Rátz László Vándorgyűlés, Békéscsaba, 2024.
30 órás tanári továbbképzés, beadandó dolgozat, speciális matematika szekció
Szakköri feladatsor Egyenlőtlenségek témakörből, 9-12.o.

Szerző: Schultz János
munkahely: Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium
email: sulcjanos@yahoo.com

Az idei Vándorgyűlés előadásai közül Ábrahám Gábor: Egyenlőtlenségek címmel tartott előadásához kapcsolódva készítettem el ezt a szakköri anyagot. A feladatok megoldásai az előadáson is említett megoldásai módszerekhez kapcsolódnak. A problémák versenyfeladat szintűek, megoldásukhoz a 9-10.o. matematika tagozatos algebra tananyagra van szükség.

1.

Bizonyítsuk be, hogy $a,b,c>0$ esetén valós számokra

$$\frac{c+a}{2}x^2+\frac{a+b}{2}y^2+\frac{b+c}{2}z^2\geq axy+byz+czx.$$

2.

Az a,b,c pozitív számok összege 3. Bizonyítsuk be, hogy

$$2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4\leq 3.$$

3.

Bizonyítsuk be, hogy ha $x,y,z>0,$ akkor

$$x^4+y^4+z^4\geq 4xyz-1.$$

4.

Az a,b,c,d pozitív valós számok összege 1. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a^4}{\left(a^2+b^2\right)\left(a+b\right)}+\frac{b^4}{\left(b^2+c^2\right)\left(b+c\right)}+\frac{c^4}{\left(c^2+d^2\right)\left(c+d\right)}+\frac{d^4}{\left(d^2+a^2\right)\left(d+a\right)}\geq\frac{1}{4}.$$

5.

Bizonyítsuk be, hogyha $x,y,z>0,$ akkor

$$\frac{1}{x^9\left(y^3+z^3\right)}+\frac{1}{y^9\left(z^3+x^3\right)}+\frac{1}{z^9\left(x^3+y^3\right)}\geq\frac{3}{2x^4y^4z^4}.$$

6.

a) Az *a*, *b*, *c* pozitív számokra igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{c+2a+2b}+\frac{b}{a+2b+2c}+\frac{c}{b+2c+2a}\leq\frac{3}{5}.$$

b) Az *a*, *b*, *c* pozitív számokra $a+b+c=3.$ Igazoljuk, hogy

$$\frac{ab}{9-4bc}+\frac{bc}{9-4ca}+\frac{ca}{9-4ab}\leq\frac{3}{5}.$$

7.

Igazoljuk, hogy $a,b,c>0$ esetén

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\leq\sqrt[3]{\frac{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}{8}}.$$

8.

Igazoljuk, hogy $a,b,c>0$ valós számokra

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c} \geq \frac{8}{3}\sqrt[3]{(abc)^2}.$$

/OKTV, 2021/

9.

Az a, b, c nem negatív valós számok, melyekre teljesül, hogy $a+b+c=1.$ Igazoljuk, hogy

$$5\left(a^2+b^2+c^2\right) \leq 6\left(a^3+b^3+c^3\right)+1.$$

10.

Az x, y, z pozitív számokra teljesül, hogy $xyz=1.$ Igazoljuk, hogy

$$x^2+y^2+z^2+x+y+z \geq 2(xy+yz+zx).$$

11.

Bizonyítsuk be, hogyha $a, b, c>0$ és $a+b+c=3,$ akkor

$$abc+\frac{12}{ab+bc+ca} \geq 5.$$

A feladatok megoldásai

1.

Kettővel való szorzás és rendezés után:

$$(c+a)x^2+(a+b)y^2+(b+c)z^2-2axy-2byz-2czx \geq 0,$$
$$a(x-y)^2+b(y-z)^2+c(z-x)^2 \geq 0,$$

ami nyilván igaz. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x=y=z.$

2.

