Bolyai János Matematikai Társulat

Matematikatanárok

63. Rátz László Vándorgyűlése

ELŐADÁSOK és SZEMINÁRIUMOK KIVONATAI

Békéscsaba, 2024. július 9 – 12.

Ábrahám Gábor: ***Egyenlőtlenségek***

A kétszintű érettségi bevezetésével a korábbi évekhez képest nagyobb hangsúlyt kapott a nevezetes közepek témaköre, ugyanakkor a speciális matematika tagozatok tananyagának mindig is fontos részét képezték. Az emelt szintű érettségi tananyagában, valamint a hazai és nemzetközi matematika versenyeken gyakran szerepelnek olyan bizonyítandó egyenlőtlenségek, szélsőérték problémák, melyek megoldásában fontos szerepet játszanak a nevezetes egyenlőtlenségek.

Az előadásomban igyekszem felvázolni azt az utat, ahogy az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskolában, illetve a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium speciális matematika tagozatán felépítjük ezt a témakört a 7-8. évfolyamban előkerülő legegyszerűbb feladatoktól kezdve a különböző megoldási módszereken keresztül az olimpiai szintű problémákig. Terveim szerint az előadás nemcsak a speciális matematika tagozaton tanító kollégáknak szól, hanem minden érdeklődő számára ad olyan információt, amit beépíthet a matematikai tehetséggondozó munkájába.

Az előadásom alapjául a Matematikai Tehetségekért Alapítvány gondozásában megjelent Egyenlőtlenségek I. és Egyenlőtlenségek II. című munkám szolgál.

Árvainé Libor Ildikó: ***Matematikai szövegértés fejlesztése alsó tagozaton***

Számos kutatás bizonyítja, hogy a matematikai feladatok megoldását befolyásolja a szövegértési képesség. A szövegértés fejlesztése nem lehet csak a magyarórák feladata. Szükséges, hogy matematikaórán is találkozzanak a tanulók olyan szövegtípusokkal, amelyek értelmezése a mindennapjainkban elengedhetetlen, hiszen a matematikaoktatás egyik legfontosabb feladata, hogy felkészítse a tanulókat az életben való eligazodásra, életszerű problémák megoldására. A tanulók számára általában nehézséget jelent a szöveges feladatok megoldása. Előadásomban különböző típusú szöveges feladatokat vizsgálok. Bemutatok egy kísérletet, melyben alsó tagozatos tanulók matematikai szövegértését vizsgáltuk.

B. Varga József: ***Érdekes feladatok több megoldással***

2022 júliusában jelent meg a „МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 27 94 ГРУПИ ВАРИЈАЦИИ НА 94 ТЕМИ” (matematicski talent 27 94 grupi varijaciji na 94 temi) című könyv Skopjében. Ez a könyv, melynek társszerzője vagyok, 94 olyan feladatot tartalmaz, amelyek mindegyikének több megoldása van (2 - 13).

A feladatok jelentős része előtte megjelent a szerbiai általános iskolás tanulóknak szánt folyóirat, a „Математички лист” (matematicski list - Matematikai Lapok) „Један задатак више решења“ (jedan zadatak vise resenya - egy feladat több megodás) rovatában.

Ezekből a feladatokból válogattam egy 90 perces foglalkozásra való halmazt (hozzáadva kettőt, amely még nem jelent meg). A feladatok a Számelmélet, Algebra, Szöveges feladatok, Egyenlőtlenségek és Geometria témakörből valók. A megoldások számának átlaga feladatonként több mint 4 (6?). A feladatokat a résztvevők oldogatják és mutatják be, természetesen a kimaradt megoldások a részvevők megoldásai után prezentálva lesznek.

Mottó: *hasznosabb egy feladatot többféle módon megoldani, mint több feladatot, mindegyiket egy módon.* (W. W. Sowyer, Preludeto mathematics)

Bérczi-Kovács Erika: ***Operációkutatás***

Mivel foglalkozik az operációkutatás, miféle operációt kutat? Hol találkozik a koordinátageometria a dietetikával? Hogyan készítsünk sudoku megoldó programot saját kezűleg? Ki volt Egon Balas? Mit kezdhetünk egy éles eszű, de kissé motiválatlan diákkal? Az utóbbira csak néhány ötletet adunk, de a többi kérdést igyekszünk megválaszolni az előadásban.

Bontovics Ignác: ***Mi lesz a matekból? Szépség vagy szörnyeteg***

Vajon hol dől el, egy tanuló életében az, hogy mivé válik a matek? Hol lehet az a pont, amikor egy egzakt tudomány elkezd szörnyeteggé válni, amitől rettegni, vagy félni kell? Úgy indul-e egyáltalán minden tanuló számára a matematikával ismerkedés, hogy ez egy szépséges tudomány? Tudunk-e tenni valamit, hogy meglássa benne a szépséget? Vagy ha már kialakult egy kép, hogy ez szörnyeteg tudomány, akkor fel lehet-e fedeztetni vele a szépséget?

Bozóki-Kecskés Boglárka, Csapodi Csaba: ***Így tanítanánk mi – egy új matematikatanítási portál és egy új közösség matematikatanárok számára***

Régi igény a matematikatanárok körében, hogy jól használható segédanyagok legyenek elérhetők az órák módszertanilag megfelelő felépítéséhez, megtartásához. A Rényi Intézet és a Bolyai Társulat támogatásával 2023 elején elindult egy olyan tevékenység, ami ezt a célt szolgálja. A projektnek az „Így tanítanánk mi” nevet adtuk, és az elmúlt félében 4 kolléga bevonásával mintegy 20 órányi, elsősorban a 9. évfolyamnak szóló óravázlatot és egyéb segédanyagot készítettünk el és helyeztünk el egy weboldalon. Reményeink szerint a vándorgyűlésen ezeket be tudjuk már mutatni. Ráadásul nem csak segédanyagokat készítünk, hanem matematikatanári közösséget is szeretnénk építeni. Egyfelől személyes találkozók, továbbképzések keretében mutatnánk majd be az elkészült anyagok javasolt felhasználási módját, másfelől a közösség tagjai maguk is véleményezhetnék, alakíthatnák az általunk készített anyagokat, valamint készíthetnének saját óravázlatokat, amit megoszthatnának a többiekkel. Az előadásunk ennek a közösségnek a zászlóbontása is egyben.

