Hogyan tanítsuk meg Tigrist a tetszőlegesen nagy és a végtelen nagy közötti különbségre?

Teljes feladatsor megoldásokkal

Surányi László

Előzetes megjegyzések:

1. Mielőtt a „tetszőlegesen sok/nagy – végtelen sok/nagy” problémáját elkezdenénk, érdemes a diákoktól megkérdezni, hogyan képzelik el a végtelent. És hagyjuk, sőt esetleg bíztassuk őket, hogy eresszék szabadon a fantáziájukat, és ne csak mennyiségi végtelenben gondolkodjanak. Meglepő tapasztalataim vannak: volt olyan csoportom, ahol szinte mindenki valami rossznak tartotta a végtelent. Másutt meg nagyon jónak, a szabadság szinonimájának tartották.
2. Euklidész *Elemeiben* szerepel a bizonyítás arra a tételre, amit mi így mondunk ki: *Végtelen sok prímszám van*. Csakhogy ez görögül nem így hangzik, mert nincs annak a szónak megfelelője, amit mi „végtelennek” mondunk. Van rá egy szavuk, „apeirón”, de ez inkább határtalant jelent, és mint ilyen, a görögök szemében negatív jelentésű, a szép, a jó a „határ” vagy a „határoló(k)”.
   Euklidésznél tehát így hangzik a tétel: „*A prímszámok bármilyen sokaságánál van több prímszám.*” Ez az egyik végtelen-fogalmunk, ezt mi úgy mondjuk: „végtelen sok”. De van még két másik fogalmunk is. A „tetszőlegesen nagy” és a „végtelen nagy”. Aztán persze ezen belül is vannak további különbségek. Mi most e három, és különösen az utóbbi kettő közötti különbséget próbáljuk körüljárni feladatokkal. Előre bocsátok annyit, hogy „a végtelen nagy” fogalma sokkal inkább *minőségi* fogalom, hozzá képest a „végtelen sok” vagy „tetszőlegesen sok/nagy” mennyiségi fogalom.
3. A továbbiakban a végtelen mindig megszámlálhatóan végtelent jelent, és „akármilyen/tetszőlegesen nagy” = bármilyen megadott korlátnál nagyobb.
4. A *-gal jelölt feladatokat nehezebbnek ítélem. A néhány **-gal jelöltet pedig nagyon nehéznek.

I. Példák „tetszőlegesen sok/nagy”-ra, ahol nyilván fogalmilag értelmetlen a végtelen sok/nagy

Megjegyzés: Az a célszerű, hogy ezek „menet közben” szerepeljenek, és itt inkább csak ismételjük őket. Ilyen a prímszámokra vonatkozó említett tétel, ennek „finomításai”: végtelen sok $4k - 1$, $6k - 1$ alakú prím van. Esetleg az is, hogy végtelen sok $4k +1$, $8k + 1$, $8k + 3$, $8k + 5$, $8k + 7$ alakú prím van (lásd Szalay, *Számelmélet*, 69. feladat, 98. oldal.) Ismétléskor érdemes a diákoktól is megkérdezni, tudnának-e nagyon egyszerű példákat mondani. Például ilyeneket:

I.1. a) Négyzetszám tetszőlegesen nagy, (egész szám) négyzetgyöke tetszőlegesen nagy, stb.

b) Négyzetszámok között tetszőlegesen nagy távolság van.

c) Egy háromszög területe (Euklidésznél!!!) tetszőlegesen nagy lehet. (A hiperbolikus geometriában van egy maximális, véges területű háromszög: a háromszorosan aszimptotikus háromszög.)

d) Két pont között tetszőlegesen nagy távolság lehet (az egyenesen, a síkon, a térben), de végtelen nagy nem.

e) Egy körben tetszőlegesen sok rácspont lehet, de végtelen sok nem. (Ugyanez igaz a körvonalra is.)

f) Egy pozitív egész számnak tetszőlegesen sok osztója lehet, de végtelen sok osztója nem lehet. (Sokszor célszerű használni, hogy ha egy egészről belátjuk, hogy végtelen sok osztója van, akkor az a szám a nulla.)

Megjegyzések:

A hiperbolikus geometriában egy egyenes merőleges vetülete egy őt metsző egyenesen tetszőlegesen nagy véges szakasz lehet, de végtelen (fél)egyenes nem lehet.

A későbbiek kedvéért érdemes tisztázni, hogy egy gráfban két pont között lehet akármilyen véges hosszú út, de két pont között végtelen hosszú út nem lehet. Viszont végtelen hosszú út lehet a gráfban, csak bármely két pontja között akkor is véges hosszú az út. Ahogy a számegyenes is végtelen hosszú, de bármely két pontja között véges a távolság.

I.2. Szomszédos prímek között van tetszőlegesen nagy távolság („hézag”).

$n! + 2$, $n! + 3$, …, $n! + n$ összetett számok, és ez legalább $n - 1$ hosszú hézag szomszédos prímek között.

I.3. a)* Szomszédos négyzetmentes számok között is van-e akármilyen nagy távolság?

Kínai maradéktétellel: olyan x számot keresünk, amire $x + i$ osztható az i-edik prím négyzetével, $i = 1,2,…,n$. Ilyen x szám van. x és $x + n$ között csupa nem-négyzetmentes szám van.

b) És szomszédos nem-négyzetmentes számok között? ☺

Minden negyedik szám osztható néggyel, tehát nem négyzetmentes.

I.4.* Szomszédos teljes hatványok között akármilyen nagy lehet a különbség. (Teljes hatvány = egész szám egynél nagyobb egész kitevős hatványa.)

Az előző után tkp. gyakorló feladat. Most olyan x számot keresünk, amire $x + i \equiv p_i\ (p_i^2)$, mert ez garantálja, hogy $x + i$ nem teljes hatvány.
De megy kínai maradéktétel nélkül is: n^2 és $(n+1)^2$ között a) nincs négyzetszám, b) csak $(n+1)^{2/3}$-nál kisebb számok hatványa lehet, ami közöttük van, mindegyikből legfeljebb egy, mert $(\frac{n+1}{n})^2 < 2$, ha n>3. Tehát van kettő, amelyek távolsága legfeljebb $(n+1)^{1/3}$.

„Hegy” és „völgy” tételek. (Lásd még: Freud – Gyarmati, *Számelmélet*, 619.)

Jelölések: $d(n)$ jelöli az n pozitív egész osztóinak számát, $\sigma(n)$ az osztóinak összegét, $\varphi(n)$ az n-hez relatív prím maradékosztályok számát. Rájuk vonatkozó „hegy” és „völgy” tételek következnek.

