Záró dolgozat az 59. Rátz László Vándorgyűlésről

Bessenyei Ádám előadása alapján

Készítette: Markó Zoltán

2019. augusztus 27.

1. Bevezetés

A differenciálegyenletekkel a valóság fontos problémáit modellezhetjük a fizikában, közgazdaságtanban, és általában a természettudományok területén. A középiskolában ezek a fogalmak egyáltalán nem, vagy legfeljebb az emelt szintű fakultáción említés szintjén, vagy a speciális matematika tagozaton fordulnak elő (esetleg a fizikaórán bujtatottan). A differenciálegyenletek elmélete az egyetemi tananyag része a természettudományos, a közgazdász- és a mérnökoktatásban, a matematika modern területeinek egyike. Fontosnak tartom ugyanakkor, hogy ezek a fogalmak a középiskolában is említésre kerüljenek, ezzel a matematika két tipikus tulajdonságára rámutatva: az egyik, hogy a matematika a valóságos folyamatok kitűnő modellalkotási eszköze, a másik, hogy folyamatosan fejlődő, modern tudomány.

Bessenyei Ádám: Differenciálegyenletes csemegék középiskolai ízesítéssel [1] című előadásában arra mutatott példát, hogyan lehet a differenciálegyenletek témakörét középiskolás szinten, a speciális matematika tagozaton motiválni, az alkalmazásokra példát mutatni. Úgy gondolom, előadása alapján a témakör nemcsak a speciális matematika tagozaton tanulók számára, hanem az érdeklődő emelt szintű fakultációra járó, hagyományos tantervű csoportok számára is feldolgozhatóvá válik.

Jelen dolgozatban az [1] előadásból a deriválás motivációját, illetve a differenciálegyenletekkel való ismerkedést dolgozom fel, illetve látom el megjegyzésekkel, ötletekkel. Az előadás további részében a differenciálegyenlet-rendszerekkel kapcsolatos bevezető feladatról volt szó, melyről jelen írás keretei között nem foglalkozom.

2. A deriválás motivációja a középiskolában

A derivált fogalma a korábban előfordulókhoz képest absztraktabb és nehezebb fogalmakkal dolgozik, bevezetése a középiskolai matematikaoktatásban hagyományosan a függvény grafikonjához adott pontban húzható érintő fogalmán keresztül történik. Ez a motiváció azonban a tanulók többségét nem köti le, nehézkes és – a bevezetés ezen pontján – kevéssé motivált. Az előadó példát mutatott arra, hogyan lehet jól motiválni a derivált fogalmát a pillanatnyi sebesség fogalmán keresztül.

Mit jelent az, hogy egy autó sebessége 90 km/h? Ha egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, akkor azt, hogy Δt (óra) idő alatt $90 \cdot \Delta t$ km-t tesz meg: a sebesség a megtett elmozdulás és az idő hányadosaként számítható. Az autó sebességmérője a pillanatnyi sebességet mutatja, amit azzal közelíthetünk, ha a „nagyon kicsi” Δt idő alatt megtett elmozdulást osztjuk Δt-vel. A pillanatnyi sebesség az elmozdulás változási ütemét, változási gyorsaságát jellemzi.

Általában is, ha $x(t)$ időben változó mennyiség, akkor a változási gyorsaság nem más, mint a z $x(t)$ mennyiség t-beli deriváltja.

$$x(t) \text{ változási gyorsasága } \approx \frac{x(t) \text{ megváltozása}}{\text{eltelt idő}} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}.$$

Bessenyei Ádám a pillanatnyi sebesség kapcsán úgy is fogalmazott, hogy a derivált nem más, mint matematikai traffipax: azt mutatja meg, a megfelelő pillanatban mekkora sebességgel változik meg az $x(t)$. Ezt a fajta motivációt megfelelőnek tartom a derivált fogalmának felírásához, mivel életközeli példán keresztül történik, ezáltal közelebb is hozza a fogalmat a tanulókhoz. A pillanatnyi sebességen keresztüli bevezetés az érintővel kapcsolatos értelmezésnek is helyet ad, mint arra a 6. részben rámutatok.

