonacci-sorozatban $a_1=1$, $a_2=1$ és $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ esetén.) (5 pont)

Megoldás:

Az a sejtésünk, hogy minden olyan tag osztható 3-mal, amelynek az indexe osztható 4-gyel. Azt fogjuk teljes indukcióval bizonyítani, hogy a_{4n} osztható 3-mal, ha $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$n = 1$ -re igaz az állítás.

$n = k$ -ra feltételezzük, hogy a_{4k} osztható 3-mal.

$n = k + 1$ -re bizonyítjuk:

$$\begin{aligned} a_{4(k+1)} &= a_{4k+4} = a_{4k+3} + a_{4k+2} = a_{4k+2} + a_{4k+1} + a_{4k+1} + a_{4k} = a_{4k+2} + 2a_{4k+1} + a_{4k} = \\ &= a_{4k+1} + a_{4k} + 2a_{4k+1} + a_{4k} = 2a_{4k} + 3a_{4k+1} \end{aligned}$$

$3a_{4k+1}$ osztható 3-mal, mert egyik tényezője 3, $2a_{4k}$ pedig az indukciós feltevés miatt osztható 3-mal. Így beláttuk a feladat állítását.

Megjegyzés: Kicsit egyszerűbben fogalmazva a Fibonacci - sorozatban a 3-mal való osztási maradékok 1,1;2;0;1;1;2;0;..., a képzési szabályból adódóan periodikusan ismétlődnek, tehát minden negyedik tag osztható 3-mal.

Tartalomjegyzék:

A megunthatatlan Fibonacci - sorozat	1
1. Fibonacci sorozat és az aranymetszés	2
2. Szabályos ötszög és az aranymetszés	3
3. Ikerprímek, Brun - szám	5
4. Aranyháromszög	6
5. Algebrai megközelítés	7
5.1 Összegképlet	7
5.2 Négyzetösszeg	8
5.3 Létezik-e olyan mértani sorozat, mely eleget tesz a Fibonacci sorozat képzési szabályának?	9
5.4 Hatványsorozat	9
5.5 Összezsorozat, Lucas - faktor	10
5.6 Különbség sorozat, Binet – formula	10
5.7 Összefüggések	11
5.8 Érdekességek	11
6. Feladat	16