Találkozások a végtelennel

Készítette: Laczik István (Baár-Madas Református Gimnázium)

2019.

A korábbi esztendőkben egy-egy témakör (statisztika, szimmetria, függvények, kombinatorika) tárgyalását választottam dolgozatom témájaként, tavaly a pithagoraszi számhármasok kereséséről írtam. Az idei vándorgyűlés sok remek előadása közül kettő volt számomra különösen is magával ragadó. Az egyik a Gödöllői Református Líceum tanárai és diákjai közös előadása Kalandozások Középföldén címmel, a másik pedig Németh József Meghökkentő és hihetetlen – barangolás a matematikai végtelen birodalmában című semmihez sem hasonlítható, fantasztikus előadása. Nem kevés töprengés után végül is az utóbbit választottam idei dolgozatom ihletadójaként, aminek még egy oka van. Nevezetesen az elmúlt tanév során többször is eltűnődtem azon, hogy miről írjak a vándorgyűlés után, és amikor az egyik, ráadásul tagozatos csoportomban hat egymást követő tanórán feledkeztek el a 0-ról a gyerekek (a végén már nem tudtuk eldönteni, hogy sírjunk, vagy nevessünk…), akkor kínomban mondtam nekik, hogy valamelyik esztendőben a házi dolgozatom témájaként a „szegény” 0-t fogom választani. A másik, persze más szempontból problémás terület a végtelen fogalma, amiről az említett előadás kapcsán támadt kedvem újra, immár sokadszor eltűnődni. Dolgozatomban azt szeretném bemutatni, hogy a hat évfolyamos gimnáziumi képzésben részesülő matematika tagozatos diákjaim, akik minden esztendőben heti 5 órában tanulják a tárgyat, mikor és hogyan találkoznak a végtelennel.

Még mielőtt belekezdtem volna a munkába, visszagondoltam saját gyermekkoromra, arra, hogy nekem mi volt az első végtelennel kapcsolatos élményem. Lassan ötven évesen is tisztán emlékszem, hogy nagyon sokat tűnődtem az Univerzum határán. Számtalanszor megpróbáltam elképzelni, és mindannyiszor feltettem magamban a kérdést: És mi van azon túl? Általános iskolás éveim előtt/kezdetén történt mindez. A napokban megkérdeztem erről 12 esztendős Bátony fiamat is, aki most lesz hatodikos. Nem lepődtem meg, amikor ugyanezt mondta. A következő említés a számokkal való ismerkedés volt az alsó tagozatos évekből. Nem csak az iskolában, hanem itthon is téma volt: Melyik a legnagyobb szám? Napokon át „nyúztak” két évvel kisebb Tomaj öccsével. Az esti fürdetés legfőképpen arról szólt, hogy mondjak nekik egy igazán nagy számot. Nyilván semmit sem fogtak föl belőle, de a10^{200}-nal egy darabig „megelégedtek”, talán mert olyan jól hangzott... Megjegyzem, ezt a számot senki emberfia fel nem foghatja, azt tudva, hogy a Univerzumban mai ismereteink szerint mintegy10^{88}proton van! És hol vagyunk még a végtelentől?! Fentieket csak azért vetettem papírra, hogy lássuk, a végtelen kérdése már egészen kis koruktól kezdve érdekli a gyerekeket. Mire felső tagozatba kerülnek, valamilyen kezdetleges fogalmuk kialakult róla.