C. Neményi Eszter: ***Az út a fontos***

A tanítás – tanulás egyik végeredménye a tanítványaik életében bizonyos ismeretek, jobb esetben továbbfejleszthető ismeretrendszerek megszületése. Fontos, hogy **mi** alakul ki tudásként a gyerekek fejében az iskolai évek végéig.

Ennél azonban bizonyosan még fontosabb az, hogy **milyen úton, és miféle módokon** jutnak el a tudásig. **A tanulás útja, módja lényegesen befolyásolja a megszerzett ismeretek hitelességét, értékét, felhasználhatóságát, más ismeretekhez illeszthetőségét**. De talán még fontosabb, hogy a tanulás hibás útja rombolhat kíváncsiságot, tanulási kedvet, társakhoz, munkához, tanuláshoz való viszonyt. **A helyes utak gazdagíthatják a tanuló egész emberségét**. Nem mindegy, hogy kész ismeretekről szóló állításokat, szövegeket memorizáltatunk, vagy valódi utakat járhatnak be a tevékeny tapasztalatszerzésektől kiindulva a saját szavakkal megfogalmazott ismeretekig. És a tanító, tanár – növendékeivel való folytonos együttműködés során – főképpen a folyamat megtervezésében, előkészítésében, hibás utak újratervezésében, pontatlan megfogalmazások tapintatos korrigálásában nyújt segítséget.

Néhány példával szeretnék szólni erről a jövő nemzedék iránti közös felelősségünk alapján.

Csapodi Csaba, Koncz Levente: *Az érettségiről érdekesen*

Éppen 10 évvel ezelőtt, 2014-ben a keszthelyi Vándorgyűlésen kezdtük meg a matematika érettségi vizsgáról szóló előadássorozatunkat. Idén ismét nagy várakozás előzte meg a vizsgát, hiszen a Nat és a kerettanterv változása miatt átalakultak a vizsgakövetelmények. Szintén idén változott meg a felsőoktatásban a felvételi pontok számításának a rendszere, ami azt eredményezte, hogy a vizsgázók a korábban tapasztaltnál nagyobb arányban választották az emelt szintű vizsgát. Előadásunkban bemutatjuk az idei eredményeket mindkét szinten az önkéntes visszajelzések alapján, elemezzük a feladatsorok feladatait és részletesen beszélni fogunk a tanári közvéleményben vitákat kiváltó kérdésekről is. Természetesen nem maradnak ki idén sem a érdekes adatelemzések ínyencek számára!

Csörgő Ottilia Zita: ***Több legyet egy csapásra! – Játékos oktatás, oktatójátékok – matematikai játékok***

Figyelemfejlesztés, szociális és matematikai készségek fejlesztése, konfliktuskezelés egyaránt cél lehet. Egyszerű, akár a környezetünkben található tárgyak, eszközök segítségével készíthetünk játékokat segítve a tanulást. A véletlen lehetősége megsokszorozza a kedvet a tanuláshoz.
Mi a játék öröme? Sokszor a mozgás maga már egy játéklehetőség, az, ha bárki lehet győztes, és mindenkinek van esélye sok motivációt adhat.
Hogy találjunk ki játékot, ami még passzol is a tanulmányokhoz? Kész játékokat hogyan tudunk aktualizálni a korcsoportunkra, adott számkörre?

Dankowsky Zorka, Szücs Gábor: ***Felfedeztető feladatok koordinátageometriából és térgeometriából***

Érdekes rájönni a kör egyenletére? Ki lehet-e barkochbázni egy egyenest? Hasonló feladatok és kérdések segítségével szerettünk volna felfedeztető módon felépíteni különböző témákat. Voltak olyan feladatok, amelyek jól működtek, és olyanok is volt, amelyek nem. Ezekről a feladatokról és a tapasztalatokról szeretnénk betekintést adni a szemináriumon.

2023 tavaszán a Szent István Gimnázium 11. évfolyamán trigonometria és koordinátageometria témákban kísérleteztünk. 2024-ben kiegészült valószínűségszámítással és statisztikával is.

A szemináriumon való részvételt megkönnyíti, ha előtte a résztvevők telepítik a telefonjukra a Google Sheets appot
(https://play.google.com/store/apps/details?id=com.google.android.apps.docs.editors.sheets)

Dobos Sándor: ***Bajnokságok és salakmotoros versenyek***

Az "Új Matematikai Mozaik" c. könyv első fejezetéből ismertem meg a salakmotoros versenyeket, illetve a szervezésükből adódó érdekes matematikai problémákat. Az előadás anyagának középpontjában ez áll majd. Bemutatom, hogy egy lehetséges tanórai feldolgozás során miként lehet bevezetni, illetve továbbgondolni a témát. Külön szépsége a dolognak, hogy kombinatorikus, véges geometriai, algebrai vonatkozásai is vannak. A kiinduló alapprobléma: salakmotoros versenyt szeretnénk szervezni n versenyzőnek úgy, hogy a pályán egy futamban 4-en férnek el és a futamok végeztével mindenki mindenkivel pont egyszer motorozzon közös futamban. Ez n=4-re nyilván lehetséges, ekkor egyetlenegy futam lesz. Keressük meg a két legkisebb n számot (n>4), amire szervezhető verseny!