Az f számelméleti függvényre vonatkozó „Hegy (Völgy) tétel” így szól: Tetszőleges K pozitív számhoz van olyan n pozitív egész, amelyre igaz, hogy $f(n)$ legalább K-val nagyobb (kisebb) mind $f(n-1)$-nél, mind $f(n+1)$-nél. (Felrajzolva az $f(n)$ függvényt, az n helyen egy tetszőlegesen nagy „hegy” („völgy”) lesz benne.)

I.5. a) Bizonyítsuk be, hogy a $\sigma(n)$ függvényre igaz a „Völgy tétel”!

Válasszuk n-et prímszámnak, ekkor $\sigma(n) = n + 1$. Másrészt $n - 1$ és $n + 1$ páros, tehát önmagán és 1-en kívül osztója a fele is. Ezért az osztói összege legalább $n + \frac{n-1}{2}$, illetve $n + \frac{n+1}{2}$.

b) Bizonyítsuk be, hogy a $\varphi(n)$ függvényre teljesül a „Hegy tétel”.

Ha n>2 prímszám, akkor $\varphi(n) = n - 1$, míg szomszédjai párosak, tehát a páros számok nem relatív prímek hozzájuk, így legfeljebb $(n+1)/2$ hozzájuk relatív prím maradékosztály van.

I.6’. Segítség az alábbi I.6 a) feladathoz:
Maximálisan hány osztója lehet egy olyan pozitív egésznek, amely pontosan négy (k) prímszám szorzata? És minimálisan?

Maximum akkor van, ha a négy (k) prímtényező mind különböző, minimum akkor, ha minden prímtényező egyenlő.
Megjegyzés: Itt az szokott problémát okozni, hogy a választ hamar látják, de bizonyítani – főleg a minimumot – nem tudják. Legyen a szám $n = p_1p_2…p_k$. Minden k hosszúságú 0-1 sorozathoz tartozik n egy osztója (p_i kitevője a sorozat i-edik eleme), és ezek pontosan akkor különbözőek, ha minden p_i különbözik. Másrészt az 1, p_1, p_1p_2,…,$p_1p_2…p_k$ számok mind különböző osztói n-nek, tehát k+1 osztó mindig van. Más akkor nincs, ha a prímtényezők mind azonosak.
Egy vicces megoldás a maximumra (egyik Babitsos diákomtól): képzeljük a számot k prímszám valamilyen hatványának a szorzataként (esetleg nulla kitevőjűeket is be kell vennünk). A kitevők összege k, ha mindegyik kitevőhöz egyet adunk, az így kapott k szám átlaga 2, állandó. Tehát a mértani közepe akkor a legnagyobb, ha mind a k kitevő egyenlő, 1.
Persze mindkét állítás kijön a $d(ab) \geq d(a)d(b)$ egyenlőtlenségből, ahol egyenlőség (a,b)=1 esetén áll.

I.6. a)** Bizonyítsuk be, hogy a $d(n)$ függvényre igaz a „Hegy tétel”.

Keressünk olyan számot, amelynek „sokkal több” osztója van, mint a szomszédainak. (Lásd az I.6’. feladatot.)
Vegyük az első K darab prímszám szorzatát. Ennek osztószáma 2^K. Az előtte és utána álló számnak e prímek egyike sem osztója, tehát legfeljebb $K-1$ prímosztója van, így osztóinak száma legfeljebb 2^{K-1}. A különbség legalább 2^{K-1}.

b)** Bizonyítandó, hogy a $d(n)$ függvényre igaz a „Völgy tétel” is.

Ezt csak Dirichlet-tétellel ismerem: olyan prímszámot keresünk, ami eggyel nagyobb egy 2^k-val osztható számnál és eggyel kisebb egy 3^k-val osztható számnál. Az ilyen számok egy mod 6^k maradékosztályt alkotnak, amely relatív prím a modulushoz, tehát Dirichlet tétele szerint tartalmaz prímet. A prímszámnak két osztója van, a szomszédainak legalább $k+1$.

Megjegyzés: 1. Ha viszont a $d(n)$ függvény átlagát nézzük, tehát a $\frac{1}{n}\sum_1^n d(i)$ függvényt, ez már lényegében egyenletesen $\ln n$, pontosabban: a $\frac{1}{n}\sum_1^n d(i) - \log n$ különbség korlátos.

I.7. Mi következik ugyanezzel az ötlettel
a) a $\varphi(n)$ függvényre?
b) a $\sigma(n)$ függvényre?

a) A „Völgy”-tétel jön ki belőle:
Ha n-et az első k prím szorzatának választjuk, akkor $\varphi(n) = \mathrm{n}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots(1-\frac{1}{p_k})$, míg a szomszédai esetében az $n-1$, ill. az $n+1$ *kevesebb*, $1-\frac{1}{p_k}$-nál *nagyobb* szorzóval van megszorozva. A különbség mindkét irányban cn lesz.
b) Ha $n = p_1p_2\ldots p_k$, az első k prímszám szorzata, akkor $\sigma(n) = \mathrm{n}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots(1+\frac{1}{p_k})$, s mivel $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots(1+\frac{1}{p_k})$ végtelenhez tart, azt kapjuk, hogy $\sigma(n)/n$ tetszőlegesen nagy lehet.
Másrészt általában, ha m prímtényezői $q_1, q_2, \ldots, q_l$, akkor
$\sigma(m) \le m\left(1+\frac{1}{q_1}\right)\left(1+\frac{1}{q_2}\right)\ldots(1+\frac{1}{q_l})$.
Ha $m = n-1$ vagy $n+1$, akkor l legfeljebb $k-1$, és minden $q_i > p_k$, tehát
$\sigma(m) < m(1+\frac{1}{p_k})^{k-1}$.
Itt m szorzója kisebb e-nél, tehát n szomszédaira $\sigma(m)/m$ korlátos, amiből következik a hegy-tétel.

I.8.* Bizonyítandó a prímosztók számára vonatkozó völgy-tétel.

Legyen N az első k páratlan prím szorzata. Ekkor 2^N-nek egyetlen prímosztója van. A szomszédai viszont oszthatók 2^p-1-gyel, illetve 2^p+1-gyel, ahol p az első k páratlan prím bármelyike. Az előbbiek páronként relatív prímek, az utóbbiak közül bármely kettő közös osztója 3 (ismert feladat). Tehát mindkét szomszédnak legalább k különböző prímosztója van.
Felhasználtuk az ismert feladatot, hogy $(2^a \pm 1, 2^b \pm 1) = 2^{(a,b)} \pm 1$.

II. Példák arra, hogy valamiből van tetszőlegesen sok, de nincs végtelen sok.

Megjegyzés: Ez abban különbözik az **I.**-ben szereplő feladatoktól, hogy itt már bizonyítani kell, hogy nincs végtelen sok, mert a fogalom megengedné.