A változási gyorsaság kapcsán érdemes kitérni a derivált fogalmának történelmi fejlődésére. Sir Isaac Newton (1642-1727) a mennyiséget fluxiónak nevezte és $\dot{x}(t)$-vel jelölte. A nagy pestisjárvány idején, 1665-ben bezárt a Cambridge-i egyetem, Newton ezalatt az idő alatt kidolgozta elméletét a fluxiókkal való számolásra.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) eközben Németországban maga is foglalkozott a változási gyorsasággal, azt differenciálnak nevezte, és a $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ jelölést használta rá, mely tömören (és számolásaiban sokszor nagy előnyt jelentve) fejezte ki azt, hogy a fogalom valójában egy hányados kiszámításából eredeztethető.

A változási gyorsaságot Joseph Louis Lagrange (1736-1813) olasz születésű francia matematikus nevezte először deriváltnak, és tőle származik az $x'(t)$ jelölés (1797-ből).

Newton és Leibniz munkáik során sokszor használták a „végtelenül kicsi", „elhanyagolható" mennyiségeket. Ezek néha 0-k, néha nagyon kicsi számok „értékét" vették fel attól függően, a tárgyalásmód melyik pontján szerepeltek. Az ilyen „számítások" zseniális intuíciójuknak köszönhetően sokszor vezettek jó eredményre, kortársaik körében ugyanakkor több kritika is érte őket. A definiált fogalmak nem voltak precízen megalapozva, nem volt világos, mit értünk „végtelenül kicsi", esetleg „közel van hozzá" alatt. George Berkeley (1685-1783) élesen kritizálta az analízis művelőit 1734-ben megjelent művében.

A fogalmak tisztázása Augustin Louis Cauchy (1789-1857) francia matematikus nevéhez fűződik, aki szilárd matematikai alapokra fektette a változási gyorsaság kiszámolását.

3. A Sosemvolt Bank, mint a differenciálegyenletek motivációja

A differenciálegyenletekkel való ismerkedést a középiskolában a derivált fogalmának értelmezése, tulajdonságainak megismerése és az alkalmazásai után két gondolat mentén érdemes kezdeni: az első felmerülő differenciálegyenlet legyen érdekes problémával kapcsolatos, másrészt legyen a lehető leegyszerűbb. Életszerű példa lehet a következő:

1. **Példa.** A Sosemvolt Bankban a bankszámlán lekötött pénzösszeg növekedési üteme arányos a bankszámlán aktuálisan lévő pénz mennyiségével. Milyen függvény írja le a pénzmennyiség változását?

A gyerekek eddigre már találkoznak a kamatos kamat fogalmával, melynél a kamat időegységenként adódik hozzá a betett pénzhez, adott ráta szerint. Ez egyfajta diszkrét növekedésnek felel meg. A Sosemvolt Bank folytonos kamatozása így érdekes modellt ad arra a kérdésre, hogy mi történik, ha pénzünk folytonosan kamatozik? A növekedési ütem, mint az aktuális pénzösszeg változási gyorsasága, a 2. pontban látottak szerint az aktuális pénzösszeg deriváltja. Ha az aktuális pénzösszeget $p(t)$ jelöli, a példában szereplő arányossági tényezőt pedig r, akkor a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$p'(t) = r \cdot p(t)$$

Az 1. példa tehát egy egyszerű differenciálegyenletre vezet. Megoldását érdemes kétféleképpen is elvégeznünk.