Erdős Gábor: *Deus ex machina*

A deus ex machina (latin: szó szerint „Isten a gépből") a történetek egy jellemző eleme, egy meglepő, nem várt esemény, amely hirtelen teljesen megold egy addig megoldhatatlannak vélt bonyodalmat. Általában isteni beavatkozás.
Átvitt értelemben: az események sorában olyan váratlan fordulat, amelyet nem az adott helyzet szereplői idéznek elő, tőlük függetlenül következik be.
Egy-egy nehezebb feladat megoldásához honnan jön az ötlet, hogyan lehet előkészíteni, hogy tényleg a gyerek jöjjön rá, és ne az az érzése legyen, hogy értem a megoldást, de magamtól soha nem jöhettem volna rá.

Fonyó Lajos: *Érdekes valószínűségszámítási feladatok a világ minden részéről*

A magyarországi matematikatanításnak egyik egyre dinamikusabban fejlődő területe a valószínűségszámítás Ma már szebbnél szebb feladatok szerepelnek a példatárakban, felvételi vizsgákon, tanulmányi versenyeken. Ez a folyamat nem csak hazánkra jellemző, hanem a matematikában jelenleg élenjáró ázsiai országokra és az Amerikai Egyesült Államokra is. Mivel a valószínűségszámítás a felsőoktatásban is fontos szerepet kap, ezért a világ legrangosabb egyetemei (Harvard, Stanford, Oxford, Cambridge) nagy hangsúly helyeznek arra, hogy olyan jól képzett középiskolások kerüljenek hozzájuk, akik a feltételek alapos figyelembevételével, a lehetőségek megfelelő csoportosításával, elemzésével és megfelelő matematikai tudással ki tudják számolni bizonyos események bekövetkezésének esélyét. Ezért az egyetemek élenjáró hallgatói olyan matematika versenyeket szerveznek középiskolásoknak, amelyeken a valószínűségszámítás domináns terület, és a feladatok igazi kihívást jelentenek a világ minden részéről érkező versenyzőknek.

Ezen a szemináriumon az érdeklődők betekintést kaphatnak abba, hogy az egyetemek által szervezett versenyeken illetve a nemzeti matematikai olimpiákon milyen típusú illetve nehézségi fokozatú feladatokat kell megoldani a középiskolás diákoknak. A foglalkozáson a az alábbi típusú feladatok szerepelnek:
- mozgás a koordináta-rendszerben,
- vándorlás poliéderen,
- esélyek matematikai játékokban,
- geometriai valószínűség számítás,
- feltételes valószínűség számítás,
- várható érték számítás,

A feldolgozásra kerülő feladatok változatos módszerekkel oldhatók meg, a matematika számos területét érintik, és nehézségi szintjük széles határok között változik. Megoldásukhoz csak középiskolai ismeretek szükségesek.

A szeminárium anyaga jól hasznosítható anyagot szolgáltat az iskolai szakköri munkához.

Győrffy Magdolna: *„Jár a keze, jár…" – A tevékenység szerepe a matematikában*

A kisgyerekek számára mindig nagy kihívás „szépen ülni, és figyelni, tenni, amit a tanító néni kér." Hogyan tehetjük a tanítványaink számára élvezetessé a matematikát anélkül, hogy szem elől tévesztenénk céljainkat?

Mindannyiunk legnagyobb öröme, ha a tanítványaink szívesen tanulnak, játszanak velünk. Segítsünk nekik abban, hogy a játékok nekünk is segítsenek. Mit játszunk, milyen tevékenységet tervezzünk, hogy a tanítás-tanulás folyamatába is illeszkedjen? A kedvelt társasjátékok között jónéhány olyan képességeket fejleszt, olyan témákat készít elő, vagy gyakoroltat, melyet a matematika tanítás során, tanítási óra kereteiben nehezen tudunk megtenni. Játszunk tudatosan, hogy kitolhassuk a tanterem falait!
Közös játékra hívunk minden érdeklődőt. Játék közben megtapasztalhatjuk, milyen módon használhatjuk fel a társasjátékokat a tanítás-tanulás folyamatában. Ötletekkel szolgálunk matematika témakörök előkészítése, feldolgozása, gyakoroltatása körében a játék módszerével.

Jánvári Zsuzsanna: ***A grafikus és szöveges manipulációkról és a reprezentativitásról***

Ezen az előadáson ráeszmélünk, hogy hány esetben terelhették már gondolatainkat adott irányba, adott cél mentén akár egy diagrammal, infografikával vagy egy ügyesen megfogalmazott mondattal. Ki-ki eldöntheti, hogy e tekintetben kellően nyitott szemmel járt-e eddig a világban.
A hazánkban elérhető segédanyagok mellett, nemzetközi példákkal is megismerkedünk a szöveges- és grafikus manipulációk, valamint a reprezentativitás témaköréhez kapcsolódóan. Mindezt tesszük azzal a céllal, hogy felébreszthessük diákjaink kíváncsiságát, valamint hozzájáruljunk kritikai gondolkodásuk fejlődéséhez.

Jobb Tünde: ***Kártyavárra nem lehet…***

A tervezett előadás témája: Hogyan készítsük fel tanítványainkat a középiskolára? Hol és hogyan tudja hasznosítani a megszerzett tudást? Az első megkeresésnél kevés időm volt a téma kidolgozására. Azóta az első ötleteket sikerült jobban összerendezni. Egy feladat több megoldásán keresztül építem fel az előadást. Ez a feladat a *"Felvételi feladatsorok a 9. évfolyamra – 2024" 1*0. feladata. Bemutatok egy megoldást az 5., egy megoldást a 6., egy megoldást 7. és egy megoldást a 8. évfolyamos tudás szintjéhez kapcsolva. Egy-egy megoldás során rámutatok, hogy a különböző témakörökben tanult (meglévő) tudást ahogyan lehet előhívni és összekapcsolni?a *"Felvételi feladatsorok a 9. évfolyamra – 2024" 1*0. feladata. Bemutatok egy megoldást az 5., egy megoldást a 6., egy megoldást 7. és egy megoldást a 8. évfolyamos tudás szintjéhez kapcsolva. Egy-egy megoldás során rámutatok, hogy a különböző témakörökben tanult (meglévő) tudást ahogyan lehet előhívni és összekapcsolni?

