Feladatsor a

Hogyan tanítsuk meg Tigrist a tetszőlegesen nagy és a végtelen nagy közötti különbségre?

c. foglalkozáshoz

Surányi László

Előzetes megjegyzések:

Mielőtt a „tetszőlegesen sok/nagy – végtelen sok/nagy” problémáját kezdenénk tematizálni, érdemes a diákoktól megkérdezni, hogyan képzelik el a végtelent, és hagyni, sőt esetleg bíztatni őket, hogy eresszék szabadon a fantáziájukat, és hogy ne csak mennyiségi végtelenben gondolkodjanak.

A továbbiakban a végtelen mindig megszámlálhatóan végtelent jelent, és „akármilyen/tetszőlegesen nagy” = bármilyen megadott korlátnál nagyobb.

Euklidész *Elemeiben* szerepel a bizonyítás arra a tételre, amit mi így mondunk ki: *Végtelen sok prímszám van*. Csakhogy ez görögül nem így hangzik, mert nincs annak a szónak megfelelője, amit mi „végtelennek” mondunk. Így mondja: *„A prímszámok bármilyen sokaságánál van több prímszám.”* Ez az egyik végtelen-fogalmunk, ezt mi úgy mondjuk: „végtelen sok”. De van még két másik fogalmunk is. A „tetszőlegesen nagy” és a „végtelen nagy”. Aztán persze ezen belül is vannak további különbségek. Mi most e három, és különösen az utóbbi kettő közötti különbséget próbáljuk körüljárni feladatokkal.

1. Mondjunk további példákat arra, hogy valamiből van tetszőlegesen nagy, és fogalmilag értelmetlen, hogy van végtelen nagy belőle. 4k – 1, 6k – 1 alakú prímek, stb. További példák: szomszédos prímek között tetszőlegesen nagy „hézag” lehet. Euklidészi síkon(!): tetszőlegesen nagy területű háromszög van.

2. a) Mutassunk a természetes számoknak olyan szigorúan monoton növő sorozatát, amelyben van akármilyen hosszú számtani sorozat, de nincs végtelen hosszú számtani sorozat.
   (Miért nem jó pl. ez: 1, 2,3, 4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,…)
   b) Van-e olyan is, amelyben a kimaradó számok is ilyen sorozatot alkotnak?
   c) Osszuk a pozitív egészeket *k* páronként diszjunkt részre úgy, hogy mindegyikben legyen tetszőlegesen hosszú számtani sorozat, de egyikben se legyen végtelen hosszú.

<u>A végtelen gráf fogalma.</u>

3. a)* Van-e olyan gráf, amelyben van tetszőlegesen nagy teljes részgráf, de nincs végtelen teljes részgráf?
   b)** Van-e olyan gráf, amelyben ugyanez a komplementer gráfra is igaz?

4. <u>Mint ismeretes, Tigris csak felfelé tud mászni a fán. Van-e olyan fa, amelyen tetszőlegesen magasra fel tud mászni, de végtelen magasra nem? Vagy másképp: valamikor mindenképp meg kell állnia véges lépés után.</u>

5. a) Jó téglalapoknak nevezzük a koordinátarendszer olyan téglalapjait, amelyek két szomszédos oldala a két koordinátatengely, és az origóval szemközti csúcsuk a pozitív síknegyedben van. Adjunk meg száz, ezer, stb. jó téglalapot úgy, hogy egyik se tartalmazza a másikat!
   b)* Megadható-e végtelen sok jó téglalap is úgy, hogy egyik se tartalmazza a másikat?
   c)** Fogalmazzuk meg az a) és b) feladat megfelelőjét térben, és döntsük el, melyik igaz?
   d) Adjunk meg száz, ezer stb. olyan pozitív egészet, amelyeknek csak 2 és 3 a prímosztói, és egyik sem osztója a másiknak! Megadható-e végtelen sok is ugyanilyen feltétellel?
   e) Hogyan általánosítható d)?

   [További ilyen jellegű feladatok:

   +1. a) Adjunk meg a síkon 1000 (*n*) pontot úgy, hogy bármely kettő távolsága egész szám legyen.
      b)** Ugyanez a feladat, de semelyik három nem lehet egy egyenesen. (Olimpiai feladat volt.)
      c)* Megadható-e végtelen sok pont is a síkon úgy, hogy bármely két pont távolsága egész legyen, és ne mind legyen egy egyenesen?
      Megjegyzés: Egyszerűbb – talán már hetedikben is feladható – kérdés, hogy le lehet-e tenni négy pontot a síkra úgy, hogy a köztük fellépő hat távolság 1,2,3,4,5,6 legyen?