Hetedik osztályban, mint talán legtöbben, a halmazokkal indítjuk a matematika szisztematikus tanítását. Az első találkozás rögtön a fejezet elején adódik a halmaz abszolútértéke, véges és végtelen halmazok fogalma tárgyalásakor. Utóbbira természetszerűen a legismertebb számhalmazok (**N**, **Z**, **Q**) és ponthalmazok (pont, egyenes, sík, …) kerülnek elő példaként. A következő témakör a számelmélet, ami egész tárháza a véges-végtelen kérdés felbukkanásának. Az oszthatóság fogalmának tisztázása után máris a természetes számok halmazának felosztása az osztók száma alapján következik, amiből most számunkra az összetett szám fogalma (kettőnél több, de csak véges sok pozitív osztója van) érdekes. Ha rendesen megtanulta a gyerek az oszthatóság fogalmát, akkor világos, hogy ebbe a definícióba a 0 nem fér bele, hiszen a 0-nak az adott számkörben (akár **N**, akár **Z**) minden szám osztója, vagyis végtelen sok osztója van, tehát a 0 nem összetett szám! Kisvártatva jön a számelmélet alaptétele, amely a szokásos megfogalmazásban úgy hangzik, hogy minden 0-tól és 1-től különböző természetes szám felbontható prímtényezők szorzatára, és ez a felbontás a prímtényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű. Az oszthatósági szabályok összetett számokkal szintén jó lehetőség a végtelen „kézzel foghatóvá" tételére. Elmegy több-kevesebb idő, mire rájönnek a gyerekek, hogy például $24 \mid n \leftrightarrow 6 \mid n$ és $4 \mid n$ helytelen, mert $(4; 6) \neq 1$, míg $24 \mid n \leftrightarrow 3 \mid n$ és $8 \mid n$ helyes, ugyanis $(3; 8) = 1$. Viszont ha ezt megértették, akkor bármely összetett számmal tudnak oszthatósági szabályt fogalmazni (feltéve persze, hogy ismerik a felbontását). Ilyenkor szoktam mondani, hogy ha este vacsoránál megkérdik, mi volt matekórán, akkor büszkén újságolják el, hogy: „Képzeld anya/apa! Ma végtelen sok oszthatósági szabályt tanultunk!"

Egyes nagyon egyszerű feladatok is kiválóan érzékeltetik a véges és végtelen közötti különbséget: Határozzuk meg azokat a természetes számokat, amelyekre teljesül, hogy

1., $[16; x] = 48$, itt $x = 3; 6; 12; 24; 48$, csak véges sok megoldás van, illetve

2., $(30; x) = 6$, itt viszont $x = 6; 12; 18; 24; 36; 42; 48; 54; 66; \ldots$ végtelen sok megoldás adódik!