Heurisztikus megoldás: Feltéve, hogy sosem 0 pénzünk mennyisége, a

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = r$$

átalakítást végezhetjük, ahol a bal oldalon az $\ln|p(t)|$ függvény deriváltjára ismerhetünk (ehhez természetesen továbbra is felesszük, hogy $p(t) \neq 0$). Innen egyenes út vezet a megoldáshoz:

$$\begin{aligned} \left(\ln|p(t)|\right)' &= r \\ \ln|p(t)| &= r \cdot t + C \\ p(t) &= \pm e^{C} \cdot e^{r \cdot t} \\ p(t) &= C \cdot e^{r \cdot t} \end{aligned}$$

Didaktikailag fontos megjegyezni, hogy a konstans C két különböző C értéket jelöl, a megoldás szempontjából ugyanakkor rövidebb, ha ugyanúgy jelöljük őket. A gyerekeket érdemes megtanítani arra, hogy ez az eljárás hagyományos a differenciálegyenletek elméletében. Eleinte érdemes lehet a különböző konstansokat pl. más színnel jelölni, melyben látszik különbözőségük, mégis egyforma karakterrel történik a leírás, így könnyebben megszokják különböző konstansok ugyanazon betűvel jelölését. A heurisztikus megoldás itt arra vonatkozik, hogy nem megyünk bele az abszolútérték jelentőségébe, a különböző megoldásgörbék említésébe, pusztán formálisan számolunk. Hasonlóképpen nem firtatjuk, mi történne, ha $p(t)$ elérné a nullát – tudjuk, hogy nem nulla kezdeti érték esetén ez nem fordulhat elő, de meggondolásaink jelen pontján ez nem nyilvánvaló.

Precíz megoldás: Átrendezhetjük az egyenletet

$$p'(t) - r \cdot p(t) = 0$$

alakúra. A trükk itt az, hogy próbáljuk meg olyan tényezővel (ún. integrálótényezővel) szorozni az egyenletet, hogy a bal oldalon egy szorzatfüggvény deriváltja jelenjen meg. A problémát speciális matematika tagozaton fel is tehetjük, de meg is súghatjuk a választ. Jelen egyenletet az $e^{-r \cdot t}$ kifejezéssel érdemes megszorozni. Ekkor a következőt kapjuk:

$$p'(t)\cdot e^{-r\cdot t} - r\cdot e^{-r\cdot t}\cdot p(t) = 0$$

$$\left(p(t)\cdot e^{-r\cdot t}\right)' = 0$$

Az a függvény, melynek deriváltja 0, valamely konstansfüggvény kell, hogy legyen, így kapjuk, hogy

$$p(t)\cdot e^{-r\cdot t} = C$$
$$p(t) = C\cdot e^{-r\cdot t}$$

valamely valós C konstanssal.

Mindkét megoldással azt kaptuk, hogy a $p'(t) = r\cdot p(t)$ egyenlet összes megoldása $C\cdot e^{r\cdot t}$ alakú.

2. **Példa.** Mennyi pénzünk lesz a Sosemvolt Bankban, ha kezdetben p_0 pénzünk volt?

A 2. példa matematikai modellje már egy kezdeti érték feladat, azaz egy differenciálegyenlet és egy kezdeti érték feltétel:

$$\begin{cases} p'(t) = r\cdot p(t) \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

Az 1. példa alapján a differenciálegyenlet megoldása $p(t) = C\cdot e^{r\cdot t}$. A kezdeti érték feltétel segítségével a konstans is meghatározható: $p_0 = p(0) = C\cdot e^{r\cdot 0} = C$. Válaszunk tehát a következő: *t* idő múlva a Sosemvolt Bankban $p(t) = p_0\cdot e^{r\cdot t}$ pénzünk lesz.

3. **Példa.** Mennyi idő múlva lesz kétszer annyi pénzünk a Sosemvolt Bankban, mint kezdetben volt?

A példa nem egy differenciálegyenlet megoldását jelenti, ugyanakkor a pénzügyekben fontos fogalom, a kétszereződési idő megalapozásául szolgál. Egyszerűen felírjuk, melyik az a *T* idő, amire $p(T) = 2\cdot p_0$ teljesül. A 2. példa eredménye szerint ez a

$$p_0\cdot e^{r\cdot T} = 2\cdot p_0$$

egyenlet megoldását jelenti, melynek megoldása $T = \frac{\ln 2}{r}$. Érdemes megjegyezni, hogy a közgazdaságtani gyakorlatban ezt a mennyiséget a

$$T = \frac{\ln 2}{r} \approx \frac{72}{100r}$$

aránnyal közelítik, *T* ilyen módon történő kiszámítását pedig 72-es szabálynak nevezik.