A bal oldalon szereplő kifejezés az ún. héroni azonosság alapján szorzattá bontható a következőképpen:

$$2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

A továbbiakban elegendő megmutatnunk, hogy

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leq 1.$$

A bal oldalon a zárójelekben álló kifejezések összege $a+b+c=3$, így mindhárom kifejezés értéke nem lehet negatív. Ha a három tényező közül bármelyik értéke 0, vagy pontosan egy tényező negatív, akkor készen vagyunk. Pontosan két negatív értékű tényező nem lehetséges, mert pl. $a+b-c<0$ és $-a+b+c<0$ esetén összeadás után $b<0$ adódna. Végül, ha mindhárom tényező pozitív, akkor alkalmazzuk a mértani és számtani közepek közötti egyenlőtlenség három változóra vonatkozó alakját:

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)\le\left(\frac{a+b-c+a-b+c-a+b+c}{3}\right)^3=\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=1.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha mindhárom betű értéke 1.

3.

1. megoldás:

Azonos átalakításokat végezve:

$$x^4+y^4+z^4-4xyz+1=\left(x^4-2x^2+1\right)+\left(y^4-2y^2z^2+z^4\right)+\left(2y^2z^2-4xyz+2x^2\right)=$$

$$=\left(x^2-1\right)^2+\left(y^2-z^2\right)^2+2(yz-x)^2\ge 0.$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $x=y=z=1$.

2. megoldás:

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség miatt

$$x^4+y^4+z^4\ge 3\sqrt[3]{x^4y^4z^4}.$$

Legyen $\sqrt[3]{xyz}=a,$ ekkor elegendő megmutatni, hogy

$$3a^4\ge 4a^3-1,$$

$$3a^4-4a^3+1\ge 0.$$

Szorzattá alakításokat végezve:

$$(a-1)\left(3a^3-a^2-a-1\right)\ge 0,$$

$$(a-1)^2\left(3a^2+2a+1\right)\ge 0,$$

ami triviálisan igaz.

4.

Jelöljük a bal oldalon álló kifejezést A-val, továbbá legyen

$$B=\frac{b^4}{\left(a^2+b^2\right)(a+b)}+\frac{c^4}{\left(b^2+c^2\right)(b+c)}+\frac{d^4}{\left(c^2+d^2\right)(c+d)}+\frac{a^4}{\left(d^2+a^2\right)(d+a)}.$$

Mivel pl.

$$\frac{a^4}{\left(a^2+b^2\right)(a+b)}-\frac{b^4}{\left(a^2+b^2\right)(a+b)}=\frac{(a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)}{(a+b)\left(a^2+b^2\right)}=a-b,$$

ezért

$$A - B = a - b + b - c + c - d + d - a = 0,$$

tehát $A = B.$ Másrészt pl.

$$(*) \qquad \frac{a^4+b^4}{\left(a^2+b^2\right)(a+b)} \geq \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{2\left(a^2+b^2\right)(a+b)} = \frac{a^2+b^2}{2(a+b)} \geq \frac{(a+b)^2}{4(a+b)} = \frac{a+b}{4},$$

közben kétszer is felhasználva, hogy

$$x^2+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0.$$

A $(*)$ becslés miatt akkor

$$A = \frac{1}{2}(A+B) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(2a+2b+2c+2d) = \frac{1}{4}.$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $a = b = c = d = \frac{1}{4}.$

Megjegyzés:

Hasonló módon oldható meg a következő feladat: az a, b, c pozitív valós számok összege 1. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{1}{3}.$$

5.

Ekvivalens átalakításokat végezve:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x^9\left(y^3+z^3\right)} \geq \frac{3}{2x^4y^4z^4} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{y^4z^4}{x^5\left(y^3+z^3\right)} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{\frac{1}{x^5}}{\frac{1}{yz^4}+\frac{1}{y^4z}} \geq \frac{3}{2}.$$

Ha $u, v > 0,$ akkor $u^4v + uv^4 \leq u^5 + v^5,$ hiszen átrendezés után $0 \leq (u-v)\left(u^4-v^4\right),$ ahol a jobb oldalon azonos előjelű tényezők állnak. Elegendő ezért belátnunk, hogy

$$\sum_{cyc} \frac{\frac{1}{x^5}}{\frac{1}{y^5}+\frac{1}{z^5}} \geq \frac{3}{2},$$

ami a jól ismert Nesbitt-egyenlőtlenség miatt igaz.

Megjegyzés:

A Nesbitt-egyenlőtlenség szerint, ha az a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Egy rövid bizonyítás a Titu-lemma alkalmazásával:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{3}{2},$$

felhasználva, hogy $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.