Juhász Litza: ***Közösségi kollázs készítés***

Készen állsz a kihívásra? Két óránk van arra, hogy megtervezzük és elkészítsük a Bolyai János Matematikai Társulat első közösségi kollázsát. A budapesti Vasarely Múzeum gyűjteményéből származó műalkotások reprodukcióinak megtekintése után mindenki dolgozhat rajta egy kicsit, amíg a kollázs nem készül el. Szereted a művészetet? Soha nem alkotsz? Olyan technikát választottunk, amelyhez mindenki hozzájárulhat, függetlenül attól, hogy mennyi tapasztalattal rendelkezik. Hol lesz kiakasztva és ki láthatja majd? Gyere el szerdán – ott minden kiderül.

Kántor Sándorné: ***Régi vagy új téma? Adalékok a magyarországi hibakutatás történetéhez***

A matematika tanításában előforduló tipikus gondolkodási hibák magyarországi kutatásának főbb állomásait vázoljuk Didaktikatörténeti kutatásunk alapját a témában megjelent, a problémamegoldás és matematikai gondolkodás témájával foglalkozó, a pszichológiai vizsgálatokhoz is kötődő tanulmányok, doktori disszertációk, cikkek képezik, kiegészítve a versenyfeladatok megoldásának elemzésével.
Részletesen elemeztük Beke Manó (1900) cikkét, Szeliánszky Ferenc (1938) és Mosonyi Kálmán (1967) disszertációt, Lénád Ferenc könyvét és kísérleteit (1966-1978), de foglalkoztunk Majoros Mária könyvével (1992), Kovács András disszertációjával (1995) , majd Újvári István, Szilák Aladárné és Olosz Ferenc tehetséggondozással kapcsolatos régi és új nézeteivel.
Záró gondolaim a jövő kihívásaira és feladataira utalnak. Ennek során bemutatjuk az RIOM 2024 évi versenyén a 12. évfolyamon kitűzött 2. feladatra adott tanulói megoldásokat.
Kulcsszavak: tipikus gondolkodási hibák a matematika tanulásában, a tanulói hibák azonosításának és javításának története, a jövő kihívásai.

Kelemen-Kiss Ilona Helén, Tamásné Kollár Magdolna: ***Középiskolai tankönyvek használata a gyakorlatban***

Hogyan segíthetik a matematika tanárok munkáját a matematika tankönyvek?
Ismerjék meg a legújabb kiadványok módszertani ötleteit, újdonságait!

Tankönyvfejlesztő munkánk során legfontosabb feladatunknak azt tartottuk, hogy olyan tankönyvet bocsássunk tanártársaink rendelkezésére, amely valóban segíti a mindennapos munkájukat, ugyanakkor a kiadvány feleljen meg a különböző érdeklődésű és képességű, felgyorsult világunkban rengeteg impulzusnak kitett diákok számára is. Szem előtt tartottuk a NAT2020 által megfogalmazott elvárásokat, a kerettantervben leírt változásokat, újdonságokat. A foglalkozás során bemutatjuk az *A* sorozatú matematika tankönyvek felépítését, a tananyag feldolgozásának lehetőségét, a tankönyvekben rejlő tantárgyi érdekességeket, módszertani ötleteket. A résztvevőkkel megosztjuk a tankönyv használata során szerzett tapasztalatainkat, és válaszolunk a jelenlévők által megfogalmazott kérdésekre.

Kosztolányi József: ***Jó kérdések, jó problémák – kisbeszéd a felfedeztetésről***

„Arról szeretnék inkább beszélni, hogy mennyire tanítóinknak köszönhetjük érdeklődésünket a tudomány iránt, magatartásunkat a tudománnyal szemben. Az én történetem Magyarországon, a középiskolában kezdődött el, ahol matematikatanárom, Rátz László, könyveket adott nekem olvasásra, és érzéket fejlesztett ki bennem tárgyának szépsége iránt.”

(Wigner Jenő, 1963)

„Nem mellékes az sem, hogy mit mond a tanár az osztályban, de ezerszer fontosabb az, hogy mit gondol a diák! Az ötleteknek a diákok fejében kell megszületniük – a tanár csak bábáskodhat.” *(Pólya György)*

Az előadás során konkrét, kipróbált példákon keresztül próbálom bemutatni, hogy mit gondolok a felfedeztető matematikatanításról.

Molnár Gyöngyvér: ***A mesterséges intelligencia hatása a mérés-értékelésre***

Minden egyes alkalommal, amikor új technológia jelenik meg, eltérő, néha szélsőséges vélemények is megfogalmazódnak az adott technológia oktatási hasznossága, vagy épp hátránya vonatkozásában, illetve felmerül az igény arra, hogy a megváltozott környezet fényében átgondoljuk az oktatás célját, felülvizsgáljuk alkalmazott módszereinket, eszközeinket, változtassunk oktatási rendszerünkön. A nagy adathalmazok gyors elemzését és a személyre szabott visszacsatolás megvalósítását támogató mesterséges intelligencia alapú értékelési technikák a hagyományos értékelési módszerek átalakításával lehetővé teszik a tanulási folyamat hatékonyságának és a tanítás minőségének fokozását. Autentikus, megbízható és valid adatok nélkül azonban az adatokon, bizonyítékokon alapú fejlesztés kudarcra van ítélve. A mesterséges intelligencia mérés-értékelésben történő alkalmazása nem csupán technológiai vagy infrastrukturális, sokkal inkább pedagógiai és módszertani kihívás.