A fejezetben terítékre kerül még a maradékos osztás kérdése: $a = b \cdot q + r$, ahol $0 \leq r \leq b-1$, vagyis az osztási maradék mindig annyiféle, amennyi az osztó, tehát mindig csak véges sokféle maradék létezik. A következő fejezet a számok, amelyben tisztázzuk a már említett nevezetes számhalmazokkal (**N**, **Z**, **Q**) kapcsolatos legfontosabb ismereteket, amelyek közül témánk szempontjából a racionális számok tizedestört alakja, a véges és a végtelen tizedestörtek érdekesek. Ide illő és az előző fejezethez is kapcsolódó feladat például: milyen számjegy áll az $\frac{1}{7}$tizedestört alakjában a tizedesvessző után a 2019. helyen? Ugyancsak ebben a témakörben kerül elő a számok normálalakja, ami gyakorlati segítséget nyújt a (végtelen) nagy, valamint a (végtelen) kicsi számok leírásához. A fogalom persze fontos, de önmagában egyáltalán nem érdekes, ezért igyekszem egy kissé megízesíteni efféle kérdésekkel: Hány hajszála van a Föld minden lakójának együttvéve? Hányat ver az ember szíve az élete során? Hány csepp víz van a Balatonban? Ezeket meghallva elsőre elképednek a gyerekek, de igyekszem tudatosítani bennük, hogy csak nagyságrendileg fogjuk meghatározni az eredményt, és adatokkal természetesen segítek, de nekik kell megmondaniuk, hogy milyen adatokra van szükségük (pl. hány hajszála van egy embernek átlagosan, vagy mekkora egy vízcsepp – bár ez utóbbit feladom házi feladatként: műanyag fecskendőt csepegtessenek tele, amiből egy osztással megvan a válasz; órán átlagoljuk a mérési eredményeket, amivel a „fizikának is besegítünk egy kicsit”). Akinek van kedve, számoljon utána, az eredmények rendre $10^{14}; 10^{9}; 10^{16}$. Hol vagyunk a végtelentől?! Az első és második félév határán következik a geometria, amely során szintén többször előkerül a végtelen. A térelemek nyilván nem véletlenül nem definiáltak, ugyanakkor az egyenesről és a síkról minden gyereknek van valamilyen szemléletes fogalma. A szögfajták tárgyalásakor érdekes, hogy bizonyos fogalmak egy-egy szöget jelentenek (null-, derék-, egyenes-, teljesszög), mások viszont végtelen sokat (hegyes-, tompa-, konkáv szögek), és akkor még nem is szóltunk a forgásszögekről, amelyek (legalábbis egy hetedikes gyerek fejében) másféle végtelen képzetét keltik. Ekkor még szó sincs intervallumokról, és azok számosságáról! A geometriai szerkesztések kapcsán szoktam beszélni az euklideszi értelemben vett szerkeszthetőségről, amelyben nyomatékosan szerepel az egyes alapszerkesztések véges sokszori végrehajtása. A sokszögek csoportosítása kapcsán első hallásra furcsának tűnik, hogy külön tárgyaljuk a háromszögeket és a négyszögeket, n = 5-től kezdve (folytatva!) viszont általánosságban beszélünk róluk. Majdnem minden csoportban akad olyan tanuló, aki felveti, hogy a végtelen sok oldalú sokszög a kör. Ez ellen „kézzel-lábbal” tiltakozom, és a leghatározottabban kijelentem, hogy a kör nem sokszög! Az algebra témakörben az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer kapcsán adódik újabb lehetőség a végessel és a végtelennel való találkozásra, amikor a megoldások száma kerül szóba. Utolsó előtti fejezetként a függvények következnek, ahol talán egyszerre a legszemléletesebben, ugyanakkor mégis absztrakt módon kerül elő ismét a véges-végtelen probléma. És a probléma most szó szerint értendő. Számtalan gyereknek okoz komoly nehézséget még évekkel később is, hogy amikor egy adott függvényt ábrázolunk, akkor a grafikont ténylegesen csupán egy véges tartományon rajzoljuk fel, mégis a teljes (végtelen!) görbét értjük alatta. Ezzel a nehézséggel persze már a geometriában az egyenes rajzolásakor is találkoznak, de akkor korántsem okoz ekkora problémát! A reciprokfüggvény grafikonja különösen fontos, ugyanakkor egyszerre érdekes és nehéz. Az évet a geometriai transzformációk zárják, amelyek újabb felfedezni valót tartogatnak. A fixpontok és fixegyenesek száma is érdekes, de a szimmetriatengelyek, valamint a szimmetriacentrumok száma még ennél is izgalmasabb kérdés. Erről részletesen írtam a szimmetria tanításáról szóló dolgozatomban 2015-ben, így most csak utalok erre. A pont körüli forgatás kapcsán viszont mindenképpen meg kell állni egy pillanatra. A szabályos sokszögek forgásszimmetriája vizsgálatakor felvetődő kérdés, nevezetesen, hogy melyik az a legkisebb pozitív forgásszög, amellyel elforgatva az adott alakzat önmagába vihető, elvezet a végtelen kicsi irányába. Kihagyhatatlan a kérdés a kör kapcsán is, ahol ki kell mondani, hogy nincs ilyen szög! Eddig szinte mindig a végtelen nagy, most először a végtelen kicsi felé fordítjuk a tekintetünket! Az eltolás kapcsán nemigen szokás szimmetriáról beszélni, pedig nagyon is van létjogosultsága és értelme. Olyan alakzat, amely (nem a nullvektorral) önmagába eltolással átvihető, csak valamilyen végtelenbe nyúló, nem korlátos alakzat lehet. Ez a felismerés is fontos a végtelennel való ismerkedés során.

