DOBBLE a középiskolai matematika órán

Rátz László Vándorgyűlés 2019

A dolgozat a 2019. évi Rátz László Vándorgyűlés következő szemináriuma alapján készült:

Oravecz Márta: „Játszani is engedd” – Játékok, eszközök és módszerek az alsó tagozatos matematika oktatásában; Cséplő Alíz, Horváth Villő Viola, Rapavi Rebeka: Gondolkodásfejlesztés a 0. évfolyamon

készítette: Tamás Balázsné, a Pannonhalmi Bencés Gimnázium tanára

2019.07.13.

Bevezető

Véletlenül keveredtem oda erre az előadásra. Nem fértem be egy másik terembe, és akkor a barátnőmet megszólította az egyik szervező, hogy jöjjünk erre, jó lesz ez. Középiskolás tanárként mit hoztam magammal az alsó tagozatos tanítóknak készülő egyetemisták „Játszani is engedd” című szemináriumából?

Egyikük, Rapavi Rebeka előadása arról szólt, hogyan használhatjuk változatos módon a Dobble nevű játékot iskolai keretek között.

1. A Dobble

A Dobble nevű játékban 55 kártya van, Minden kártyán 8 különböző rajz vagy ábra. Bárhogy választunk ki a kártyák közül kettőt, pontosan egy közös rajz lesz a kártyákon. A játék lényege, hogy fedezzük fel minél gyorsabban, melyik a közös ábra. Felcsapunk párban egy-egy kártyát. Melyik a közös rajz? Aki hamarabb kimondja a nevét, az teheti el a párt. Az is lehet, hogy többen játszunk egyszerre. Ilyenkor mindenkinek egy lapja van, kezdetben lefordítva, a többit középre tesszük egy pakliba. Egyszerre felfordítjuk a saját lapunkat, és aki hamarabb kimondja annak a figurának a nevét, amely közös a saját lapja és a középső között, az elveheti a középső lapot, és most már az lesz az, amellyel egyezőt fog keresni, s közben középen is egy új lap bukkant elő.

A játék annyira népszerű lett, hogy nagyon sokféle változatban piacra dobták. Kapható Star Wars figurákkal, állatos rajzokkal, formákkal, strandoláshoz kapcsolódó rajzokkal, vagy kisgyermekeknek készült olyan is, amelyen kevesebb ábra van a lapokon.

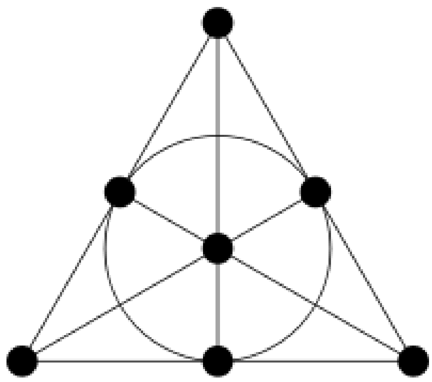
A szemináriumon azt is bemutatták, hogy létezik olyan számítógépes oldal, amelynek segítségével elkészíthető egy személyre szabott Dobble készlet is. Mi adhatunk meg a gépnek kellő számú figurát, és elkészíti belőle a pdf fájlokat, csak ki kell nyomtatni, kivágni, és kezdődhet a játék. Ezt a lehetőéget használta fel az előadást tartó Rebeka is. Mert mit is fejleszt egy ilyen játék? A figyelmet, a memóriát, és persze az asszociációt, a nyelvi kompetenciát: ki kell mondani a megfelelő szót. Ezt használják fel, amikor nyelvtanuláshoz alkalmazzák, de ezt használják fel alsó tagozatban, amikor matematikai fogalmakat szeretnének megtanítani. Mert kipróbálhattuk azt a Dobble játékot, amelyen geometriai alakzatok szerepeltek. Ami pedig még jobban kitágította számunkra az alkalmazás lehetőségeit, amikor azt a készletet mutatta meg, amellyel a szorzótábla tanulását lehet segíteni. A kártyák egy részén szorzatok vannak, pl $5 \cdot 3$, más kártyán viszont az szerepel, hogy 15, és ezt kell párba állítani a kisiskolásoknak. Ekkor néhányan a teremben, akik középiskolában tanítunk, egymásra néztünk, és azt mondtuk: - „Ezt el lehetne készíteni hatványozással és logaritmussal is!”