Néhány megjegyzést szeretnék tenni a fenti példákkal kapcsolatban. A $p'(t) = r\cdot p(t)$ egyenletnél egyszerűbb a $p'(t) = p(t)$ egyenlet, amely ugyanakkor legfeljebb matematikailag motiválható, például a „Melyik az a függvény, melynek deriváltja önmaga?” kérdéssel. Érdekesebb, ha rögtön van gyakorlati haszna a kérdésnek, amelyet felteszünk, a Sosemvolt Bank modellje pedig életszerű. Maga a felmerülő differenciálegyenlet megoldása nem sokkal bonyolultabb, mint a $p'(t) = p(t)$ egyenlet megoldása.

Hasonló modellt jelent a radioaktív anyagok bomlási törvénye – ott a kétszereződési idő helyett a felezési idő lép fel, mint fogalom. Fizika iránt érdeklődő csoportokban meggondolandó a radioaktív bomlás, mint jelenség modellezése, ugyanakkor a gyerekek többsége napjainkban inkább érdeklődik a pénzügyi, mint a fizikai problémák iránt. Emiatt is tartom jó ötletnek a pénzügyi példa felhozását.

A fentebb heurisztikusnak nevezett megoldás hagyományosnak tekinthető abban az értelemben, hogy a természettudományos és mérnökoktatásban bevett módszernek számít az egyetemeken. A részletek meggondolása sokszor ott is elmarad, mert alkalmazásnak megfelelő módon, helyes eredményt kapunk. A módszer ugyanakkor – a részletekben való elmerüléssel – precízzé tehető. A most precíznek nevezett meggondolás a középiskolában azért lehet fontos, mert további háttérismeret nélkül ez tud valóban precíz megoldást jelenteni. Körülményesebb, mint a heurisztikus gondolatmenet, ugyanakkor világos eredményt ad.

A heurisztikus megoldás precízzé tételében nem érdemes elmerülni, hiszen a témakörrel éppen ismerkedünk. A cél most csupán annyi, hogy egy életközeli, pénzügyi példán keresztül lássunk differenciálegyenletet, és következtessük ki annak megoldását.

4. Összetettebb példák, fázískép, iránymező

4. **Példa.** Pénzünket ismét a Sosemvolt Bankban helyezzük el folytonos kamatozással, ugyanakkor egyéb tranzakcióinknak köszönhetően minden pillanatban, állandó mennyiségű *k* pénzt költünk el. Mennyi pénzünk lesz *t* idő múlva, ha kezdetben p_0 volt?

A példának most a következő kezdeti érték feladat felel meg:

$$\begin{cases} p'(t) = r \cdot p(t) - k \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

Érdemes megkérdezi a gyerekeket, hogy most mire számítanak: különböző *k* értékekre mi történhet a pénzünkkel. Elképzelhető-e, hogy tönkre megyünk (elfogy a pénz), mindig tönkre megyünk-e, tud-e növekedni a pénz mennyisége, stb. A tippek megtétele után nekiláthatunk az egyenlet megoldásának.

Az előző egyenlettel szemben ez már egy lineáris, nem szétválasztható változójú differenciálegyenlet. A következő trükkel ugyanakkor megoldását visszavezethetjük a 2. példa megoldására: vezessük be a $P(t) := p(t) - \frac{k}{r}$ függvényt. Ekkor