A hetedikes tananyag bőségesen kínál találkozási lehetőséget a végtelennel, ehhez képest nyolcadikban lényegesen kevesebbszer érintjük a témát, igaz meghatározó pillanatokban. Az első ilyen a Pitagorasz-tétel kapcsán előkerülő $\sqrt{2}$, a kétoldali közelítés módszere és a végtelen nem szakaszos tizedestört fogalma, amelyekkel kiegészülve megérkezünk a valós számokhoz. Amikor tisztázzuk, hogy a számegyenes betelt, értelmes, érdeklődő gyerekekkel el lehet beszélgetni a számkörbővítésről (magam is nyolcadikos koromban hallottam először a komplex számokról), ami az egyik legjobb irány a végtelen felé, ha lehet ezt mondani... A másik ilyen nevezetes pillanat a sorozatokkal való ismerkedés, ami majd három esztendő múlva válik igazán izgalmassá... A harmadik pedig a kerület- és területszámítás. A kör kerületének és területének meghatározásához a kétoldali közelítés módszerével jutunk el. Mivel nincsenek meg a szükséges trigonometriai alapok, egyelőre maradunk a mérésnél, ami természetszerűleg pontatlansággal és hibával jár, de egyrészt ezt is meg kell tanulniuk a gyerekeknek, másrészt érdekes összehasonlítani az egyes tanulók eredményét, harmadrészt ugyanezt fogjuk csinálni négy esztendővel később is, csak akkorra már rendelkezésünkre áll a szükséges matematikai apparátus. Mindezeken túl természetesen a lényeg a határérték fogalmának előkészítése, végső soron közeledés a végtelenhez...

Kilencedik osztályban lényegében ismét végighaladunk a hetedikben megismert fejezeteken, de sokkal alaposabban, mélyebben beleássuk magunkat az egyes témákba, egyszersmind elvontabb is lesz, amit tanulunk. A halmazok tárgyalásakor a Descartes-féle szorzat jelent újdonságot. Amikor például a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$felbukkan, akkor a rácspontok száma kapcsán óhatatlanul felvetődik: Mennyi a végtelenszer végtelen? Ilyenkor három év türelmet szoktam kérni a kérdés megválaszolásához... (A matematikai tanulmányaik vége felé, 12. osztályban lesz majd szó a halmazok számosságáról, addig bizony várniuk kell a gyerekeknek.) A következő témakör a számelmélet, amely további remek alkalmakat tartogat a végtelennel való találkozásra. Az egyik és talán legnagyobb élmény a prímek száma végtelen klasszikus, indirekt bizonyítása, ami első hallásra biztosan meglepő szépségénél, ötletességénél és egyszerűségénél fogva, másrészt ez az első olyan alkalom, amikor bizonyítjuk, hogy egy halmaznak végtelen sok eleme van. Szorosan ide tartozik a prímek elhelyezkedésével kapcsolatos szintén közismert állítás, mely szerint a prímek között tetszőlegesen nagy hézagok is előfordulnak, vagy másként van tetszőlegesen sok szomszédos összetett szám. Ez utóbbi állítást elő szoktuk készíteni: keressünk minél több szomszédos összetett számot. Az állítás bizonyítása szép, emlékeztet a prímek száma végtelen tétel bizonyítására, és nem utolsósorban jó példát szolgáltat arra, hogy ne keverjük össze a tetszőlegesen nagyot a végtelennel! Kihagyhatatlan a máig megoldatlan van-e végtelen sok ikerprím probléma felvetése, ezzel szemben ott a könnyen bizonyítható állítás, mely szerint a (3; 5; 7) az egyetlen hármasiker. Végül említést érdemel a típuspéldának számító, de első hallásra egyáltalán nem könnyű feladat: Milyen n természetes (egész) számok esetén lesz pl. a $\frac{3n-9}{n+3}$kifejezés értéke egész szám? Van-e ilyen n szám, ha igen véges vagy végtelen sok? A kérdésre hónapok múltán a racionális törtfüggvények tárgyalásakor érdemes visszatérni.

A végtelennel való találkozásra másik jó alkalom a számok témakörben adódik. A $\sqrt{2}$irracionális voltának bizonyítása során nagyon fontos, hogy az adott pillanatban észrevegyük az ellentmondást, különben a gondolatmenet soha nem ér véget! Gyönyörű pillanat! Milyen „bizonyítás" az, amelyiknek nincs vége?! Aztán következik a valós számok halmazának alaposabb megismerése. Ilyenkor érdemes bedobni a bármely két (ir)racionális szám között van (ir)racionális szám jól ismert és igen fontos állításokat, amelyek első hallásra azért nem mindenkinek magától értetődőek. Ilyenkor találkozunk az intervallumokkal is, amelyek szintén elvezetnek a végtelenbe...