2. A játék matematikai háttere

55 kártya, 8 rajz / kártya. Miért éppen ennyi? Hányféle különböző figura van? El lehet készíteni más számokkal is?

A játék matematikai hátterét a véges projektív síkok témaköre jelenti. A véges projektív síkokhoz pontok, egyenesek, és közöttük létrejövő relációk, illeszkedések tartoznak.

- Bármely két különböző ponthoz pontosan egy olyan egyenes van, amelyre mindketten illeszkednek.
- Bármely két különböző egyeneshez pontosan egy olyan pont van, amely illeszkedik mindkettőjükre.
- Minden egyenesen legalább 3 pont van.
- Minden pont legalább 3 egyenesre illeszkedik.



Véges projektív síkot alkot az ábra szerinti alakzat (Fano-sík), ha benne a háromszög oldalait, súlyvonalait, illetve a beírt körét tekintjük egy-egy „projektív egyenesnek”. Ezen a síkon 7 pont és 7 egyenes található, minden egyenesre 3 pont illeszkedik, minden pont 3 egyenesre illeszkedik.

Szembetűnő a véges projektív sík duális szerkezete: a pontok és egyenesek szerepe felcserélhető.

Belátható, hogy ha egy projektív síknak van olyan egyenese, amelyik $n+1$ pontot tartalmaz, akkor minden egyenese $n+1$ pontot tartalmaz, minden pontja $n+1$ egyenesre illeszkedik, és összesen n^2+n+1 pontot és ugyanennyi egyenest tartalmaz. Az ábra szerinti Fano-sík az $n=2$-höz tartozó projektív sík. Az is bebizonyítható ugyanakkor, hogy nem minden $n>1$ természetes számhoz lehet konstruálni projektív síkot. Az $n=6$ és $n=10$ esetben például nem létezik ilyen sík.

3. Dobble és a matematika

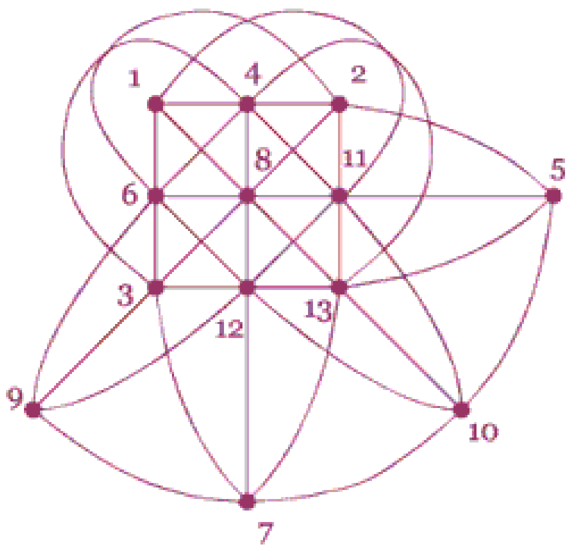
3.1. A Dobble és a véges projektív sík

A Dobble játékhoz tartozik egy projektív sík. A sík pontjainak a rajzok, a sík egyeneseinek a kártyalapok felelnek meg.

Hány kártyával, hány ábrával lehet tehát Dobble játékot készíteni?