Molnár István: ***Középpontos hatszögszámok néhány tulajdonságáról - szemléletesen is***

Az oktatás, a tanulás folyamata során a vizualizációnak fontos szerepet kell kapnia, hiszen a természetes információszerzéshez ez áll a legközelebb. A szemléletes bizonyítások bemutatása, megértetése segíthet abban is, hogy egy problémát minél több felől, minél több úton próbáljunk meg megközelíteni. Természetesen a szemléltetés sem elegendő önmagában. A vizuális levezetések, és az algebrai bizonyítások együttes alkalmazása biztosíthatja az érzéki megismerés és az elvont gondolkodás szoros kapcsolatának kiépítését a tanulásban.

Az előadás során a középpontos hatszögszámok (olyan „alakzatokat” jellemeznek, ahol a középpontban egy pont van, és azt hatszög alakú „pontrétegek” vesznek körül) több tulajdonsága kerül bemutatásra matematikai levezetések segítségével (bizonyos esetekben általánosításokat is végzünk) és ezen tulajdonságok egy része pedig szemléletes bizonyítások alapján is.

Ezen tulajdonságok közül néhány:

Ha az n-edik középpontos hatszögszámot H_n-el, az n-edik négyzetszámot Q_n-el és az n-edik háromszögszámot T_n-el jelöljük, akkor

1. $H_n = 6 \cdot T_{n-1} + 1$
2. $H_n = T_{2n-1} + Q_{n-1}$
3. $H_n + 2 \cdot T_{n-1} = Q_{2n-1}$
4. $H_1 + H_2 + H_3 + \ldots + H_n = n^3$
5. $H_{n+k} = H_n + H_k + 6nk - 1$
6. $H_{3n-1} = 9 \cdot H_n - 2$
7. $H_{n+3} = 3 \cdot H_{n+2} - 3 \cdot H_{n+1} + H_n$

Monostoriné Sándor Nelli, Grunerné Harmati Mária: ***Eszközök a matematikai képességfejlesztésben***

Hogyan kísérik végig az eszközök nagycsoporttól 4. osztályig a matematikai kompetenciák fejlesztését? Az alsó tagozatos matematikatanítás elképzelhetetlen tevékenykedtetés nélkül.

Ugyanazt a tartalmat különféle eszközök segítségével érdemes megtapasztaltatni a gyerekekkel. A tanulók ezáltal a tapasztalás által jutnak el az ismeretszerzéshez, a megértéshez és a fogalomalkotáshoz. Ugyanazokkal az eszközzel megvalósítható-e a felzárkóztatás és a tehetséggondozás?

Mosóczi András: ***Miért tanítunk matematikát, és mit mondjunk a diákoknak erről?***

A matematika a világ szinte minden országában az a tantárgy, amely a diákok egy jelentős részének nem a kedvenc tantárgya. Vannak akik félnek tőle, vanak akik nem értik, és sokan vannak, akik szerint csak felesleges időtöltés, hiszen a "mindennapi életben" sohasem fog kelleni. De mi a helyzet valójában a matematikával? Miért okoz ekkora gondot sokaknak? És tényleg, vajon mire fogják használni az iskolai matektudást "az életben"? És mit mondhat erről egy matektanár a diákoknak? Erről és a matematikai gondolkodás lényegét bemutató látványos - és a diákoknak is megmutatható - példákról, valamint az általam írt matematika-népszerűsítő könyv, a Gondolkodás forradalma pár izgalmas történetéről lesz szó.

Munkácsy Katalin: ***A megoldóképlet tanítása Varga Tamás szellemében***

Milyen megoldandó módszertani problémák merülnek föl, milyen gondolkodtató feladatok adhatók, ha magát a megoldóképlet levezetését kihagyjuk, vagy a tananyagban lényegesen hátrébb soroljuk? A Covid által sújtott, rengeteg hátránnyal küzdő gimnazistákra gondolva, az elmúlt tanév tapasztalataira építve állítottam össze anyagomat.

Nagy Szilvia: ***A középiskolai siker alapkövei matematikából***

Előadás során törekszem feleleveníteni, a kollégákkal együtt, az általános iskolai szinten elsajátított alapfogalmak "sorsát" középiskolai szinten. Konkrét esetekkel foglalkozunk a "megakadások" hátterének feltárásában. Hipotézisem szerint, az egyéni problémáknak kinevezett kerül esetekben nem mindig a diák egyéni képességének vagy készségének a sajátossága áll a hátterében. A tananyag felépítése, elsajátításának mélysége számos esetben torzíthatja a fogalomhoz tartozó fogalomképet. Az általános iskolai ismeretek ismétlése középiskola 9.-ik osztályában sokkal többre hivatott véleményem szerint, mint csak "tudja-nem tudja" eldöntése és újra tanítás szükség esetén. Tapasztalataim alapján, belső motiváció szempontjából pozitív hatást válthat ki, ha a diák tisztában van azzal, hogy a felfedezés útján hol tart jelenleg és mire készítik fel. Fontosnak tartom a fogalomtérképek készítését. A diáknak is látni kell a matematikai alapfogalmak közötti összefüggésrendszert.

Ökördi Réka: ***Mire gondolt a költő?***

Iskolás éveink során legalább egyszer felmerült – no nem bennünk, hanem egy osztálytársunkban –, hogy honnan tudjam, mire gondolt a költő. Mi hasonló kérdést fogunk feltenni, mindössze kicsit változtatunk: Mire gondolt a tanító? Ezt a kérdést vizsgáljuk meg két megközelítésben. Egyrészt az irodalomóra ál-problematikáját a matematikaóra valós problémájává tesszük: vajon vannak-e tanórai közléseinkben, magyarázatainkban olyan rejtett, ám tudottnak vélt információk, amelyek ki nem mondása a gyermek számára elakadáshoz vezethet a megértés folyamatában. Másrészt megfigyelünk, kipróbálunk, esetleg csak tudatosítunk olyan instrukciós módszereket, amelyek a lemaradók megsegítésére is alkalmasak lehetnek.