$$p'(t) = r \cdot p(t) - k \qquad \Leftrightarrow \qquad P'(t) = r \cdot P(t)$$

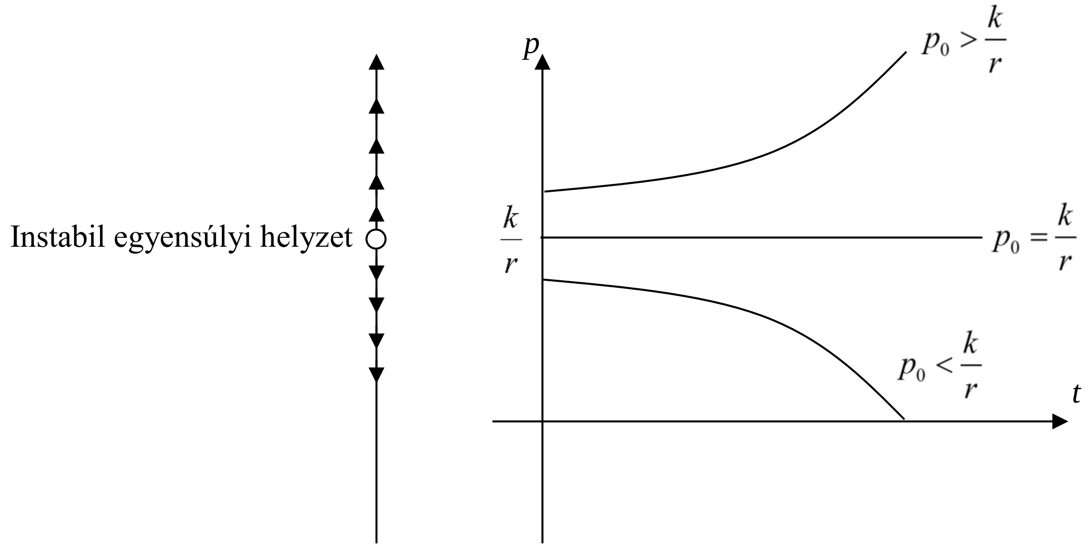
Ez utóbbi egyenletet már megoldottuk: $P(t) = P(0) \cdot e^{r \cdot t} = \left(p_0 - \frac{k}{r}\right) \cdot e^{r \cdot t}$. Visszatérve az eredeti *p* függvényre adódik, hogy

$$p(t)=\frac{k}{r}+\left(p_0-\frac{k}{r}\right)\cdot e^{r\cdot t}.$$

Ebből az alakból látszik, hogy a pénz mennyiségének változása a $p_0-\frac{k}{r}$ kifejezés értékétől függ.

- Ha $p_0=\frac{k}{r}$, a pénz mennyisége nem változik, és mindig $\frac{k}{r}$ mennyiségű.
- Ha $p_0>\frac{k}{r}$, a pénz mennyisége exponenciális növekedést mutat.
- Ha $p_0<\frac{k}{r}$, a pénz mennyisége exponenciális csökkenést mutat.

A pénz mennyiségének változása az alábbi grafikonnal is szemléltethető:



Fáziskép

A bal oldali grafikon az ún. fáziskép, melyen azt vázoljuk, hogy a különböző p_0 kezdeti értékek esetén milyen irányban változik pénzünk mennyisége. A $p_0=\frac{k}{r}$ helyzetet egyensúlyi helyzetnek nevezzük, hiszen ilyen kezdéssel a pénz mennyisége nem változik. Az egyensúlyi helyzet instabil, mert akármilyen közeli kezdeti értéket is veszünk mellette, a pénz mennyisége pozitív vagy negatív irányban akármilyen messzire eltávolodhat az egyensúlyi helyzettől.

Mindezen fogalmak a differenciálegyenletek elméletében közismertek, és e tanulságos példán keresztül kezdhetjük a velük való ismerkedést. A példának gyakorlati tanulsága is van: a pénzügyi elemzők munkája sokszor nagyon hasonló ehhez, amikor is megfelelő kezdeti feltételek esetén kell arról nyilatkozni, milyen pénzmozgás várható. Meg kell jegyeznünk ugyanakkor, hogy a valóságban a pénzügyi modellek ennél jóval bonyolultabbak.