II.1. Bemelegítő: Van-e a prímszámok sorozatában végtelen számtani sorozat?
Megjegyzés: annak bizonyításáért, hogy tetszőlegesen hosszú van, Fields Medal járt.

II.2. a) Mutassunk a természetes számoknak olyan szigorúan monoton növő sorozatát, amelyben van akármilyen hosszú számtani sorozat, de nincs végtelen hosszú számtani sorozat.

b) **Megjegyzés:** Itt sok, aránylag nehezebben eldönthető javaslat is érkezhet. Kaptam pl. ezt:

1, 2,3, 4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,… Miért nem jó?

Mert minden $3k + 1$ alakú számot tartalmaz, ez egy végtelen számtani sorozat. Minden n-re tartalmaz egy maradékosztályt mod n.

c) Megkövetelhetjük-e azt is, hogy a számtani sorozatok különbsége is tetszőlegesen nagy legyen?

Ha vettünk egy d hosszú, d differenciájú sorozatot, akkor utána kihagyunk mondjuk d^d számot, és onnan indítjuk a d+1 hosszú, d+1 differenciájú sorozatot. 1, 3, 5, 10, 13, 16, 26, 30, 34, 38,…

Az egyre nagyobb hézagok garantálják, hogy végtelen hosszú számtani sorozat nem lesz a kiválasztott számok között.

d) Van-e olyan is, amelyben a kimaradó számok is ilyen sorozatot alkotnak?

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, stb.

e)* Osszuk a pozitív egészeket k páronként diszjunkt részre úgy, hogy mindegyikben legyen tetszőlegesen hosszú számtani sorozat, de egyikben se legyen végtelen hosszú.

Ugyanez az ötlet.

f)** Feloszthatók-e a pozitív egészek végtelen sok páronként diszjunkt részre úgy, hogy mindegyikben legyen tetszőlegesen hosszú számtani sorozat, de egyikben se legyen végtelen hosszú?

Az i-edik lépésben az első i halmazba teszünk $i - i$ darab számot, mindig a soron következő i számot.

A továbbiakhoz érdemes a végtelen gráf fogalmát tisztázni. Elég, ha úgy képzeljük el, hogy a pozitív egészek a pontjai és az élek egészeket „kötnek össze”. A későbbiekben fontos lesz az I.1. utáni 2. megjegyzésben tisztázott kérdés is.

II.3. a)* Van-e olyan gráf, amelyben van tetszőlegesen nagy teljes részgráf, de nincs végtelen teljes részgráf?
Megjegyzés: meglepődtem, hogy nagyon jónak számító diákok között sem mindenkinek megy! Aztán meglepődnek a konstrukció egyszerűségén. De világos, hogy mi okozza a gondot: nem mernek „csak úgy” egymás mellé tenni végtelen sok részgráfot.

A gráf az uniója egy-egy, páronként pontdiszjunkt teljes n-esnek minden pozitív egész n-re.

b)** Van-e olyan gráf, amelyben ugyanez a komplementer gráfra is igaz? (Ez a kérdés itt még nyugodtan maradhat megválaszolatlanul! A végtelen Ramsey-tétel szerint ugyanis nincs ilyen gráf. Tehát az előző feladattal nincs analógia!)

II.4. Mint ismeretes, (a Micimackó-beli) Tigris kitűnően mászik felfelé a fán, de lefelé nem tud mászni. Van-e olyan fa, amelyen tetszőlegesen magasra fel tud mászni, de végtelen magasra nem? Vagy másképp: valamikor mindenképp meg kell állnia véges lépés után.
Megjegyzés: Meglepően nehéz megérteni, hogy van ilyen fa: egy gyökérből indul végtelen sok ág, az első 1 hosszú, a második 2 hosszú, és általában az n-edik n hosszú. Ennek kulcsszerepe lesz fogalmilag – de ne csodálkozzunk, ha még azután sem „hiszik el igazán”, hogy ebben a gráfban nincs végtelen hosszú út, miután már megbeszéltük alaposan. Mert „micsoda hülyeség”, hogy van végtelen sok emelet (ráadásul minden emeleten végtelen sok pont), és még sincs végtelen út. Hiszen minden emeletre feljutunk. Szóval ne várjunk rögtön átütő sikert egy ilyen feladattól. Hagyjuk, hogy mérgelődjenek, értetlenkedjenek.

Inkább adjunk további feladatokat a fogalom erősítésére:

II.5. a) Jó téglalapoknak nevezzük a koordinátarendszer olyan téglalapjait, amelyek két szomszédos oldala a két koordinátatengely, és az origóval szemközti csúcsuk a pozitív síknegyedben van. Adjunk meg száz, ezer, stb. jó téglalapot úgy, hogy egyik se tartalmazza a másikat!

A téglalapot az origóval szemközti csúcsával lehet egyértelműen megadni. Ezek a csúcsok legyenek az $x + y = n$ egyenesen. Így $n - 1$ téglalapot adtunk meg a megfelelő feltétellel.

b)* Megadható-e végtelen sok jó téglalap is úgy, hogy egyik se tartalmazza a másikat? (Lásd az 1934-es Eötvös verseny 3. feladatát.)

Nem. Ha egy megadott téglalap koordinátái $(a|b)$, akkor minden további téglalapban a csúcsnak vagy az első koordinátája kisebb a-nál, vagy a második b-nél és nem lehet két azonos abszcisszájú közöttük, sem két azonos ordinátájú. Tehát összesen még $a + b - 2$ téglalap lehet megadva a kívánt feltétellel.
Érdemes felrajzolni, hogy egy ilyen téglalap miket zár ki. A téglalap belsejében levő pontok nem jönnek szóba csúcsként, az $(a\ |b)$-ből „induló pozitív negyed sík” rácspontjai sem. Marad egy-egy „álló” és „fekvő” félsáv, mindegyikben csak véges sok függőleges, ill. vízszintes rácsegyenes van, és minden ilyen egyenesen csak egy pont lehet csúcs.

c)** Fogalmazzuk meg az a) és b) feladat megfelelőjét térben, és döntsük el, melyik igaz?

Most olyan téglatestekről van szó, amelyek három éle a három koordinátatengelyen van. Bármilyen (véges) sok megadható úgy, hogy semelyik ne tartalmazza egyik másik téglatestet sem, de végtelen sok nem adható meg. A bizonyítás a következő feladat c) részében.

II.5’. a)* Adjunk meg száz, ezer stb. olyan pozitív egészet, amelyeknek csak 2 és 3 a prímosztói, és egyik sem osztója a másiknak!

Megadunk n +1 ilyet: $2^{n-i}3^i$, i=0,1,…,n.

b)* Megadható-e végtelen sok is ugyanezzel a feltétellel?