	1 lapon hány rajz van?	1 rajz hány lapon szerepel?	lapok száma	rajzok száma
n	*n+1*	*n+1*	n^2+n+1	n^2+n+1
2	3	3	7	7
3	4	4	13	13
4	5	5	21	21
5	6	6	31	31
7	8	8	57	57
8	9	9	73	73

A szemináriumon megkaptuk az *n=3*-hoz tartozó véges projektív sík egy modelljét is:



forrás: https://www.math.lsu.edu/~contest/contest_logo_2004.html

3.2. Most 57 vagy 55?

Az eredeti Dobble játékban 55 lap van. A táblázatban nem szerepel 55, csak 57. Akkor a játék most melyik projektív sík?

A szemináriumon is megemlítették azt a tényt, hogy a teljes Dobble pakli 57 kártyából állna. Az, hogy a készletben csak 55 kártya szerepel, egyszerűen a nyomdai kivitelezés lehetőségeire vezethető vissza: így gazdaságos a játék előállítása, a játék élvezhetőségét pedig egyáltalán nem rontja, hogy 2 kártyával kevesebb van.

A Dobble játék tehát nem teljesen egy véges projektív sík. Egy olyan véges prokjektív sík részének tekinthető, amelyen 57 pont van és 57 egyenes, minden egyenesen 8 pont, és minden ponton át 8 egyenes megy. Hiányzik azonban két egyenes. Így megmarad az a tulajdonsága, hogy bármely két egyenesnek pontosan egy közös pontja van. Ennek duálisa azonban nem teljesül: nem igaz, hogy bármely két ponthoz pontosan egy közös egyenes létezik, vannak olyan pontpárok, amelyekhez hiányzik a közös egyenesük.

Az 55 lapos készletben tehát 57 rajz váltakozik a kártyákon. Hiányzik a „teljes készletből” két lap (a két egyenes megfelelője). Így megmarad az a tulajdonság, hogy bármely két lapon egyetlen közös ábra van (bármely két egyenesnek pontosan egy közös pontja van). Nem teljesül ugyanakkor, hogy bármely két rajz pontosan egy lapon szerepel együtt (ez felelne meg annak, hogy bármely két ponthoz van egy közös egyenes). Vannak olyan párok, amelyek nem szerepelnek közös lapon. De ez a játék szempontjából lényegtelen.

Miből áll tehát a készlet?

- ✓ 55 kártya, mindegyiken 8 rajz
- ✓ 57 rajz,
  - ➢ 1 db rajz 6-szor szerepel (ez az, amelyik a közös ábra lenne a kimaradó két lapon),
  - ➢ 14 db rajz 7-szer szerepel (ezek lennének a hiányzó lapokon a többi 7-7 különböző rajz)
  - ➢ 42 rajz 8-szor szerepel

Ellenőrzésképpen kiszámíthatjuk kétféleképpen, hogy összesen hány rajz van a kártyákon. Minden lapon 8 rajz van, ez összesen $55 \cdot 8 = 440$ rajz. 1 db rajz 6-szor, 14 db rajz 7-szer, 42 db rajz 8-szor szerepel, ez összesen ugyancsak $6 + 14 \cdot 7 + 42 \cdot 8 = 440$ rajz.

4. Készítsünk saját Dobblét!

Barátnőm angolul tanítja a matematikát. Így ő az angol szakkifejezések gyakoroltatására látott benne nagy lehetőséget. Az első készletben egyszerűen csak egész számok lehetnek, amelyeket ki kell mondani angolul. Egy következő készletben törtek. Majd műveletek egyszerű számokkal. S készülhet készlet geometriai alakzatokkal is. Fontos a játék során, hogy a közös ábra nevét ki kell mondani. Ha találunk elég számú különböző fogalmat (az élvezhetőség szempontjából minimum 13), akkor így játékosan segíthetjük az angol szakkifejezések memorizálását és gyakorlását.

Középiskolai matematika órára én olyan Dobble készletben gondolkodom, amelyen ugyanaz a szám vagy kifejezés többféle alakban is megjelenik. Így nemcsak a vizuális látvány fog megegyezni, hanem fel kell ismerni, hogy pl $(1+x)^2$ és $1+2x+x^2$ ugyanannak a kifejezésnek két felírása.