Matematikai érdekessége a példának, hogy bár bonyolultabbnak tűnik a korábbiaknál, de egy ügyes trükkel valójában az előzőkre könnyen visszavezethető volt.

Érdemes a fenti példát szemléltetni konkrét *r* és *k* érték esetén is.

5. **Példa.** Tekintsük a $p'(t)=\frac{1}{2}p(t)-1$ differenciálegyenletet. A $(t;p)$ sík mely pontjaiban lesz a megoldásfüggvény grafikonjának meredeksége *m*?

A példa már túlmutat a Sosemvolt Bankon, de a korábbi példák ismeretében akár meg is határozhatjuk a differenciálegyenlet általános megoldását. A kérdés most viszont ennél egyszerűbb: a megoldásfüggvény grafikonjának adott $(t;p)$ pontbeli meredeksége ugyanis éppen a $p'(t)$ derivált értékével egyezik meg. A feltétel szerint tehát azon $(t;p)$ pontokat keressük, melyekre $p'(t)=\frac{1}{2}p-1=m$.

Nézzünk néhány konkrét *m* értéket! Ha pl. $m=0$, akkor azon $(t;p)$ pontok megfelelők, melyekre $\frac{1}{2}p-1=0$, azaz $p=2$ teljesül. Hasonlóan meghatározható néhány további konkrét *m* értékre is, hogy mely pontok lesznek jók. Általában a $p=2(m+1)$ ordinátájú pontokra lesz igaz, hogy ott a grafikon meredeksége *m*.

Ennek segítségével a megoldásgörbék hasznos és szemléletes jellemzőjéhez juthatunk, az iránymezőhöz. Ennek során a $(t;p)$ koordinátarendszer olyan pontjaiban, melyben a megoldásfüggvény grafikonjának meredeksége *m*, egy kis méretű *m* meredekségű szakaszt rajzolunk. Az így kapott ábrát nevezzük iránymezőnek, sok vonal berajzolásával képet kapunk arról, hogyan is haladhatnak a megoldásgörbék, miközben nem oldottuk meg a differenciálegyenletet.

Végezetül érdemes megjegyezni a témával kapcsolatban, hogy a Sosemvolt Bank problémáját már Jacob Bernoulli (1654-1705) felvetette 1690-ben, a következő kérdést feltéve: „Mekkora lesz egy év elteltével a befektetett pénzösszeg, ha minden pillanatban az éves kamatláb arányos részével kamatozik?”

Ez a kérdés első ránézésre különbözik az eredetileg általunk felírt példától. Bernoulli gondolatmenete a megoldásra ugyanakkor a következő volt: tegyük fel, hogy a kezdeti pénzmennyiség p_0, az éves kamatláb mértéke pedig *r*. Ekkor $\frac{1}{n}$ évente a kamatláb arányos része $\frac{r}{n}$. Egy év alatt a pénz értéke eszerint

$$p_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n .$$

Ennek határértéke, amint *n* tart végtelenbe, éppen p_0e^r, ami a differenciálegyenlet megoldása is, amennyiben az időt évben mérjük. Ez a példa nagyszerű kapcsolatot mutat az *e*, mint nevezetes sorozathatárérték és az *e*, mint differenciálegyenlet megoldásaként adódó exponenciális függvény alapja között.

5. Egyéb példák, megjegyzések

A tárgyalt differenciálegyenletek számos alkalmazásban előfordulnak. Középiskolás szinten igen fontos, hogy magát az egyenletet szórakoztató, figyelemfelkeltő feladatba csomagoljuk, hiszen célunk itt továbbra is a motiváció, az érdeklődés felkeltése a téma iránt.