Nem, a bizonyítás – mint ahogy az állítás is – ugyanaz, mint II.5.b)-nél:
Vegyünk egy tetszőlegeset a megadott számok közül, legyen ez 2^a3^b. Nem lehetnek megadva olyan számok, amelyekben az első kitevő a-nál, a második b-nél nagyobb, vagy mindkettő a megfelelőnél kisebb. Nem lehet megadva két olyan szám, amelyben 2 kitevője ugyanaz, sem két olyan, amelyben 3 kitevője ugyanaz. Tehát összesen még $a + b$ szám lehet megadva.

c) Adjunk meg száz, ezer stb. olyan pozitív egészet, amelyeknek csak 2 és 3 és 5 a prímosztói, és egyik sem osztója a másiknak!

Ezt megtettük a)-ban. ☺

d)** Megadható-e végtelen sok is ugyanezzel a feltétellel?

Nem. Vegyük az egyik megadott számot, legyen ez $2^a3^b5^c$. Mindegyik megadott számban van egy kitevő, ami kisebb ennek a számnak a megfelelő kitevőjénél. Vegyük azokat, ahol az 5 kitevője kisebb. Rögzítsünk egy ilyen kitevőt, legyen ez d. Ekkor a $2^a3^b5^d$ alakú megadott számokban a 2^a3^b „részre” igaz, hogy egyik sem osztója a másiknak. Tehát véges sok van belőlük a b) feladat szerint. Mivel d értéke is csak véges sok lehet, így összesen is csak véges sok olyan szám lehet megadva, ahol 5 kitevője kisebb c-nél. A három prím szerepe teljesen szimmetrikus, ezért ugyanez elmondhat 3-ra és 2-re is. Így összesen is csak véges sok szám lehet megadva.

e) Hogyan általánosítható a feladat? Mi köze egymáshoz a II.5. és II.5’ feladatnak?

Olyan számokból, amelyek csak megadott k prímmel oszthatók, bármilyen véges sokat meg lehet adni úgy, hogy egyik se ossza a másikat, de végtelen sokat nem lehet megadni.
Lényegében ugyanaz a két feladat: k prím esetén a k dimenziós tér rácspontjairól van szó, az i-edik prím kitevője a megfelelő rácspont i-edik koordinátája.

f) Megadható-e végtelen sok egész szám, ha a prímszámok számára vonatkozó kikötést teljesen elhagyjuk, csak az oszthatóságra vonatkozó tiltást tartjuk meg?

A megoldás egyszerű: a prímszámok megfelelnek, és belőlük végtelen sok van.

II.6. a) Adjunk meg a síkon 1000 (n) pontot úgy, hogy bármely kettő távolsága egész szám legyen.

b)** Ugyanez a feladat, de semelyik három nem lehet egy egyenesen. (Olimpiai feladat volt.)

A c szám legyen olyan, amelyre a $c^2 = a^2 + b^2$ egyenletnek legalább n különböző megoldása van. Legyen $AB = c$ és a P_i pontokra legyen AP_i és BP_i ennek az egyenletnek egy-egy különböző megoldása. Ekkor a P_i pontok rajta vannak AB Thálész-körén ezért AP_iP_jB húrnégyszög, amelyre igaz a Ptolemaiosz-tétel. Tehát minden P_iP_j szakasz hossza is racionális. A legkisebb közös többszörösükkel bővítve már minden szakasz hossza egész lesz.

c)* Megadható-e végtelen sok pont is a síkon úgy, hogy bármely két pont távolsága egész legyen, és ne mind legyen egy egyenesen?

Nem. Legyen *A, B* és *C* három, nem egy egyenesen levő pont. Ha *P* megadott pont, akkor *AP* – *BP* abszolútértéke *AB*-nél kisebb egész szám, tehát az *A, B* fókuszú hiperbolák közül azok valamelyikén van, amelyekre a távolságkülönbség *AB*-nál kisebb egész, ilyen véges sok van. Ugyanez igaz *B* helyett *C*-re is, tehát minden pont két ilyen hiperbola metszéspontja. Két ilyen hiperbolának csak négy metszéspontja van, tehát összesen is csak véges sok pont lehet megadva.

Megjegyzés: Egyszerűbb – talán már hetedikben is feladható – kérdés, hogy le lehet-e tenni négy pontot a síkra úgy, hogy a köztük fellépő hat távolság 1,2,3,4,5,6 legyen?

Csak úgy, ha egy egyenesen vannak, pl. a számegyenes 0;1;4 és 6 pontjai. És ötöt?

II.7. a) Megadható-e 100 (*n*) halmaz úgy, hogy bármely 99 (*n* – 1) metszete végtelen legyen, de az összes metszete üres legyen? (OKTV első fordulós feladat volt három halmazra.)

b)* Megadható-e végtelen sok halmaz úgy, hogy bármelyiket elhagyva a többi metszete végtelen, de az összes metszete üres?

A_i legyen az olyan egynél nagyobb számok halmaza, amelyek nem oszthatók az *i*-edik prímmel. Az összes metszete üres, hiszen a páros számok A_i-ben nincsenek benne, a hárommal oszthatók A_2-ben, stb. Viszont ha A_i-t elhagyjuk, az *i*-edik prím hatványai az összes többi halmazban benne vannak. (A_i lehetne az összes prímhatványból az *i*-edik prím hatványainak elhagyásával kapott halmaz is.)

II.8. a) Olivér és Xénia a következő játékot játssza a végtelen négyzethálós papíron. Felváltva lépnek. Olivér minden lépésben egy-egy O betűt helyezhet el egy tetszés szerint kiválasztott, még üres négyzetbe, Xénia minden lépésben két X-et helyezhet el egy-egy tetszőlegesen kiválasztott, még üres négyzetbe. Xénia akkor nyer, ha sikerül ezer egymás melletti vízszintes vagy függőleges négyzetbe X-et tennie. Olivér célja ennek megakadályozása. Tud-e nyerni Xénia, ha Olivér okosan játszik? (OKTV feladat volt.)

Xénia jó sok *X*-et helyez el a papíron, jó távol, ezer távolságra egymástól. Olivér ezeknek csak a felét tudja elrontani ez idő alatt. Utána a „szabadon maradtak” mellé egy-egy második X-et helyez Xénia, Olivér ezeknek is csak a felét tudja elrontani. Ha kezdetben 2^n *X*-et tett le Xénia, akkor a *k*-adik ilyen „menet” után 2^{n-k} *k* hosszú, egymás melletti *X*-ekből álló sorozata lesz, amelyet Olivér még nem tudott elrontani. *n* „menet” után egy *n* hosszú *X* sorozata lesz egymás mellett.
Megjegyzés: Ha Olivér mindig *k* darab *O*-t tehet (bárhová), Xénia *k*+1-et, akkor is nyer Xénia. Viszont a következő feladatra már nemleges a válasz:

b) Olivér és Xénia a következő játékot játssza a végtelen négyzethálós papíron. Felváltva lépnek. Olivér minden lépésben egy O betűt helyezhet el egy tetszés szerint kiválasztott, még üres négyzetbe, Xénia minden lépésben három (*k*) X-et helyezhet el egy-egy tetszőlegesen kiválasztott, még üres négyzetbe. Xénia akkor nyer, ha sikerül végtelen sok egymás melletti vízszintes vagy függőleges négyzetbe X-et tennie. Olivér célja ennek megakadályozása. Tud-e nyerni Xénia, ha Olivér okosan játszik?