Nem szükséges nagy, 57 lapos készlet. Ha egy kártyalapokon 6 matematikai nevezetes azonosság szerepel, az ránézésre nyomasztó lehet, sok gyerek számára riasztó. Ezért elsőre kisebb készleteket készítek, 4 ábrát tartalmazó kártyákkal:

- ✓ minden lapon 4 ábra van, minden ábra 4 lapon szerepel. Ehhez 13 darab kártyára és 13 darab fogalomra van szükség.

Ha a játék beválik, érdemes nagyobb készletekben gondolkodni:

- ✓ minden lapon 5 ábra van, minden ábra 5 lapon szerepel. Ehhez 21 darab kártyára és 21 darab fogalomra van szükség;
- ✓ minden lapon 6 ábra van, minden ábra 6 lapon szerepel. Ehhez 31 darab kártyára és 31 darab fogalomra van szükség.

4.1. Segít az internet

Mivel ismerjük a 13 pontú projektív sík modelljét (ld. 3. oldal), ha megszámozzuk a fogalmakat, leolvashatjuk az ábráról, hogy melyik elemeket kell egy-egy kártyára tennünk. A játék logikája megmarad akkor is, ha szögletes kártyalapokra rátesszük a megfelelő ábrákat. Ezek elkészítése sokkal egyszerűbb lenne. Ugyanakkor a kör alakú kártyák különleges ízt, hangulatot, egyfajta varázst adnak a lapoknak. A lapokon nincs első elem, nincs az elemeknek sorrendje, sokkal inkább azt az érzést kelti, hogy véletlenszerűen kerültek az ábrák a lapokra. Játékossá teszi a helyzetet. Ezért készítsünk kör alakú lapokat, s úgy, hogy az ábrák különböző irányokból legyenek olvashatók.

Ehhez az interneten található ingyenes Dobble–készítő honlap nyújt segítséget. A vándorgyűlésen, a szemináriumon ilyet is mutattak nekünk. Több alkalmas honlap is létezik. Ezek egyike: http://aaronbarker.net/spot-it/spot-it.html. Ha megadok 13 szót vagy ábrát, a program elkészíti hozzá a kártyákat. Kinyomtathatom, ki kell vágni, és kezdődhet a játék.

Ez a program ugyanakkor nem tudja azt, hogy ugyanazt a fogalmat hol ilyen, hol olyan alakban teszi a készletbe. Ezen úgy tudunk segíteni, hogy a 13 fogalomhoz több Dobble készletet készítünk. Mindet kinyomtatom, kivágom, majd a megfelelő kártyákat kicserélem a paklikban. Maradhatnak ugyan olyan lappárok, amelyen az azonos fogalom azonos alakban szerepel, de legtöbbször különböző alakok azonosságát kell felismerni.

4.2. Mi legyen a kártyákon?

Több témában szeretnék Dobble készletet készíteni. Ilyenek:

- ➢ hatvány, gyök, logaritmus
- ➢ számolás közönséges törtekkel
- ➢ nevezetes azonosságok
- ➢ másodfokú kifejezések, gyökeik, gyöktényezős felbontásuk
- ➢ faktoriális és a binomiális együtthatók

Az egyes témakörökben választok 13 olyan fogalmat (13 értéket). A fogalmakhoz többféle felírást, alakot keresek. Ahhoz, hogy kezelni tudjam a felírásokat, táblázatot készítek. A táblázat 13 sora megfelel a 13 fogalomnak. Az oszlopok számát aszerint alakítom, hogy a fogalmaknak hányféle felírását szeretném beletenni a játékba: ennyi készletet tudok majd készíteni. A kinyomtatott, kivágott készletek között felcserélgetem az ugyanazon fogalmat tartalmazó lapokat, hogy „kevert” paklikat kapjak, amelyekben egy-egy fogalom már különböző felírásban szerepel.