Az [1] előadásban a következő példa is szerepel:

6. **Példa.** Egy éjjel a híres színész, Archibald Coolbody feleségét holtan találják otthonában. Mellette a férj, kezében a gyilkos fegyver. A Scotland Yard felügyelője már szinte le is zárná az ügyet, ám hajnali 1 órakor beviharzik Sherlock Holmes, és az alábbi beszélgetés zajlik le közöttük.
   Felügyelő: Mr Holmes, önnek semmi dolga nincs már itt, az ügy teljesen egyértelmű. A férj kezében volt a fegyver, ő az elkövető.
   Holmes: Csak ne olyan hevesen, felügyelő úr! Megmérte a halottkém a holttest hőmérsékletét?
   Felügyelő: Természetesen. Pontban éjfélkor a test 33 °C-os volt. Ekkor Holmes előkapta kabátjából a hőmérőjét, és megvizsgálta a testet.
   Holmes: Hmm. Most 31 °C-os; és látja, a szoba hőmérője 20 °C-ot mutat. A halál fél 11 körül állt be, márpedig akkor Coolbody még Hamletet játszotta a Queen's Theatre-ben, ahogy minden este. Nem ő az elkövető.
   Hogyan állapította meg Sherlock Holmes, hogy mikor hunyt el az áldozat?

A kérdés természetesen feltehető a gyerekeknek, a válasz pedig az, hogy Sherlock Holmes tisztában volt a testek lehűlésének törvényszerűségeivel. Newton 1701-ben, fémekre vonatkozóan fogalmazta meg lehűlési törvényét, amely szerint a test és a környezet hőmérsékletének különbsége egyenlő időközönként nézve ugyanannyiad részére csökken. Képletben:

$$T_{\text{test}}(n+1) - T_{\text{közeg}} = q\left(T_{\text{test}}(n) - T_{\text{közeg}}\right).$$

Ugyanennek az egyenletnek a folytonos változatát ma Newton-féle lehűlési törvénynek nevezik (bár nem ő írta fel), és a következő differenciálegyenlettel írják fel:

$$\left(T_{\text{test}}(t) - T_{\text{közeg}}\right)' = -k\left(T_{\text{test}}(t) - T_{\text{közeg}}\right).$$

Láthatjuk, hogy ez is olyan szerkezetű differenciálegyenlet, mint a korábbiak. A 6. példa szövege szerint a különbség óránként $\frac{11}{13}$-ára csökkent, amiből adódik, hogy a test 22:30 körül volt 36,5°-os. Ekkor halt meg, és kezdett lehűlni, amiből következik Holmes érvelésének helyessége.

Kiemelném itt is a példa motiváló erejét: önmagában a lehűlési törvény nem biztos, hogy kellőképpen motiváló a gyerekek számára, a nyomozós példa viszont érdekessé teszi ezt is. A pénzügyi motiváció és a nyomozós példa mellett további alkalmazásokat is felsorolhatunk, melyek az előzőekhez hasonló differenciálegyenletre, ennek megoldásaként pedig exponenciálisan növekvő, csökkenő függvényekre vezetnek.

A ^{14}C szénizotóp felezési idejének ismeretében, a bomlási törvény segítségével például megállapíthatjuk egy régészeti lelet életkorát – ez a módszer Willard Libby (1908-1980) nevéhez fűződik, melyért 1960-ban kapott Nobel-díjat. Hasonló elven működik a festmények kormeghatározása, mely hamis festmények leleplezésére ad lehetőséget.

A gyerekek számára különösen életközeli példákat is sorolhatunk, például „Mikor vegyünk ki valamit a hűtőből, ha adott hőfokon szeretnénk elfogyasztani?” vagy akár „Mikor tegyük a tejet a kávéba, ha adott idő múlva a lehető legmelegebben szeretnénk elfogyasztani?”

6. További tervek

Az előadásban példát láthattunk a derivált fogalmának fizikai motiváltságú bevezetésére a pillanatnyi sebesség fogalmán keresztül. Szeretném ezt mind a pillanatnyi sebesség fizikai fogalma, mind a derivált geometriai (érintő meredeksége) értelmezésével összekötni.