6.

a) Tekintettel arra, hogy felső becslésre van szükség, ami törtösszegeknél sokszor nem könnyű, így azzal a szokásos trükkel élünk, hogy átfordítjuk a becslés irányát. Ehhez vegyük figyelembe, hogy pl.

$$\frac{b}{a+2b+2c}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a+2c}{a+2b+2c}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a+2c}{a+2b+2c},$$

ezért a bizonyítandó egyenlőtlenséggel ekvivalens

$$\sum_{cyc}\frac{a+2c}{a+2b+2c}\geq\frac{9}{5}.$$

Alkalmazzuk a Titu lemmát:

$$\sum_{cyc}\frac{a+2c}{a+2b+2c}=\sum_{cyc}\frac{(a+2c)^2}{(a+2c)(a+2b+2c)}\geq\frac{(a+2c+b+2a+c+2b)^2}{\sum_{cyc}(a+2c)(a+2b+2c)}=\frac{9(a+b+c)^2}{5(a+b+c)^2}=\frac{9}{5}.$$

Egyenlőség csakis akkor teljesül, ha a változók értéke megegyezik.

b) Mivel tetszőleges x, y valós számokra

$$0\leq(x-y)^2\Leftrightarrow 4xy\leq(x+y)^2,$$

ezért

$$\sum_{cyc}\frac{ab}{9-4bc}\leq\sum_{cyc}\frac{ab}{9-(b+c)^2}=\sum_{cyc}\frac{ab}{9-(3-a)^2}=\sum_{cyc}\frac{b}{6-a}=\sum_{cyc}\frac{b}{a+2b+2c}.$$

Figyelembe véve az a) állítást készen is vagyunk. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a=b=c=1$.

7.

Az egyenlőtlenségben lévő kifejezések homogén szerkezetűek (azaz $a=\lambda a', b=\lambda b', c=\lambda c'$ helyettesítésre visszakapjuk a becslés eredeti alakját), ezért feltehető, hogy $ab+bc+ca=3$.

Ekkor elegendő megmutatni, hogy

$$8 \le (a+b)(b+c)(c+a),$$
$$8 \le (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc,$$
$$(*) \quad 8 \le 3(a+b+c)-abc.$$

Közismert, hogy $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca,$ így

$$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)=9,$$
$$a+b+c \ge 3.$$

A számtani és mértani közepek közötti becslést alkalmazva

$$(ab)(bc)(ca)=(abc)^2 \le \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^3=1,$$

ezért $abc \le 1.$ Mindezekből a $(*)$ egyenlőtlenség adódik. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a=b=c.$

8.

Legyen $p=a+b+c,\ q=ab+bc+ca,\ r=abc.$ Ekkor

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(p-a)(p-b)(p-c)=p^3+pq-p^3-r=pq-r.$$

A bizonyítandó állítás:

$$\frac{pq-r}{p} \ge \frac{8}{3}r^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow pq \ge r^{\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{3}p+r^{\frac{1}{3}}\right).$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján $q \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3r^{\frac{2}{3}},$ így elegendő megmutatni, hogy

$$3p \ge \frac{8}{3}p+r^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{p}{3} \ge r^{\frac{1}{3}}.$$

Ismét a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségre hivatkozva adódik, hogy ez igaz, így ezzel az eredeti egyenlőtlenséget is igazoltuk. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c.$

Megjegyzés:

A megoldásban látott megoldási módszer neve: *p-q-r* technika.

Ezt $f(a,b,c) \ge 0$ alakra hozható algebrai egyenlőtlenségeknél alkalmazhatjuk, melyekben olyan 3-változós $f(a,b,c)$ algebrai kifejezés szerepel, amely szimmetrikus. Az esetek nagy részében $f(a,b,c)$ szimmetrikus polinom, vagy pedig ekvivalens lépésekkel ilyen alakra hozható. A szimmetrikus polinomok alaptétele szerint a háromváltozós szimmetrikus polinomok felírhatók a $p = a + b + c,\ q = ab + bc + ca,\ r = abc$ háromváltozós, ún. elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként. Ezek az elemi szimmetrikus polinomok megkaphatók az egyváltozós, harmadfokú polinomokra vonatkozó Viéte-formulákból. Ha a, b, c jelöli a gyököket, akkor az ún. gyöktényezős alakból

$$(*)\quad (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = x^3 - px^2 + qx - r.$$