Pálfy Péter Pál: ***Mire jó az algebra?***

A klasszikus algebra az egyenletek megoldásának tana. A 19. század elején bizonyították be, hogy az ötödfokú (és a magasabb fokú) egyenletekhez nincsen olyan megoldóképlet, mint a másod-, harmad- és negyedfokú egyenletekhez. Évariste Galois zseniális felfedezése volt 1830 táján, hogy az egyenlet megoldhatósága a gyökeinek szimmetriáitól függ. Ennek nyomán alakult ki a csoportelmélet, majd az absztrakt algebra többi ága. Bizonyos fajta egyenletek tanulmányozásához alkotta meg Galois az úgynevezett véges testeket, amelyek jóval később, az 1950-es évektől kezdve a hibajavító kódok szerkesztésének alapjául szolgáltak. Egy tisztán elméleti eredmény az alkalmazott matematika fontos eszközévé vált!

Paróczay Eszter, Vépy-Benyhe Judit, Wintsche Gergely: ***A digitálistól a papírig (avagy a végtelenig és tovább)***

Digitális világban élünk? Mi nem biztos, de a gyerekek már igen. A hangsúly a digitális kiegészítőkön és a lehetőségeken lesz, hiszen mindkét sorozat felkerült, illetve éppen felkerül az NKP-re. Kiegészítésként minden olyan hagyományos dolgot is bemutatunk, amelyek menet közben kerültek a tankönyvekbe, illetve kiegészítik azokat.

Dr. Pomuczné Nagy Ildikó, Vízlendvay-Veres Krisztina: ***Interdiszciplinaritás – tevékenységalapú tanulás – kooperáció***

Dr. Pomuczné Nagy Ildikó, mint középiskolai matematika-fizika szakos tanár, felkérést kaptam a EGYH-KCP-16-P-0128 projekt keretében 2018-2021 között készült általános iskolai matematika tankönyvcsalád elkészítésében való részvételre. A projekt keretében való munkám során hasznosítottam a több évtizedes középiskolai tanári tapasztalataimat arról, hogy milyen típusú tudással érdemes felvértezni a gimnáziumba érkező tanulókat ahhoz, hogy könnyen vegyék az akadályokat a középiskolai matematika tananyag tanulásához. Továbbá, annak érdekében, hogy személyesen is megismerkedjek az általános iskolai matematika oktatásával, a tankönyvírás idején két évet tanítottam egy olyan vidéki iskolában, ahol többségében voltak a hátrányos helyzetű tanulók. Mindezen tapasztalatokra alapozva írtam meg a tankönyvcsalád elméleti leckéit és mintafeladatait, amelyben nagy hangsúlyt fektettem az élményszerűségre, és arra, hogy a tanulók maguk legyenek képesek a bevezetni kívánt matematikai fogalom megalkotására. Ennek érdekében minden egyes leckében az elméleti anyag szerves részét alkotják az érdeklődést felkeltő ’kérdések’ és ’tevékenységek’. A célzott kérdések a tanulókat arra ösztönzik, hogy beszélgessenek a tanórán egymással és pedagógusukkal élményeikről, előzetes ismereteikről, továbbá ösztönzik őket arra, hogy rádöbbenhessenek a matematika interdiszciplinaritására. A ’tevékenységek’ pedig arra ösztönzik a tanulókat, hogy egymással párban vagy csoportokban olyan tapasztalatokat szerezzenek, amelyek elősegítik az előzetes fogalomalkotást és az összefüggések felismerését. Mind a kérdések, mind a tevékenységek kutatásra és matematikai szoftverek alkalmazására is ösztönzik és egyben tanítják is a tanulókat. Vízlendvay-Veres Krisztina matematika-történelem szakos általános iskolai tanár és pszichológus, a tankönyvcsaládot tesztelő matematika tanárok egyike. Gimnazistaként tanítványom volt, majd már, mint gyakorló matematika tanárt, a Geomatech uniós program keretében a GeoGebra alkalmazására tanítottam.

Előadásunkban a kooperatív tanulás-tanítás szemszögéből nézve mutatunk be konkrét példákat, mint mester és tanítványa, Dr. Pomuczné Nagy Ildikó, mint szerző, Vízlendvay-Veres Krisztina pedig, mint a saját tanóráin gyakorlati megvalósító.

Süveges-Szabó Marianna Éva: ***Geometria játékosan?***

Sok év matematikatanítás után azt látom és tapasztalom, hogy a gyerekek térlátása egyre rosszabb. A geometria alapfogalmainak, mint például a terület, térfogat, elsajátítása nagyon sok tanuló számára nehézségbe ütközik. Az ábrákat, alakzatokat nézik, nézik, de nem látják. A digitalizáció segíthetné ennek a kompetenciának a fejlesztését, de ez valamiért mégsem történik meg. Így érdemes visszanyúlni az órai szemléltetésekhez, rajzokhoz, különböző társasjátékokhoz.
A szeminárium szeretném bemutatni az általam alkalmazott szemléltető eszközöket, játékokat. A kollégák forgószínpad szerűen, csoportokban kipróbálhatják azokat a játékokat, feladatokat, amelyeket szakkörökön, táborokon és a tanítási órákon alkalmazok és amelyek a tanítványaim kedvencei.

Székeli Andrea: ***A gyufabanktól a Gidakupáig***

Sokéves tanítói munkám egyszerű, a matematika órákon használt eszközeinek a bemutatása, amelyeket a számfogalom alakításakor, a számolás készség fejlesztésénél, a szorzótábla tanításakor használok napi rendszerességgel az alsó tagozat évfolyamain a gyengébb számoláskészségű gyerekek jobb iskolai teljesítménye érdekében.
A felső tagozatos tanulók körében országosan ismert és kedvelt csapatverseny, a Kecskekupa ötletéből született a Gidakupa, amellyel egy-egy matematika órát lehet színessé, mozgalmassá, élménytelivé tenni.