Kilencedik osztályban még egy alkalommal, az egybevágóság megtárgyalása után kerül sor a végtelennel való találkozásra a pitagoraszi számhármasok keresése nyomán. Megítélésem szerint ez az egyik legnagyobb szellemi kalandozást jelentő, és kevésbé érdeklődő, vagy szerényebb képességű diákok számára is befogadható élmény a végtelennel való ismerkedés során. Erről szól tavaly készített dolgozatom.

Tizedik osztályban elsősorban a geometria segít közelebb kerülni a végtelenhez. A középponti és kerületi szögek témakör több alkalmat is kínál. Egyik legszebb, és bizonyítását tekintve legegyszerűbb elemi geometriai tétel a kerületi szögek tétele, mely szerint adott körben adott íven nyugvó kerületi szögek egyenlők. A végtelen sok kerületi szög mindegyike feleakkora, mint az adott ívhez tartozó egyetlen középponti szög! Egy ábrán, és egy mondatban a véges és a végtelen!

A másik találkozásra hónapokkal később, a hasonlóság fejezet legvégén kerül sor. A körre vonatkozó szelőszakaszok tétele, mely szerint a szokásos jelölések mellett $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, ahol P az adott kör külső pontja, igazi kincsesbánya. A bizonyítást követően eljátszunk a következő gondolattal: rögzítsük az egyik szelőt, mondjuk az A és B pontokon áthaladót, a másikat pedig forgassuk a P pont körül. Az újabb és újabb metszéspontok egyre közelebb kerülnek egymáshoz, míg egyszer csak E érintési ponttá „olvad össze" a kettő, és azt kapjuk, hogy $PA \cdot PB = PE^2$. Megint egy ábrán és egy mondatban a végtelen sok (szelő), valamint a véges sok (egyetlen érintő). Nem mellesleg igen szemléletes találkozás a határértékkel, ami helyett most jobb határhelyzetet mondani.

A harmadik alkalomra a szögfüggvények megismerésekor kerül sor. Azt könnyű látni, hogy sin α és cos α ϵ [-1; 1] minden α esetén, de a tg α-val majd egy teljes tanórát elbabrálunk. A definíció mellé felkerül a szokásos egységkör, és innen kezdve párhuzamosan két szálon futnak az események. Kiindulásként még csak az első síknegyedben vagyunk, kezdetben α = 0º, amit lassacskán növelünk. A számláló és a nevező is pozitív, hányadosuk is pozitív; a számláló nő, a nevező csökken, a hányadosuk nő. Eközben az ábrán is megjelennek az egyre nagyobb és nagyobb szögekhez tartozó érintőszakaszok. Szeretném azt hinni, hogy még a normál tantervű osztályokba járók közül is mindenki látja, hogy tg α minden határon túl nő, szó szerint tart(unk) a végtelenbe, továbbá azt is, hogy a tg 90º miért nem értelmezett. Néhány órával később következnek a trigonometrikus függvények, amelyeknek periodicitásuknak köszönhetően végtelen sok zérushelye, illetve szélsőértékhelye van. A trigonometrikus egyenleteknél pedig már senki sem csodálkozik a végtelen sok megoldáson...