Az együtthatók összevetésével kapjuk a fenti kifejezéseket. Konkrét esetekben az elemi szimmetrikus polinomokkal való felírások egyáltalán nem egyszerűek, sokszor rekurzív módon készíthetők csak el. Néhány példa az említett előállításokra:

$$f(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = p^2 - 2q,$$

$$f(a,b,c) = (a+b)(b+c)(c+a) = pq - r,$$

$$f(a,b,c) = (a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b) = p^2 - 3q,$$

$$f(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = p(p^2 - 3q) = p^3 - 3pq,$$

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - (a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b) + 3abc = p^3 - 4pq + 9r. \end{aligned}$$

Az ún. *p-q-r* módszernek a becsléseknél való használata közben (feltéve, hogy $a,b,c \ge 0$) gyakran alkalmazzuk a közismert $p^2 \ge 3q$ egyenlőtlenséget, valamint a háromváltozós számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségből:

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$$

egyszerűen kapható $p^3 \ge 27r$ egyenlőtlenséget. Sokszor felhasználható még az ún. Schur-egyenlőtlenség, amely szerint, ha x, y, z nem negatív számok és t pozitív szám, akkor

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-z)(y-x) + z^t(x-z)(y-z) \ge 0.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül benne, ha $x = y = z$, vagy pedig két változó értéke egyenlő, a harmadik értéke pedig 0.

Fontos speciális esetei:

$t = 1$: $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(c-a) + c(c-a)(c-b) = p^3 - 4pq + 9r \ge 0,$

$$t=2:\ a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)=$$
$$=a^4+b^4+c^4-a^3(b+c)-b^3(c+a)-c^3(a+b)+abc(a+b+c)=$$
$$=a^4+b^4+c^4-a^3(p-a)-b^3(p-b)-c^3(p-c)+pr=$$
$$=2\left(a^4+b^4+c^4\right)-p\left(a^3+b^3+c^3\right)+pr=$$
$$=2\left(p^4-4p^2q+2q^2+4pr\right)-p\left(p^3-3pq+3r\right)+pr=p^4-5p^2q+4q^2+6pr\geq 0.$$

9.

Legyen $p=a+b+c=1,\ q=ab+bc+ca,\ r=abc.$ Ismert azonosságok alapján

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=p^2-2q,$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=p\left(p^2-3q\right)=p^3-3pq,$$

így a bizonyítandó állítás:

$$5(1-2q)\leq 6(1-3q+3r)+1$$
$$8q\leq 18r+2,$$
$$4q-1\leq 9r.$$

Mivel a Schur-egyenlőtlenség szerint

$$p^3-4pq+9r\geq 0 \Leftrightarrow 9r\geq 4q-1,$$

ezért készen vagyunk. Egyenlőség ennek megfelelően pontosan akkor teljesül, ha $a=b=c=\frac{1}{3},$ vagy pedig két változó értéke $\frac{1}{2},$ a harmadiké pedig 0.

10.

Legyen $p=x+y+z,\ q=xy+yz+zx,\ r=xyz=1.$ A bizonyítandó állítás ekvivalens a következővel:

$$p^2-2q+p\geq 2q,$$
$$\frac{p^2+p}{4}\geq q.$$

A Schur-egyenlőtlenség szerint: ha *x*, *y*, *z* nem negatív számok, akkor $p^3-4pq+9r.$

Átrendezve, $r=1$ miatt:

$$\frac{p^3+9}{4p}\geq q.$$

Elegendő igazolnunk, hogy

$$\frac{p^2+p}{4} \geq \frac{p^3+9}{4p} \Leftrightarrow p^2 \geq 9.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával

$$\frac{p}{3} = \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} = 1,$$

amiből állításunk következik. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = y = z = 1$.

11.

Legyen $p = a+b+c = 3,\ q = ab+bc+ca,\ r = abc.$ A bizonyítandó állítás:

$$r + \frac{12}{q} \geq 5 \Leftrightarrow rq + 12 \geq 5q.$$

A Schur-egyenlőtlenség szerint

$$p^3 - 4pq + 9r \geq 0 \Rightarrow 3r \geq 4q - 9.$$

Elegendő igazolnunk, hogy

$$\begin{aligned} q(4q-9)+36-15q &\geq 0, \\ 4q^2-24q+36 &\geq 0, \\ 4(q-3)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

ami nyilvánvalóan teljesül. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b = c = 1$.