Minden lépésben még végtelen sok végtelen hosszú, teljesen szabad sor áll Xénia rendelkezésére, mégsem tud nyerni. Ugyanis megszámlálható sok végtelen sorozat lehetséges, ezeket pedig Olivér sorba rendezve egyesével el tudja rontani.

Ebben a gondolatban az a nehéz, hogy nem könnyű megérteni, mikor is van vége a játéknak, mit jelent a végtelen játék, ill. a végtelen algoritmus!

Megjegyzés a végtelen különböző fogalmairól:

Mi a különbség „tetszőlegesen sok”, „végtelen sok” és „végtelen nagy” között? (Lásd a Tigris-feladatot is!)

Itt érdemes lehet feladni, hogy $\sum_1^n \frac{1}{k}$ tetszőlegesen nagy lehet. Mégis (lazán) azt mondjuk, hogy $\sum \frac{1}{k} = \infty$. Miért? Ezt érdemes kicsit „megforgatni”, és „Tigrisnél” visszatérni rá, ott látni fogjuk, miért fontos. De ez megint egy másik végtelen fogalom! Fontos, hogy a fenti „Tigrises” fánál az okozza a bajt, hogy ha magasabbra akarunk jutni, akkor vissza kell mennünk a gyökérhez, és másképp kell elindulni, tehát minden lépésben ki kell javítanunk magunkat. Viszont ha itt az összegnél valameddig eljutottunk, akkor az „már megvan”, azon már nem változtatunk, csak hozzáteszünk. Ezért mondom, hogy a végtelen nagy fogalma minőségi fogalom a végtelen sok fogalmához képest. A végtelen nagyra mintegy "ráütjük az egység pecsétjét", nyugodtabb és "folytonosabb" szemlélet tartozik hozzá.

A korábbi állításból következik, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \log n} \sum_1^n d(i) = 1$.

II.9. Hogyan szól a skatulyaelv véges sok skatulya és végtelen sok golyó esetén?

Ennél a feladatnál is értek meglepetések. Általános volt az a válasz, hogy ha véges sok skatulya és végtelen sok golyó van, akkor valamelyik skatulyában lesz két golyó. Amikor megkérdeztem, hogy többet nem lehetne mondani, akkor is csak addig jutottak, hogy jó, lesz három, sőt lesz négy, vagy öt, vagy akárhány golyó valamelyik skatulyában.

II.10. Véges egyszerű gráfban biztosan van két azonos fokú pont. Igaz-e ez minden végtelen egyszerű gráfra is?

Legegyszerűbb ellenpélda egy fa, a gyökere elsőfokú, a szomszédja másodfokú, ennek két szomszédja harmad, ill. negyedfokú, stb.

Megjegyzés: Volt olyan diákom, aki a téglalapos feladatnál nem igazán értette, hogy végtelen sokat nem tudunk megadni, ha egyszer akármilyen sokat meg tudunk adni. Viszont itt kapásból felrajzolta az egyszerű ellenpéldát. Ez is mutatja, hogy nem kiszámítható, kiben mikor és hogyan érik meg a „végtelen nagy” fogalma!

II.11. a) (Hujter Bálint) Tudunk-e olyat is mutatni, amikor valamit véges sok nem teljesít, de végtelen sok igen?

Persze ez a megfogalmazás nem tud pontos lenni, hiszen például azt, hogy mutassunk végtelen sok (különböző) egész számot, csak végtelen sok egész számmal tudjuk teljesíteni. Ezért érdemes konkrét példát mondani:

b) Van-e olyan szám, amely nem áll elő véges sok kettő (tíz) hatvány (reciprok)összegeként, de előáll végtelen sok kettő (tíz) hatvány (reciprok)összegeként?

Így persze nagyon könnyű: az 1/3 nem írható fel véges bináris (tizedes) törtként.

c) Van-e olyan szám, amely nem írható fel véges sok egész szám reciprokösszegeként, de felírható végtelen sok egész szám reciprokösszegeként?

Bármelyik irracionális szám ilyen, hiszen véges sok egész szám reciprokösszege racionális, viszont bármely irracionális szám felírható pl. tízes számrendszerben.

d) Ezután feladhatjuk, mondjanak további ilyen példákat.

Például: Semelyik irracionális szám nem írható fel véges sok racionális szám összegeként, de felírható végtelen sok racionális szám összegeként (tízes számrendszerben).

A (pozitív) kettőhatványok végtelen halmazára igaz, hogy belőlük vett (véges) sok szám összegeként minden pozitív egész szám felírható. Ez semmilyen véges számhalmazra nem igaz.

e) A (0;1) nyílt intervallum előállítható-e véges sok zárt intervallum uniójaként? És végtelen sok zárt intervallum uniójaként?

Az első kérdésre nemleges a válasz. A véges sok zárt intervallum alsó végpontjai közül a legkisebb legyen a, a felső végpontjai közül a legnagyobb legyen b. Ekkor a > 0, és b < 1, és a zárt intervallumok nem fedik le a (0; a) és a (b, 1) nyílt intervallumokat. A második kérdésre igenlő a válasz: az [1/n; 1 – 1/n] zárt intervallumok uniója a (0;1) nyílt intervallum.

f)** Előáll-e egy nyílt körlemez véges sok kisebb nyílt körlemez uniójaként? És végtelen sok kisebb nyílt körlemez uniójaként?

Véges sok zárt körlemez uniója nem lehet a kör, de végtelen soké lehet. A bizonyítás hasonló az előzőhöz. Legyen a "nagy" kör a C kör, középpontja O. Tegyük fel, hogy a $K_1, K_2,..., K_n$ zárt körlemezek uniójaként előáll C. Legyen a K_i kör középpontja O_i, és a C kör kerületéhez legközelebbi pontja P_i. Ha O_i különbözik O-től, akkor az OP_i sugarú, O középpontú kör lefedi K_i-t, jelölje ezt a kört L_i. Ha $O=O_i$, akkor legyen $K_i= L_i$. A legnagyobb (sugarú) L_i kör lefedi az összes K_i kört, és kisebb a C körnél. Tehát a K_i körök uniója nem adja ki a C kört.
Végtelen sok zárt körlemez uniójaként viszont előáll C. A sugarát 1-nek választva tekintsük az $1 - 1/n$ sugarú, O középpontú köröket minden pozitív egész n-re. Ezek együtt kiadják a C kört.