Tizenegyedik osztályban ugyancsak három fejezetben nyílik lehetőség a végtelennel való alaposabb ismerkedésre. Ebben az esztendőben jutunk el azokhoz az új fogalmakhoz és módszerekhez, amelyek segítségével pontosan le tudunk írni régebbről többé-kevésbé már megismert jelenségeket. A tárgyalásban a sorozatok kerülnek elő leghamarabb, még az első félév során, legfőképpen azért, hogy a merőben új szemléletet igénylő, szokatlan és éppen ezért nehéz fogalmaknak legyen elég idejük megérni a gyerekek fejében. Az első magvas gondolat a teljes indukció, mint új bizonyítási módszer, amelyben megint szinte kézzel fogható a végtelen. Aztán elérkezünk a sorozat határértékének definíciójához, amely ugyancsak látványos betekintést enged a végtelenbe olyannyira, hogy napokig tart, mire magukhoz térnek utána a gyerekek... A határértékre vonatkozó tételek (határérték és műveletek) bizonyítása, valamint néhány fontos és nevezetes sorozat (például: $\sqrt[n]{a}$; q^n) határértékének levezetése során lassan megbarátkoznak ezekkel az új eszközökkel. A Cantor-axióma elengedhetetlen, egyrészt megint csak szemléletes mondanivalója, másrészt a matematika felépítésében betöltött szerepe, harmadrészt hasznossága miatt.
Személyesen különösen is kedvelt témám a végtelen sorok, amelyekre legalább egy hetet szoktam szánni. Tapasztalatom szerint a gyerekek is élvezik ezt a szellemi kalandozást. Izgalmas eljátszani néhány ismert végtelen sorral, megvizsgálni, hogy melyik konvergens, melyik nem az. Kihagyhatatlan a 0,999999... = 1 tisztázása, amely során felidézzük a 9. osztályban alkalmazott jól ismert eljárást. Persze mindig van, akinek még a korrekt levezetés után is nehezére esik az előbbi egyenlőség elfogadása. Az még világos, hogy 0,999999... ≤ 1. Tegyük fel, hogy 0,999999... < 1! Ilyenkor jön a szokásos kérdés: Jó-jó, de mennyivel kisebb? Kérem, hogy mondjanak egy nagyon kicsi pozitív számot! Egyszerre tanulságos és mulatságos, hogy szinte minden csoportban akad valaki, aki teljesen komolyan a következőt javasolja: 0,000000...1, vagyis a végtelen sok 0 után szeretne írni egy 1-est! Természetesen ennek kapcsán teszünk említést arról, hogy a végtelennel nem mindig bánhatunk úgy, mint a véges mennyiségekkel. Hogyan kell például a 0,999999...-t 10-zel megszorozni?! Mindig megdöbbennek a gyerekek az 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + … = ? kérdés kapcsán azon, hogy az „eredmény” többféle is lehet, illetve azon, hogy 1 + 2 + 4 + 8 + … = –1, amire roppant szellemes magyarázatok is születtek (a kedvencem az, amely szerint ez egy olyan nagy szám, hogy „ott már visszakanyarodik a számegyenes”, és a –1-nél „lyukadunk ki”).
A másik témakör a koordináta-geometria. Az érintő fogalmát és jelentőségét – tudjuk – nem lehet

eléggé hangsúlyozni. Ennek gyakoroltatására jól bevált típusfeladatok egyike például a következő: Az $y = x + b$ egyenletű egyenes a b paraméter mely értéke esetén érinti az $y^2 = 4x$ egyenletű parabolát? A végtelen sok egyenes között kell megtalálni azt az egyet (ha kör van megadva, akkor kettőt), amelyik megfelel.

Tudom, hogy nem törzsanyag, de szerintem szép, érdekes, tanulságos, nem utolsósorban algebrát gyakorolni is jó terep az ellipszis és a hiperbola egyenletének levezetése. Érdemes egymás mellett látni mind a 4 kúpszelet egyenletét (hasonlóságokat és különbségeket), érdemes együtt tárgyalni az érintő fogalmát (pontosan egy közös pontja van a görbével, minden további pontja külső pont), és a hiperbola kapcsán érdemes szóba hozni az aszimptotákat, amelyeket megismerve megint tettünk egy lépést a határérték és a végtelen alaposabb megismerése felé. Itt érdemes utalni az érintő- és szelőszakaszok tételénél megbeszéltekre is.

A harmadik témakör a differenciálszámítás. Mostantól kezdve elsősorban terjedelmi okokból csak vázlatszerűen szeretném felsorolni a végtelennel való találkozási pontokat. Az egyik ilyen a függvény határértéke, ami valójában 15 definíciót jelent, hiszen a hely 5-féle ($-\infty$; $a-0$; a; $a+0$; $+\infty$), míg a határérték 3-féle ($-\infty$; A; $+\infty$) lehet. Itt aztán „lubickolhatunk” a véges-végtelen témában, hozzáteszem: tanárként, mert a gyerekek ezeket az órákat nem éppen lubickolásként élik meg.