Sztankovics Zsuzsanna: ***A természettudományos ismeretszerzés támogatása a 2. osztályos matematika órákon***

A 2020-as NAT bevezetésével megszűnt a környezetismeret tantárgy az 1-2. évfolyamon, a természettudományos ismeretszerzési módszerek alapozását más tantárgyakba integráltan kell elkezdeni ezeken az évfolyamokon.
Az előadásomban egy rendhagyó csoportos tanítási gyakorlat kurzust mutatok be, amely 2. osztályos tanulócsoportban zajlott. Ezen a kurzuson természetismeret és matematika műveltségterületes hallgatók kerültek egy csoportba és a kurzus célja az volt, hogy kapcsolódási pontokat keressünk a matematika és a természettudományok között. Ilyen kapcsolódási pont a mérések témaköre, így a kurzus óráit a mérések köré terveztük. A kurzus tapasztalatai az MTA – ELTE Környezetismeret tanítása Kutatócsoport munkájához is hozzájárultak. Számos kihívással kellett megküzdeni a megvalósítás során, de a legfontosabb tapasztalat az volt, hogy a gyerekek nagyon jól fogadták a sok kiscsoportos tevékenységgel járó órákat, a hallgatók pedig képesek voltak arra, hogy a korábban megszokottól eltérő szemlélettel tervezzék meg az órák menetét.

Varga Dániel: ***Az Erdős-Moser sejtés***

A sík legfeljebb mekkora hányada színezhető ki úgy, hogy két kiszínezett pont nem lehet pontosan egység távolságra egymástól? Ezt a geometriai kérdést Leo Moser fogalmazta meg az 1960-as évek elején, Hadwiger és Nelson egy rokon problémájával kapcsolatban. Erdős Pál sejtése szerint ez a hányad nem érheti el az 1/4-et. A sejtés bizonyításához számos szakterület művelőinek együttműködésére volt szükség: a bizonyítás a geometria, Fourier analízis, lineáris programozás, gráfelmélet és számítógéptudomány módszereiből merített, és nagy léptékű számítógépes keresést alkalmazott. Előadásunkban bemutatjuk a főbb gondolatait.

Velkey Kristóf: ***Eredményesség a központi mérések tapasztalatai alapján***

Az országos kompetenciamérés, a nemzetközi nagymintás mérések és a központi felvételik adatbázisainak a segítségével az előadásomban a tanulói eredményesség kérdéskörét járom körül, azt vizsgálva, mit árulnak el a mérések a magyar tanulók matematika tudásáról. Az eredmények bemutatásán és értelmezésén túl röviden áttekintem, milyen változások történtek az OKM digitalizációjával és hogyan alakul át az eredmény-visszajelzés rendszere.

Exponenciális diofantikus egyenletek és exponenciális kongruenciák

Hajdu Lajos
Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet

Kiindulópontunk a 2021 évi Ausztrál Matematikai Olimpia egy feladata: oldjuk meg a

$$2^x - 3^y = 7$$

exponenciális Diofantikus egyenletet, ahol az x, y kitevők nemnegatív egész ismeretlenek! A feladat (és a megoldás) azt a fontos üzenetet hozza, hogy exponenciális Diofantikus egyenletek exponenciális kongruenciák segítségével is kezelhetőek lehetnek.

A következőkben röviden felvázoljuk az exponenciális egyenletek elméletét, és megfogalmazzuk a Skolem-sejtést - amely éppen a fent megfigyelt kapcsolatot önti precíz formába. Ezek után az exponenciális kongruenciákra fókuszálunk. Elsőként az Euler-Fermat tételt górcső alá véve megállapítjuk, hogy bizony ez az állítás nagy mértékben pontosítható. Így természetes módon eljutunk a Carmichael-féle λ-függvényhez, amely bizonyos tulajdonságai (felhasználva Erdős, Pomerance és Schmutz egy mély tételét) megnyitják az utat az exponenciális egyenletek exponenciális kongruenciákkal való vizsgálatához. Kiderül, hogy az eljárás a gyakorlatban is jól használható. A módszer illusztrálására több (köztük egy-két ,,nagy") példát is bemutatunk.

Kis kitérőként megmutatjuk, hogy az elv hogyan használható kapcsolódó problémák vizsgálatára, például rekurzív sorozatokra vonatkozó bizonyos kérdésekben, hatványösszegek hatványértékeire vonatkozóan, vagy speciális, pl. $2^x + 3^y$ alakú prímekkel kapcsolatban.

Előadásunkat néhány, a Skolem-sejtést alátámasztó új tétel bemutatásával zárjuk.

Sorozatok összegképlete

Cél: általános eljárás keresése (együtt gondolkodás) (ismertetés) olyan sorozatok első *n* tagjának összegképletére, amely sorozatok általános tagja megadható polinom vagy szorzat, vagy vegyes formában.