A fejezet „témájához” tartoznak az alábbi „topológiai” állítások:

Véges sok zárt halmaz uniója zárt. Végtelen sok zárt halmaz uniója nem feltétlenül zárt. Lehet nyílt, félig nyílt, félig zárt, vagy például a racionális számok se nem nyílt, se nem zárt halmaza.
Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt. Végtelen sok nyílt halmaz metszete nem feltétlenül.
A fenti, II.11.e) és f) feladat első részének a megoldása persze egyszerűbb ezek ismeretében. Véges sok zárt halmaz metszete zárt, tehát a véges sok intervallum, illetve körlemez uniója is. Márpedig a nyílt intervallum, illetve körlemez nem zárt.

III. „Véges tulajdonság”

Egy **T** tulajdonságot akkor nevezünk véges tulajdonságnak, ha igaz rá, hogy ha egy (végtelen) struktúra minden véges részére teljesül, akkor az egész struktúrára is teljesül. Tehát ha *minden* tetszőlegesen nagy (véges) részére teljesül, akkor minden végtelen részére is. A nagyon egyszerű példáktól indulva:

III.1. a) Egy végtelen gráf minden véges részgráfjában legfeljebb k független pont van. Igaz-e ez a gráf egészére is?
b) Egy végtelen gráf minden véges részgráfjában legfeljebb k független él van. Igaz-e ez a gráf egészére is?
c) Hogy szól a megfelelő állítás a lefedő élek minimális számáról?

a) és b) nyilván igaz, hiszen ha volna k+1 független pont (él), akkor ezek egy olyan véges részgráfot alkotnának, ahol volna k+1 független pont (él).
c)-ben viszont üres volna a feltétel, hiszen 2n pont lefedéséhez legalább n él szükséges, és n akármilyen nagy lehet.

III.2. Egy végtelen gráf minden véges részgráfja páros gráf (pontjai kiszínezhetők két színnel úgy, hogy azonos színűek között nem fut él). Következik-e ebből, hogy az egész gráf is páros gráf? Vagyis: „véges tulajdonság”-e a „páros gráfnak lenni”?

A megoldáshoz érdemes átismételni azt az algoritmust, amellyel bizonyítjuk, hogy egy gráf pontosan akkor páros, ha nincs benne páratlan kör.
Elég összefüggőekre bizonyítani. – Az összefüggőség definíciója végtelen gráfra sem változik, lásd az I.1. feladat után mondottakat: két pont között futó út csak véges hosszú lehet, a végtelen gráfban is.
Mélységi kereséssel színezünk: a páros emeletek pontjait az egyik színnel, a páratlan emeleteket a másik színnel. – Így érdemes mondani, mert így a végtelenben is ugyanaz az algoritmus: egy csapásra definiáltuk a "teendőit". A keresés is ugyanazért műkodik, amit fentebb mondtunk.

Ha azonos színűek között megy pont a gráfban, akkor ez az él egy páratlan kört zár be. – Ez is igaz marad a végtelen gráfban is.

Ha tehát a gráfban nincs páratlan kör, akkor az algoritmusunk a pontjait jól színezi két színnel. Ha van páratlan kör, akkor az egy véges részgráfban van, tehát van véges részgráf, ami nem páros. (Special thanks to Hujter Bálint.)

III.3. a)** Véges tulajdonság-e a három színnel színezhetőség?

Próbáljuk sorban kiszínezni egy gráf pontjait három színnel, ha tudjuk, hogy bármely véges része kiszínezhető így.
Egy kézenfekvő (rossz) megoldás, ami mindig előkerül: kiszínezzük az első pontot valahogy, aztán az első kettőt, első hármat, első négyet, stb. „jól", azaz úgy, hogy azonos színűek között ne fusson él. Ezt mindig megtehetjük, hiszen bármely véges részgráf jól színezhető három színnel. Ezt végigcsinálva minden pontot kiszíneztünk.
A kontrollkérdésünk az, hogy vajon milyen színű lesz az első pont „a végén"? Egyáltalán, tudjuk-e garantálni, hogy bármelyik pontnak valami egyértelmű színe lesz a végén? Itt tehát tisztázzuk „útközben", hogy egy végtelen algoritmus csak akkor működő algoritmus, ha egyértelmű eredménye van.
A problémát tehát az okozza, hogy esetleg minden lépésben változtatnunk kell egy-egy pont színét, így a „végén" nem tudunk semmit mondani a színéről. Azt kell elérnünk, hogy ha már egy pontot kiszíneztük, többé ne kelljen változtatnunk a színén. Ehhez minden n-re kiválasztunk az első n pontnak egy S_n jó színezését.
Az első pont színe három féle lehet, tehát a végtelen skatulyaelv alapján valamelyik szín végtelen sok S_n-ben fog szerepelni. Az első pont színének ezt választjuk és a továbbiakban csak ezeket a színezéseket tekintjük.
Megnézzük, hogy *ezek közül a színezések közül* a második pont melyik színt kapja végtelen sokban. A második pont színének ezt választjuk, és most már csak azt (a még mindig végtelen sok) színezést tekintjük, ahol az első két pont színe az általunk választott. Ha már az első k pontot kiszíneztük úgy, hogy maradt végtelen sok S_n színezésünk, ahol az első k pont színe az általunk választott, akkor a k+1-edik pont színét úgy választjuk, hogy megnézzük, a maradt végtelen sok színezésből melyik színt kapja végtelen sokszor. Ez lesz a k+1-edik pont színe, és a továbbiakban csak az ennek megfelelő végtelen sok színezéssel dolgozunk tovább. Így minden lépésben eggyel több pontot színezünk, egy kiszínezett pont színe nem változik, és minden lépésben még végtelen sok színezés közül választhatunk, tehát az eljárás folytatható.

Ezt a megoldást érdemes alaposan megbeszélni, mert nem könnyű gondolat, hogy ez miért jó, miben különbözik az előzőtől!
Érdemes lehet azt is tisztázni, hogy mondjuk a hatodik pont színezésére az S_6-nak nem biztos, hogy van „befolyása", mert lehet, hogy rögtön az első pont színezésénél például az S_{10} az első színezés, ami „benn maradt" a jó színezéseink között.
Többen is felvetették, hogy itt (is) megkérdezhetik a diákok, hogy akkor mi lesz a hetedik pont színe. Jogos. A válasz az, hogy ha minden n esetén megmondják nekünk, hogy hogyan kell jól színezni három színnel az első n pontot, akkor ennek alapján mi meg tudjuk mondani, hogy mi lesz a hetedik, vagy bármelyik más pont színe.

b) Véges tulajdonság-e a k színnel színezhetőség?