+2. a) Olivér és Xénia a következő játékot játssza a végtelen négyzethálós papíron. Felváltva lépnek. Olivér minden lépésben egy-egy O betűt helyezhet el egy tetszés szerint kiválasztott, még üres négyzetbe, Xénia minden lépésben két X-et helyezhet el egy-egy tetszőlegesen kiválasztott, még üres négyzetbe. Xénia akkor nyer, ha sikerül ezer egymás melletti vízszintes vagy függőleges négyzetbe X-et tennie. Olivér célja ennek megakadályozása. Tud-e nyerni Xénia, ha Olivér okosan játszik? (OKTV feladat volt.)
b)* Olivér és Xénia a következő játékot játssza a végtelen négyzethálós papíron. Felváltva lépnek. Olivér minden lépésben egy O betűt helyezhet el egy tetszés szerint kiválasztott, még üres négyzetbe, Xénia minden lépésben három (*k*) X-et helyezhet el egy-egy tetszőlegesen kiválasztott, még üres négyzetbe. Xénia akkor nyer, ha sikerül végtelen sok egymás melletti vízszintes vagy függőleges négyzetbe X-et tennie. Olivér célja ennek megakadályozása. Tud-e nyerni Xénia, ha Olivér okosan játszik?]

6. a) Megadható-e 100 (*n*) halmaz úgy, hogy bármely 99 (*n* – 1) metszete végtelen legyen, de az összes metszete üres legyen? (OKTV első fordulós feladat volt három halmazra.)
b)* Megadható-e végtelen sok halmaz úgy, hogy bármelyiket elhagyva a többi metszete végtelen, de az összes metszete üres?

7. Véges egyszerű gráfban biztosan van két azonos fokú pont. Igaz-e ez minden végtelen egyszerű gráfra is?

<u>Hogyan szól a skatulyaelv véges sok skatulya és végtelen sok golyó esetén?</u>

Egy **T** tulajdonságot akkor nevezünk **véges tulajdonságnak**, ha igaz rá, hogy ha egy (végtelen) struktúra minden véges részére teljesül, akkor az egész struktúrára is teljesül. Tehát ha *minden* tetszőlegesen nagy (véges) részére teljesül, akkor minden végtelen részére is.

8. a) Egy végtelen gráf minden véges részgráfja páros gráf (pontjai kiszínezhetők két színnel úgy, hogy azonos színűek között nem fut él). Következik-e ebből, hogy az egész gráf is páros gráf? Vagyis: „véges tulajdonság”-e a „páros gráfnak lenni”?
b) ** Véges tulajdonság-e a három színnel színezhetőség?

9. <u>Egy végtelen fa minden emeletén csak véges sok pont van. Most mi a helyzet Tigrissel? Vajon most sem tud „végtelen magasra” mászni? Azaz most is megakad-e véges lépésben, vagy ha ügyes, most nem akad meg? Gráfelméleti nyelven: van-e végtelen út minden ilyen fában?</u> (König-lemma. KöMaL PVK-feladat volt kissé fura megfogalmazásban.)

10. Adjunk új megoldást a 8b) feladatra a König-lemma segítségével.

11. ****** Bizonyítsuk be a lefedési tételt: ha egy véges, zárt intervallumot lefedünk végtelen sok nyílt intervallummal, ezek közül már véges sok is lefedi.

12. a) Megadható-e száz (*n*) pozitív egész úgy, hogy összességükben relatív prímek legyenek, de közülük bármely 99 (*n* – 1)-nek legyen egynél nagyobb közös osztója?
b)* Megadható-e végtelen sok pozitív egész úgy, hogy összességükben relatív prímek legyenek, de közülük bármelyiket elhagyva a többinek már legyen egynél nagyobb közös osztója?
c)** Megadható-e végtelen sok pozitív egész úgy, hogy bármely véges soknak legyen egynél nagyobb közös osztója, de bármely végtelen sok relatív prím legyen?

13. <u>** Megadható-e végtelen sok halmaz úgy, hogy bármely véges soknak végtelen a metszete, de bármely végtelen soknak véges a metszete?</u>