Néhány példa ilyen sorozatokra: $a_n = n^2 - 3n + 5$ sorozat esetében $\sum_{k=1}^{n} a_k = ?$

$b_n = n(n+2)(n-5)$ sorozat esetében $\sum_{k=1}^{n} b_k = ?$

$c_n = n^3 + 3n(n-2)$ sorozat esetén $\sum_{k=1}^{n} c_k = ?$

I. módszer: **tagokra bontás** és az **oszloponkénti** összeadás módszere

A fenti módszer alkalmazása az $a_n = n(n+1)$ sorozat esetében a következő módon történik:

$$
\begin{array}{ll}
 & \quad o_1 \quad o_2 \quad o_3 \\
a_1 = 1\cdot 2 = & \boxed{1+1} \\
a_2 = 2\cdot 3 = & 2+2+2 \\
a_3 = 3\cdot 4 = & 3+3+3+3 \\
a_4 = 4\cdot 5 = & 4+4+4+4+4 \\
\vdots & \\
a_n = n\cdot(n+1) = & n+n+n+n+n+n+\ldots+n
\end{array}
$$

Most az oszlopokat összeadva, kapjuk, hogy:

$$o_1 = 2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$o_2 = \frac{n\cdot(n+1)}{2} - 1 = \frac{n\cdot(n+1)}{2} - \frac{1\cdot 2}{2}$$

$$o_3 = \frac{n\cdot(n+1)}{2} - 1 - 2 = \frac{n\cdot(n+1)}{2} - \frac{2\cdot 3}{2}$$

$$o_4 = \frac{n\cdot(n+1)}{2} - 1 - 2 - 3 = \frac{n\cdot(n+1)}{2} - \frac{3\cdot 4}{2}$$

$$\vdots$$

$$o_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2} - 1 - 2 - 3 - \cdots - (n-1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} - \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

A pirossal jelölt tagokat az $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ képlet alapján kapjuk, vagy a teljes indukcióval is bizonyítható.

Bevezetve a $\sum_{n=1}^{n} n(n+1) = \mathrm{S}$ jelölést és az oszloponkénti eredményeket összeadva kapjuk, hogy: $\mathrm{S} = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n-1) \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1)n}{2}$.

A fenti egyenletet beszorozva 2-vel kapjuk, hogy:
$2 \cdot \mathrm{S} = 2 \cdot n(n+1) + (n-1) \cdot n(n+1) - [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1)n]$.

A szögletes zárójelben lévő tagok összege írható: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1)n = \mathrm{S} - n(n+1)$ alakba, így a $2 \cdot \mathrm{S} = 2 \cdot n(n+1) + (n-1) \cdot n(n+1) - [\mathrm{S} - n(n+1)]$ egyenletet kapjuk.

A fenti egyenletből az $\mathrm{S} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ következik.

Speciális sorozatok összegképlete:

A fenti módszert (eljárás) alkalmazva az alábbi sorozatok esetében az összeg:

$a_n = n(n+1)(n+2)$ sorozat esetében $\mathrm{S} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

$a_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$ sorozat esetében $\mathrm{S} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$

Az előző példák alapján az **általánosítás** lehetőségének észrevétele:

$a_n = n(n+1)(n+2)(n+3) \cdot \ldots \cdot (n+k)$ sorozat esetében az összeg:

$\mathrm{S} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) \cdot \ldots \cdot (n+k+1)}{k+1}$

Újabb sorozatok összegképletének meghatározása az előző pontban elért eredmények ismeretében

$a_n = n^2$ esetében $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$a_n = n^3$ esetében $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$a_n = n^4$ esetében $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Az előző példák alapján **általánosítás** (rekurzív formula) lehetősége az $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ összegre

Tetszőleges (polinom alakú) **sorozatok** összegképletének meghatározása (a fenti sorozatok összegképletének ismerete esetén kiszámolható), hiszen ezen sorozatok $a_n = a_1 n^1 + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \ldots + a_k n^k$ alakba írhatóak.

II. módszer: **binomiális tétel** felhasználásával

Ezzel a módszerrel az $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ összegeket lehet meghatározni úgy, hogy rekurzív formulát lehet levezetni segítségével.

Jelölje az $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ összeget S^k

Nézzük például a $k=5$ esetet:

$$
\begin{aligned}
0^5 = (1-1)^5 &= \binom{5}{0}\cdot 1^5-\binom{5}{1}\cdot 1^4+\binom{5}{2}\cdot 1^3-\binom{5}{3}\cdot 1^2+\binom{5}{4}\cdot 1^1-\binom{5}{5}\cdot 1^0\\
1^5 = (2-1)^5 &= \binom{5}{0}\cdot 2^5-\binom{5}{1}\cdot 2^4+\binom{5}{2}\cdot 2^3-\binom{5}{3}\cdot 2^2+\binom{5}{4}\cdot 2^1-\binom{5}{5}\cdot 2^0\\
2^5 = (3-1)^5 &= \binom{5}{0}\cdot 3^5-\binom{5}{1}\cdot 3^4+\binom{5}{2}\cdot 3^3-\binom{5}{3}\cdot 3^2+\binom{5}{4}\cdot 3^1-\binom{5}{5}\cdot 3^0\\
&\vdots\\
(n-1)^5 = (n-1)^5 &= \binom{5}{0}\cdot n^5-\binom{5}{1}\cdot n^4+\binom{5}{2}\cdot n^3-\binom{5}{3}\cdot n^2+\binom{5}{4}\cdot n^1-\binom{5}{5}\cdot n^0
\end{aligned}
$$

Oszloponként összeadva és a kapott egyenletet átrendezve kapjuk. hogy:

$$\binom{5}{1}\cdot \mathrm{S}^4=\binom{5}{0}\cdot n^5+\binom{5}{2}\cdot \mathrm{S}^3-\binom{5}{3}\cdot \mathrm{S}^2+\binom{5}{4}\cdot \mathrm{S}^1-\binom{5}{5}\cdot \mathrm{S}^0$$

$$\mathrm{S}^4=\frac{n^5+10\cdot \mathrm{S}^3-10\cdot \mathrm{S}^2+5\cdot \mathrm{S}^1-\mathrm{S}^0}{5}$$

A fentiek alapján elvégezhető az általános rekurzív formula is:

$$(k+1)\cdot \mathrm{S}^k=n^{k+1}+\binom{k+1}{2}\cdot \mathrm{S}^{k-1}-\binom{k+1}{3}\cdot \mathrm{S}^{k-2}+\ldots+(-1)^{k+1}\binom{k+1}{k+1}\cdot \mathrm{S}^0$$