Nem használtuk, hogy pont három színnel színezünk.

Ezután visszatérhetünk a függőben maradt II.2.b) feladatra (Ramsey tétel): ugyanaz a probléma. Ha pedig azt már ismerik, akkor érdemes ez elé venni, hiszen a megoldás is nagyon hasonló.

Vissza Tigrishez, lásd a II.4. feladatot:

III.4. Egy végtelen fa minden emeletén csak véges sok pont van. Most mi a helyzet Tigrissel? Vajon most sem tud „végtelen magasra” mászni? Azaz most is megakad-e véges lépésben, vagy ha ügyes, most nem akad meg? Gráfelméleti nyelven: van-e végtelen út minden ilyen fában? (König-lemma. KöMaL PVK-feladat volt kissé fura megfogalmazásban: "Tegyük fel, hogy nem hal ki az emberiség. Bizonyítandó, hogy akkor van embereknek olyan "végtelen lánca", ahol a lánc minden tagja utódja a lánc előző tagjának.)

Annyi az ötlet, hogy megmondjuk neki, soha ne menjen arra, amerre már csak véges sok pont van. Az első emeletnek legalább egy pontja fölött még végtelen sok pontnak kell lennie a végtelen skatulyaelv miatt. Ezután ha a Tigris már eljutott egy pontba, amely fölött végtelen fa van még, akkor e pont "utódai" közül is legalább egy fölött végtelen sok pont van a végtelen skatulyaelv miatt, és Tigris arra fog továbbmenni. Így sosem fog kelleni megállnia, vagyis egy végtelen utat talál.

Megjegyzés: Látszólag nagyon egyszerű gondolat, de ebbe is könnyen belezavarodnak a diákok. A nehézséget az okozza, hogy a bizonyítás során mintha felhasználnánk, hogy "ellátunk a végtelen fa végéig". Vagyis ha valamilyen mértékig átlátjuk egyszerre az *egész* fát, akkor látjuk meg benne a végtelen uta(ka)t. Valamennyire lehet ezen segíteni azzal, hogy képzeljük el, hogy minden pontra egy egyes van írva, ha fölötte van végtelen sok pont, és 0 van írva, ha fölötte csak véges sok pont van. És a bizonyítás tkp. annyi, hogy minden egyes feliratú pont utódai között is van egyes feliratú.

III.5.* Adjunk új megoldást a III.2 feladatra a König-lemma segítségével.

Az n-edik emeletre az első n pont által feszített részgráf jó színezéseit tesszük. Ezekből véges sok van, és mindegyiket azzal kötjük össze, amelyiknek folytatása az előző emeletről. A végtelen út mentén az n-edik emeleten az n-edik csúcsot fogjuk színezni az ottani színezés szerint, *és ezen már nem fog kelleni változtatnunk.*
Itt érdemes visszatérni arra, hogy mi a különbség az előbb adott bizonyítás és a mostani között. Az elgondolás ugyanaz, de itt minden n-re marad egy jó S_n színezésünk, tehát itt mindig annak megfelelően színezzük az n-edik pontot.
Felmerül, hogy ez a megoldás látszólag olyan egyszerű, hogy a diákok nem is fogják tudni értékelni, ha előtte nem „szenvedjük végig” a korábban adott bizonyítást. De azt gondolom, hogy az csak látszat, hogy ez a bizonyítás egyszerű. Korántsem egyszerű, sőt nehezen követhető gondolat, hogy a fa pontjai gráfok színezései. Inkább emiatt érdemes mindkét bizonyítást venni.

III.6.** Bizonyítsuk be a lefedési tételt: ha az $I_1, I_2,\ldots, I_n,\ldots$ nyílt intervallumok együtt lefednek egy véges, zárt intervallumot, akkor közülük már véges sok is lefedi.
Megjegyzés: Érdemes König-lemmával, mert a) meglepően egyszerű, b) mutatja, milyen kapcsolat van topológia és gráfelmélet között. Az "egyszerűségnek" persze ára van, nagyon absztrakt maga az alapgondolat: intervallumokat tekintünk a fa pontjainak.

Indirekt bizonyítás. Feltesszük, hogy a lefedő $I_1, I_2,\ldots, I_n,\ldots$ nyílt intervallumok közül semelyik véges sok nem fedi le a teljes Z intervallumot. Ezután definiáljuk a következő végtelen fát:
A fa gyökere az eredeti zárt intervallum, Z. Az I_1 által le nem fedett része egy kisebb zárt, vagy két kisebb diszjunkt zárt részintervallum. Ezek lesznek a fa első emeletén, mindkettőt összekötjük a gyökérrel.
A k-adik emelet pontjai Z-nek azok a (páronként diszjunkt) zárt részintervallumai lesznek, amelyeket az $I_1, I_2,\ldots, I_k$ nyílt intervallumok nem fednek le. Ez véges sok intervallum. tartalmazza. (Mindegyikhez egy ilyen van, lehet, hogy valamelyik megegyezik azzal, amelyik tartalmazza.)
Így egy olyan (végtelen) fát kapunk, amelynek minden emeletén véges sok pont van, tehát alkalmazható a König-lemma: van benne végtelen út. Ez pedig egymásba skatulyázott zárt intervallumokat ad, amelyeknek van közös pontja, és azt egyetlen I_k intervallum sem fedte le. Ha tehát semelyik véges sok intervallum nem fedte le az eredeti Z intervallumot, akkor az összes sem fedi le.

Megjegyzés: Végig használtuk, hogy megszámlálható sok nyílt intervallummal fedtük le a Z intervallumot. Ha általánosan, megszámlálhatónál többre is bizonyítani akarjuk (ha egyenletes folytonosságot akarunk vele bizonyítani, akkor erre is szükségünk van), akkor előbb meg kell gondolni, hogy minden nyílt intervallum felbontható megszámlálható sok racionális végpontú nyílt intervallum uniójára, s így a megszámlálhatónál több nyílt intervallummal való lefedés átalakul racionális végpontú nyílt intervallumokkal való lefedéssé, amelyekből viszont csak megszámlálható sok van. Ez nehéz lépés, ezért fogalmaztam bele a feladatba a megszámlálhatóságot.

III.7. a) Megadható-e száz (*n*) pozitív egész úgy, hogy összességükben relatív prímek legyenek, de közülük bármely 99 (n – 1)-nek legyen egynél nagyobb közös osztója?