A másik találkozási pont a zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságainak taglalása során előkerülő Bolzano-tétel, és a bizonyítás során felhasznált intervallumfelezéses eljárás, ami megint roppant szemléletesen hozza elénk a véges-végtelen problémát. Elég arra gondolni, hogy az eljárás lehet, hogy véges sok lépésben véget ér, de lehet az is, hogy nem!

Harmadik találkozási lehetőségként feltétlenül meg kell említeni a pontbeli derivált fogalmát, valamint geometriai, illetve fizikai jelentését is.

Ezzel elérkeztünk a 12. osztályhoz. Ebben az esztendőben is van még mit mondani és mutatni a végtelennel kapcsolatban. A valószínűségszámítás témakörben szintén nem törzsanyag, de izgalmas újdonság a sokszor már kissé unalmas kombinatorikus módszer után a geometriai módszer megismerése. Témánk szempontjából pedig egyenesen kihagyhatatlan, hiszen az újdonság éppen abban rejlik, hogy az események száma végtelen. Sok szép, érdekes feladatot lehet feldolgozni, kezdve a végtelen négyzetrácsra érmét dobálunk klasszikus problémákkal (lásd zöld csíkos feladatgyűjtemény V. fejezet 257. és következő feladatai). Meg szoktam kérdezni azt is, hogy mekkora valószínűséggel esik az érme rácspontra, amiben az az érdekes, hogy az eredményben megjelenik a π, emiatt irracionális, ilyet kombinatorikus úton sosem kaphatunk!

További kedves feladatom az imént említett feladatgyűjtemény V/130. példája, amelyben egy szabályos érmét annyiszor dobunk fel, amíg kétszer egymás után ugyanarra az oldalára esik. A sok kérdés némelyike megválaszolásához (pl.: Mekkora a valószínűsége, hogy a kísérlet páros sok dobásból áll?) elengedhetetlen a végtelen mértani sor ismerete. Ez sem szokványos feladvány ebben a témában.

A terület-, felszín-, térfogatszámítás fejezetben most már sokkal alaposabban szerepel a kör kerületének és területének meghatározása, mint 8. osztályban. Bizonyítjuk továbbá a téglalap területképletét, amelynek alapgondolatában - ha $|\frac{b}{c} - \frac{t_1}{t_2}| < \frac{1}{n}$ minden pozitív egész n esetén, akkor $\frac{b}{c} = \frac{t_1}{t_2}$ - szintén megjelenik a végtelen. Már csak egy lépésre vagyunk az integrálszámítástól. Hamarosan következik a minden határon túl finomodó felosztás, majd a határozott integrál fogalma, létezése és jelentése: $\lim s_n = \lim S_n = \int_a^b f(x)dx = T$; aztán az integrálható függvényeknél az a feltétel, hogy f az [a; b] intervallumon legfeljebb véges sok helyen szakad; majd a primitív függvény és a határozatlan integrál fogalma. Az integrálszámítás alkalmazásai között pedig különleges szerepet tölt be az improprius integrál, amely nagyon szépen összekapcsolható a végtelen sorokkal...

Ezzel a gondolattal nem csupán a fejezet, hanem a középiskolai tananyag tárgyalásának is végére értünk. A rendszerező összefoglalás és ismétlés során természetesen újra és újra előkerül a végtelen kérdése, talán legérdekesebben a számkörbővítés kapcsán. Szándékosan az utolsó órákra időzítve kerítünk sort a halmazok számosságára, amit a végtelen szálloda paradoxonával szoktam felvezetni, és innen jutunk el a kontinuum-hipotézis felvillantásáig. Azt gondolom, hogy – Németh József előadásának címét idézve – ezzel a meghökkentő és hihetetlen eszmefuttatással méltóképpen búcsúzunk a gimnáziumi matematikaóráktól.

Nem számoltam össze, hogy hány találkozásról esett szó dolgozatomban, de ha sok is, csak véges sok. Azt hiszem és remélem, hogy ezek a találkozások többé-kevésbé formálták a diákok szemléletét, és valamit megértettek abból, ami teljes valójában megismerhetetlen, hiszen végtelen...