4.3. A játék leírása

A játékot a matematikaóra elején építem bele az órába. Ha a tanórát egy rövid játékkal kezdjük, az segíti a diákokat a „megérkezésben”. Ez a pár perc növeli a motivációjukat, de emellett segíti is a fogalmak rögzülését is. Az adott témakör tanításakor több órát érdemes ezzel kezdeni. Illetve később, a tanév folyamán vegyük elő ismétlésként a kártyákat. Ez egész rövid ismétlését adhatja a korábban tanult fogalmaknak.

A játék mindössze 5 perc. Minden pár kap egy kártyapaklit, azaz egy teljes készletet. (Az egyszerűbb készlet esetében ez mindössze 13 lap.) Fordítsanak fel két lapot, és keressék meg, mi rajtuk a közös fogalom Ki kell mondani a közös értéket, vagy a megfelelő azonosságot. Utána az egyik lapot cseréljék le. Így 12 lap-pár esetén kell megkeressék a közös fogalmat.

5. A Dobble, mint példa, a matematika oktatás számos területén

Amikor találkoznak a tanulók a Dobble kártyákkal, sokakban felvetődnek kérdések. Hány kártya van benne? Hány alakzat van benne? Miért pont annyi? Miután ezeket megbeszéltük, sok helyzet van, amikor visszatérhetünk a kártyákhoz, de már más céllal.

- Halmazok kapcsán
  Elővehetjük a metszet, unió fogalmának tanulásakor. Az egyes kártyák jelenthetnek egy-egy halmazt. Lerajzolhatjuk, mi az adott halmazműveletek eredménye.
  Ábrázolhatjuk Venn-diagramon, hogy 3 adott elemhez mennyi kártya tartozik. (Hány elem van az egyes tartományokban, melyik elemek vannak ott?)
  Szita –formula tanulásakor.

- Logika tanulásakor:
  ÉS, VAGY műveletek kapcsán,
  Alkothatunk róluk állításokat, azok tagadását, implikációkat…

- Kombinatorika tanuláskor:
  Esetek összeszámlálásakor, egyszerű és összetettebb feltételekkel.

- Kombinatorika emelt szintű tanulásakor, számelméleti és algebrai megfontolásokkal kiegészítve:
  Miért pont ennyi kártya van? Miért pont ennyi ábra?
  Milyen számokra alkotható teljes készlet? Ez a kérdés azért is izgalmas, mert nem nehéz belátni, hogy teljesülnie kell az $n+1$; n^2+n+1 viszonyoknak. Nem igaz ugyanakkor, hogy minden ilyen számpárhoz konstruálható véges projektív sík.

- Valószínűségszámítás tanulásakor:
  Folytathatjuk a kombinatorikai példákat azzal, hogy mennyi a valószínűsége, hogy egy kártyára, egy kártyapárra teljesül egy adott tulajdonság.
  A játék jellegéből adódóan elvontabb a kérdés, ha visszafelé tesszük fel: egy vagy több ábrára teljesül egy adott tulajdonság.

- Gráfok tanulásakor:
  Néhány konkrét kártya esetén készíthetünk gráfot, amelynek csúcsai az egyes ábrák,

az élek megfelelnek annak, ha azonos kártyán szerepelnek. De képezhetünk gráfot, melynek csúcsai az egyes kártyák, élei megfelelnek annak, ha van közös elem köztük.

- Geometria emelt szintű tanulásakor:
  Az illeszkedési axiómák szemléltetéseként.

- A lista folytatható további ötletekkel, kapcsolatokkal.

5. Matematikai Dobble készletek

Elkészítettem, hogy a nevezetes azonosságokat illetve a logaritmus fogalmát gyakoroltató Dobble játék kártyáin milyen kifejezések szerepeljenek. Hasonló táblázat készíthető a többi témakörhöz is.

5.1. Dobble a logaritmus gyakorlására

(13 lapos, 4 ábra / kártya)

Mondd ki a közös értéket!