Veszünk *n* különböző prímet, és közülük minden lehetséges módon összeszorzunk n – 1-et. Az így kapott *n* szám összességében relatív prím, de ha bármelyiket elhagyjuk, a többinek már van egy közös prímosztója (épp az, amelyik az elhagyott szám tényezői között nem szerepel).

b) Megadható-e végtelen sok pozitív egész úgy, hogy összességükben relatív prímek legyenek, de közülük bármelyiket elhagyva a többinek már legyen egynél nagyobb közös osztója?

Nem. Vegyük az első számot, ennek prímosztói legyenek p_1, p_2, … p_n. Ha az összes számnak nincs egynél nagyobb közös osztója, akkor minden *i*-re van egy szám, amelyik nem osztható p_i-vel. Ezt a (legfeljebb) *n* számot hozzátéve az elsőhöz, kapunk véges sokat, amely már nem relatív prím. Ez a megoldás egyben megoldása a következő feladatnak is:

c)** Megadható-e végtelen sok pozitív egész úgy, hogy bármely véges soknak legyen egynél nagyobb közös osztója, de bármely végtelen sok relatív prím legyen?

Nem. Vegyük az első *n* számot a sorozatból, ezek ln.k.o-ja legyen d_n. A d_1, d_2, … d_n, … végtelen sorozat monoton csökken és pozitív egészekből áll, tehát valahonnan kezdve konstans. Ha ez a konstans 1 volna, akkor találtunk volna véges sok számot, amelyek ln.k.o.-ja 1, ellentmondva a feltételnek. Tehát a konstans egynél nagyobb, de akkor az összes számnak osztója ez a konstans.

Engem meglepett, hogy a b)-nél adott megoldást gondoltam kézenfekvőnek, de az egyik csoportomban azt értetlenség fogadta. Amikor viszont a c)-ben adott megoldást elmondtam, azt rögtön értették. „Miért nem rögtön ezt mondtam?”, kérdezték.

III.7’ a)** Megadható-e végtelen sok halmaz úgy, hogy bármely véges soknak végtelen a metszete, de bármely végtelen soknak véges a metszete?

A_i legyen az *i*-nél nagyobb számok halmaza.

b) (Ismétlés, l. II.7’) Megadható-e végtelen sok halmaz úgy, hogy az összes metszete üres legyen, de bármelyiket elhagyva a metszet már végtelen legyen?

c)** Mi a helyzet, ha azt követeljük meg, hogy bárhogy veszünk ki legalább kettő, de véges sok halmazt, azok metszete ne legyen üres, de véges legyen?

Tegyük fel, hogy az összes metszete üres volna. Tekintsük az első két halmaz metszetét, ennek elemei legyenek a_1, a_2, … a_n. Van olyan A_i halmaz, amelyikben nem szerepel a_i, hiszen az összes metszete üres. De ekkor az első két halmazhoz hozzá véve ezt a (legfeljebb *n* darab) halmazt, kapunk véges sok halmazt, amelyek metszete üres, ellentmondás.

A c) feladatokat így is fogalmazhatjuk: ha végtelen sok egész összességében relatív prím, akkor ezért egy véges részük a „felelős”. Vagy megint másképp: „nem relatív prímnek lenni” véges tulajdonság.
És még egy másik megfogalmazás (Sándor Andrástól): Ha végtelen sok egész összességében relatív prím, akkor van közöttük véges sok, amelynek egész lineáris kombinációjaként előáll az 1.

III.8.** Igaz-e, hogy ha egy végtelen gráf minden véges részgráfjának élei lefoghatók *k* ponttal, akkor a gráf összes éle is lefogható *k* ponttal?

Teljes indukció *k*-ra. k=1-re triv (minden véges részgráf csillag izolált pontokkal, tehát az egész gráf is egy csillag izolált pontokkal). Legyen k >1, *G* a gráf és legyen *x* egy legalább k+1-ed fokú pont. Tekintsük a G – x gráf egy véges *H* részgráfját. $H \cup \{x\}$ élei *k* ponttal lefoghatók. A lefogó pontok között kell szerepelnie *x*-nek (a fokszáma miatt). Tehát *H* élei k-1 ponttal is lefoghatók. Teljes indukció szerint ekkor G – x élei k-1

ponttal lefoghatók. Így *G* élei *k* ponttal lefoghatók.
Maradt az az eset, amikor minden pont foka legfeljebb *k*. A gráfban nem lehet 2*k*-nál több élű út, mert akkor lenne *k*+1 független él. Egy komponens feszítő fája legfeljebb *k* emeletű volna és minden emeleten legfeljebb *k* – 1-szer annyi pont lehetne, mint az előzőn. Ez összesen véges sok pont. Tehát a gráf véges komponensekből áll, másrészt legfeljebb *k* komponensben lehet él. Vagyis a gráfnak véges sok éle van. Vegyük az összes élt feszítő véges részgráfot, és kész.

IV. Vegyes feladatok a „végtelen" fogalmának gyakorlására

IV.1.* Kiválasztunk rácsnégyszögeket úgy, hogy a rácspontok bármely véges sok színnel színezése esetén van egyszínű kiválasztott négyszög. BBH van végtelen sok páronként csúcsdiszjunkt négyszög a kiválasztottak között. (Most volt KöMaL feladatom.)

Első lépésben kiválasztunk egy rácsnégyszöget. Tegyük fel, hogy már *k* páronként csúcsdiszjunktat kiválasztottunk. Színezzük ki ezek 4*k* csúcsát az első 4*k* színnel, a többi csúcsot egy új színnel. Van egyszínű, ez csak az új színből lehet, tehát csúcsdiszjunkt az eddigiekhez. Hozzávesszük a már kiválasztott *k*-hoz.

IV.2. a)* **V** az origóból induló rácsvektorok egy véges részhalmaza. Másrészt kiszínezzük a rácspontok egy részhalmazát pirosra. Akármelyik piros rácspontba toljuk el **V** vektorait, a végpontok több mint fele piros. Következik-e ebből, hogy végtelen sok pontot festettünk pirosra?

Tegyük fel, hogy csak véges sok pontot festettünk pirosra. Válasszunk ki egy irányt, amelyik nem párhuzamos **V** egyik vektorával sem, és húzzuk meg a piros pontok halmazának azt a két támaszegyenesét, amely ezzel az iránnyal párhuzamos, az egyiken a *P*, a másikon a *Q* a piros pont. Indítsuk el **V** vektorait e két pontból. Az egyik pontból indítva pontosan azok fognak „kilógni" a támaszegyenesek sávjából, amelyek a másikból indítva nem lógnak ki. De mind a két pontból a felénél kevesebbnek szabad kilógnia, ami ellentmondás.

b) És ha csak azt tudjuk, hogy legalább a fele piros a végpontoknak?

Nem. **V** legyen az **i** és a **–i** vektor, a két piros pont legyen az origó és az (1|0) pont.