Az autó sebességmérője a pillanatnyi sebességet mutatja meg, vagyis azt a sebességet, amellyel az autó egyenes vonalú egyenletes mozgást végezne, ha az adott pillanatban megszűnnének a rá ható erőhatások. Ezen a ponton a derivált fogalmának bevezetése köthető az érintő meredekségéhez. Egyenes vonalú egyenletes mozgást végző test elmozdulás-idő grafikonja ugyanis egy egyenesre illeszkedik. Ha egy adott pillanatban megszűnnek egy testre ható erőhatások, akkor az elmozdulás-idő grafikon egyenes mentén folytatódik tovább, ez pedig éppen az adott pontban az elmozdulás-idő grafikonhoz húzható érintő. Ennek meredeksége a derivált, amely a pillanatnyi sebesség általunk használt matematikai és az imént idézett fizikai definíciójával is összhangban van.

Személyesen úgy gondolom, hogy a derivált bevezetését a pillanatnyi sebesség fogalmán keresztül célszerű bevezetni, és azonnal megmutatni az érintővel való kapcsolatot. Ezzel a hagyományos tárgyalás előnyeit is megtarthatjuk, miközben a bevezetés szemléletes marad. A következő tanévben így szeretném bevezetni 11-es fakultációs csoportjaimban a deriváltat.

Az [1] előadás kapcsán elmerült bennem a kérdés, hogy mikor érdemes egyáltalán a deriválást tanítani, de különösképpen hogy egy fakultációs csoportban hol van – hol lehet – a helye a differenciálegyenletek elméletének. Jelenleg úgy gondolom, hogy a fenti mélységben egy 11-es fakultációs csoport eljuthat a differenciálegyenletekig, mégpedig úgy tekintve rájuk, mint a tanult deriváltfogalom egy nyilvánvalóan hasznos, és aktuális szintjén izgalmas, kihívást jelentő alkalmazásához.

A Vándorgyűlés Speciális matematika szekciójának központi témája idén az analízis volt. Hujter Bálint [2] előadásában, illetve az azt követő szakmai beszélgetésen arról beszélgettünk, mit és milyen mértékben szükséges analízisből tanítani a középiskolában. Véleményem szerint az analízis tanítása a középiskolai emelt matematika fakultáción is fontos, hiszen a továbbtanulás elengedhetetlen eszközeivel tudnak a gyerekek biztonságos környezetben megismerkedni – erre az egyetemen már sokszor nincs elég idő. A tárgyalt anyag mélysége ugyanakkor nem világos, ahogy a tárgyalt anyagrészek sorrendje sem. Egyetemi oktatói tapasztalattal rendelkezem az analízis tanítása kapcsán, gimnáziumban most fogok először analízist tanítani. A következő tanévben két fakultációs csoportom is indul, ahol – a vándorgyűlési tapasztalatok által is motiválva – szeretnék kísérleti jelleggel eltérni a hagyományos felépítéstől, és a deriválással, mint motiváló témakörrel kezdeni (a sorozatok határértéke a gyerekek többségét kevésbé érdeklő téma, és valójában az integrálás előtt van csak rá feltétlenül szükség).

A fentiek szerint érdemesnek tartom a differenciálegyenletek megemlítését, beemelését is a tananyagba, így tervezem az [1] előadás példáit órai környezetben kipróbálni, illetve szeretnék további hasonló jellegű feladatokat gyűjteni. Reményeim szerint a mutatott példák felkeltik a gyerekek érdeklődését a differenciálegyenletek, a pénzügyi és természettudományos témák iránt.

A gyakorlati haszon mellett a differenciálegyenletek matematikailag is hasznosan illeszkednek a tananyagba, mivel az integrálás motivációjaként is szolgálhatnak: az integrálási technikák megismerésével a differenciálegyenletek még szélesebb köre válik megoldhatóvá.

Források

[1] Bessenyei Ádám: Differenciálegyenletes csemegék középiskolai ízesítéssel

http://abesenyei.web.elte.hu/publications/csemegek.pdf

[2] Hujter Bálint: Sorozatok? Deriválás? Integrál? Mivel kezdjük az analízist? Vagy a kalkulust? http://www.bolyai.hu/RLV2019/HujterB_kalkulus.pdf