		1. készlet	2. készlet	3. készlet	4. készlet	5. készlet		érték
1.		$log_2 1$	$log_3 1$	$log_{0,5} 1$	$log_{0,2} 1$	$log_5 1$		0
2.		3^0	$log_5 5$	$log_{0,5} 0{,}5$	$0{,}2^0$	$1^{\frac{2}{3}}$		1
3.		$\left(\sqrt{2}\right)^2$	$4^{\frac{1}{2}}$	$log_3 9$	$log_4 16$	$8^{\frac{1}{3}}$		2
4.		$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$	$log_2 8$	$9^{\frac{1}{2}}$	$log_2 8$	$log_3 27$		3
5.		$log_2 16$	$log_3 81$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$	2^2	$16^{\frac{1}{2}}$		4
6.		$log_2 32$	$\left(\sqrt{5}\right)^2$	$\left(\sqrt{5}\right)^2$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$	$log_2 32$		5
7.		$log_2\left(\frac{1}{2}\right)$	$log_3\left(\frac{1}{3}\right)$	$log_5\left(\frac{1}{5}\right)$	$log_4\left(\frac{1}{4}\right)$	$log_{\frac{1}{2}} 2$		-1
8.		$log_5\left(\frac{1}{25}\right)$	$log_2\left(\frac{1}{4}\right)$	$log_{\frac{1}{2}} 4$	$log_{\frac{1}{3}} 9$	$log_3\left(\frac{1}{9}\right)$		-2
9.		$log_{\frac{1}{2}} 8$	$log_{\frac{1}{3}} 27$	$log_2\left(\frac{1}{8}\right)$	$log_2\left(\frac{1}{8}\right)$	$log_3\left(\frac{1}{27}\right)$		-3
10.		$log_2\sqrt{2}$	$log_4 2$	2^{-1}	$4^{-\frac{1}{2}}$	$log_9 3$		½
11.		$log_4\left(\frac{1}{2}\right)$	$-(2^{-1})$	$log_4\left(\frac{1}{2}\right)$	$log_3\left(\frac{1}{9}\right)$	$-(2^{-1})$		-1/2
12.		3^{-1}	$log_{27} 3$	$log_8 2$	$log_8 2$	3^{-1}		1/3
13.		$log_8\left(\frac{1}{2}\right)$	$log_8\left(\frac{1}{2}\right)$	$-(3^{-1})$	$log_{27}\left(\frac{1}{3}\right)$	$-(3^{-1})$		-1/3

Mind az 5 készletet kinyomtatjuk, majd a megfelelő lapok kicserélésével „kevert” készleteket alkotunk.

5.2. Dobble a nevezetes azonosságok gyakorlására I.

(13 lapos, 4 ábra / kártya) Mondd ki az azonosságot!

		1. készlet	2. készlet	3. készlet	4. készlet
1.		$1+2a+a^2$	a^2+2a+1	$(1+a)^2$	$(a+1)^2$
2.		$b^2+2ab+a^2$	$a^2+2ab+b^2$	$(a+b)^2$	$(b+a)^2$
3.		a^2-b^2	$(a+b)\cdot(a-b)$	$(a-b)\cdot(a+b)$	$(a-b)\cdot(b+a)$
4.		$(b-a)\cdot(a+b)$	$(b-a)\cdot(b+a)$	b^2-a^2	$(b+a)\cdot(b-a)$
5.		$(a-b)^2$	$(b-a)^2$	$a^2-2ab+b^2$	$b^2-2ab+b^2$
6.		$1-2a+a^2$	a^2-2a+1	$(1-a)^2$	$(a-1)^2$
7.		$(a-2)^2$	$(2-a)^2$	$4-4a+a^2$	a^2-4a+4
8.		$16-6a+a^2$	$a^2-8a+16$	$(a-4)^2$	$(4-a)^2$
9.		a^2-1	$(a+1)\cdot(a-1)$	$(a-1)\cdot(a+1)$	$(a-1)\cdot(1+a)$
10.		$(a-3)\cdot(a+3)$	$(a-3)\cdot(3+a)$	a^2-9	$(a+3)\cdot(a-3)$
11.		$(3-a)\cdot(3+a)$	$(3-a)\cdot(3+a)$	$9-a^2$	$(a+3)\cdot(3-a)$
12.		$(1-a)\cdot(a+1)$	$1-a^2$	$(a+1)\cdot(1-a)$	$(1-a)\cdot(1+a)$
13.		$(a+4)\cdot(a-4)$	$(a-4)\cdot(a+4)$	$(a-4)\cdot(4+a)$	a^2-16

Mind az 4 készletet kinyomtatjuk, majd a megfelelő lapok kicserélésével „kevert” készleteket alkotunk.

5.3. Dobble a nevezetes azonosságok gyakorlására II.

(13 lapos, 4 ábra / kártya) Mondd ki az azonos kifejezések közti egyenlőséget!

		1. készlet	2. készlet	3. készlet	4. készlet
1.		$(1+x)^2$	$(x+1)^2$	$1+2x+x^2$	x^2+2x+1
2.		x^2+4x+4	$(2+x)^2$	$(x+2)^2$	$4+4x+x^2$
3.		$y^2+8y+16$	$(4+y)^2$	$(y+4)^2$	$16+8y+y^2$
4.		$(x+y)^2$	$(y+x)^2$	$x^2+2xy+y^2$	$y^2+2xy+x^2$
5.		$25+10x+x^2$	$(5+x)^2$	$(x+5)^2$	$x^2+10x+25$
6.		x^2-y^2	$(x+y)\cdot(y-x)$	$(x-y)\cdot(x+y)$	$(x-y)\cdot(y+x)$
7.		$(y-x)\cdot(y+x)$	$(y-x)\cdot(y+x)$	y^2-x^2	$(y+x)\cdot(y-x)$
8.		$1-2x+x^2$	$(1-x)^2$	$(x-1)^2$	x^2-2x+1
9.		$x^2-2xy+y^2$	$y^2-2xy+x^2$	$(y-x)^2$	$(x-y)^2$
10.		$(2-x)^2$	$(x-2)^2$	$4-4x+x^2$	x^2-4x+4
11.		$25-10x+x^2$	$(5-x)^2$	$(x-5)^2$	$x^2-10x+25$
12.		x^2-4	$(x+2)\cdot(x-2)$	$(x-2)\cdot(x+2)$	$(x-2)\cdot(2+x)$
13.		$(2-x)\cdot(x+2)$	$4-x^2$	$(x+2)\cdot(2-x)$	$(2-x)\cdot(2+x)$

Mind az 4 készletet kinyomtatjuk, majd a megfelelő lapok kicserélésével „kevert” készleteket alkotunk.

Szeretném, hogy ezzel a módszertani újítással változatosabbá, élvezetesebbé váljon a matematika óra. Szeretettel ajánlom kollégáim figyelmébe.

Jó játékot és jó szórakozást!

Tartalom

Bevezető 1

1. A Dobble 1

2. A játék matematikai háttere 2

3. Dobble és a matematika 3

 3.1. A Dobble és a véges projektív sík 3

 3.2. Most 57 vagy 55? 3

4. Készítsünk saját Dobblét! 4

 4.1. Segít az internet 5

 4.2. Mi legyen a kártyákon? 5

 4.3. A játék leírása 6

5. A Dobble, mint példa, a matematika oktatás számos területén 6

5. Matematikai Dobble készletek 7

 5.1. Dobble a logaritmus gyakorlására 7

 5.2. Dobble a nevezetes azonosságok gyakorlására I. 8

 5.3. Dobble a nevezetes azonosságok gyakorlására II. 8

Felhasznált irodalom: 9

Felhasznált irodalom:

Rajta László: Véges projektív síkok egy kártyajáték szemszögéből

Matematika BSc, szakdolgozat, ELTE, 2018