FELADATOK
(Összeállította: Dr. Németh József)

(Rátz László Vándorgyűlés 2019)

1. Határozza meg a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

sor összegét!

2. Határozza meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

sor összegét!

3. Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

sor összegét!

4. A következő három feladat az $e^x, \cos x$ és $\sin x$ függvények hatványsorainak ismeretét tételezi fel.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n)!} = ?$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{9^n}{(2n)!} = ?$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n}}{(2n+1)!} = ?$

5. Határozzuk meg az

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$$

sor összegét!

6. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$$

sor? Abszolút konvergens-e?

7. Konvergens-e a
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$$
sor?

8. Konvergens-e a
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$
sor?

9. Konvergens-e a
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha} n}$$
sor, ahol $\alpha > 1$?

10. Konvergens-e a
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
sor? Abszolút konvergens-e?

11. Konvergens-e a
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$$
sor?

12. Konvergens-e a
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$$
sor?

13. Konvergens-e a
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$
sor?

14. Konvergens-e a
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$$
sor?

15. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$$

sor?

16.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2} = ?$$

17. Konvergens-e az

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n}\right)^2$.

18. Bizonyítsa be, hogy ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ is konvergens!

19. Mekkora az összege a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^{n+1}} \cos \frac{3}{2^{n+1}}$$

sornak?

20. Konvergens-e a következő sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) \qquad (a > 1)$$

21. Legyen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ két pozitív tagú sor, amelynek tagjaira fennáll, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \text{ha} \quad n \geq n_0.$$

Bizonyítsa be, hogy ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens!

22. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n \cdot n!}$$

sor?

23. Adjon példát olyan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú konvergens sorra, amelyre $n \cdot a_n \to 0$ nem áll fenn!

24. Konvergens-e a
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos n)^n$$
sor?

25. Konvergens-e a
$$\sum_{n=1}^{\infty} -\ln \cos \frac{1}{n}$$
sor?

26.

a) Van-e olyan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens sor, amelyre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ divergens?

b) Adjon meg olyan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sort, amely konvergens, de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ divergens.

27. Tegyük fel, hogy a pozitív tagú $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens, és jelölje S_n a sor részletösszeg-sorozatát, azaz $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Bizonyítsa be, hogy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$$
divergens!

28. Bizonyítsa be, hogy minden pozitív tagú divergens $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sorhoz van olyan $\{c_n\}$ monoton csökkenve 0-hoz tartó sorozat, amelyre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot c_n$ divergens!

29. Az α paraméter mely értékeire konvergens a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \cdot \sin \frac{1}{n}\right)^{\alpha}$$
sor?

30. Bizonyítsuk be, hogy

a) a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$ sor divergens;

b) a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^2$ sor konvergens!

31. Vizsgálja a következő sort feltételes és abszolút konvergencia szempontjából!

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right].$$

32. Legyen $\{a_n\}$ egy nem-negatív, monoton csökkenő számsorozat. Bizonyítsuk be, hogy ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$. Mutassa meg, hogy ez az utóbbi feltétel nem elegendő a sor konvergenciájához!

33. Konvergens-e a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n) \ln \ln n}$$

sor?

34. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10 \sin n}$$

sor?

35. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$$

sor?

36. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$$

sor?

37. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3}$$

sor?

38. Legyen a nem-negatív tagú $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$$

sor szintén konvergens! Mutassuk meg, hogy fordítva nem igaz, de ha a_n monoton csökkenő, akkor a fordított állítás is igaz.

39. Következik-e a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ határértékből, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok egyidejűleg konvergensek vagy divergensek?

40. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sorban az első tagtól kezdve felváltva p db "+", majd "q" db "−" előjellel vesszük a tagokat. Mutassuk meg, hogy ha $p = q$, akkor a sor konvergens. Adjon példát arra, hogy ha $p \neq q$, akkor divergens a sor!

FELADATOK MEGOLDÁSOKKAL

Rátz László Vándorgyűlés 2019
Gödöllő

Összeállította: Németh József (SZTE TTIK Analízis Tanszék)

I. *Határozza meg a*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

sor összegét!

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \ln \frac{n^2 - 1}{n^2} = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n = \\
&= [\ln(n+1) - \ln n] - [\ln n - \ln(n-1)], \qquad \text{így} \\
s_n &= (\underline{\ln 3 - \ln 2}) - (\ln 2 - \ln 1) + (\underline{\ln 4 - \ln 3}) - (\underline{\ln 3 - \ln 2}) + \\
&+ \cdots [\ln(n+1) - \ln n] - [\underline{\ln n - \ln n - 1}] = \\
&= [\ln(n+1) - \ln n] - [\ln 2 - \ln 1] = \ln \frac{n+1}{n} - \ln 2 = \\
&\to \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 2 \to -\ln 2,
\end{aligned}$$

azaz a sor összege $-\ln 2$.

II. *Határozza meg a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

sor összegét!

Megoldás. Bontsuk elemi törtek összegére a törtet:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2},$$

amiből az adódik, hogy $A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{1}{2}$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} = \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right],
\end{aligned}$$

így

$$
\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]+\cdots \\
&+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]= \\
&=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\to\frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

tehát az összeg: $\dfrac{1}{4}$.

III. *Határozzuk meg a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$$

sor összegét!

1. Megoldás. Először azt látjuk be, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}=2$.

$$s_k=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}.$$

Szorozzunk be $\dfrac{1}{2}$-del:

$$\frac{s_k}{2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\cdots+\frac{k}{2^{k+1}}.$$

Kivonva egymásból a két egyenlőséget:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}s_k &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}-\frac{k}{2^{k+1}}= \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{(1/2)^k-1}{1/2-1}-\frac{k}{2^{k+1}}\to 1, \quad \text{ha} \quad k\to\infty, \qquad \text{hiszen}
\end{aligned}
$$

$$\frac{k}{2^{k+1}}<\left(\frac{\sqrt[k]{k}}{2}\right)^k<\left(\frac{3}{4}\right)^k\to 0 \quad (\text{felhasználtuk } \sqrt[k]{k}\to 1).$$

Tehát $s_k\to 2$, azaz a sor összege: 2.
Most nézzük a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$$

sort.
Mivel $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1+3}{2^2}+\frac{1+3+5}{2^3}+\frac{1+3+5+7}{2^4}+\cdots+\frac{1+3+\cdots(2n-1)}{2^n}+\cdots$$

Bontsuk fel ezt a sort a következő módon:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right)=1 \qquad \text{(geometriai sor)}\\
+3&\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right)=3\cdot\frac{1}{2}\\
+5&\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right)=5\cdot\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

A jobb oldalon levő elemekből álló sor:

$$1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{9}{16}+\cdots+\frac{2n+1}{2^n}+\cdots.$$

Ez a sor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ és $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ sorok tagonkénti összeadásával keletkezik, így az eredeti sor összege e két sor összegének az összege, azaz 2 (az $\frac{1}{2}$ kvóciensű geometriai sor összege) és 4 a bizonyítás elején vizsgált sor összege), azaz 6.

2. Megoldás. Tekintsük az

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

hatványsort; $|x|<1$.
Differenciálással:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \quad \text{a} \quad (-1,1)\text{-n.}$$

Innen x-szel való beszorzással:

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n.$$

Deriváljunk ismét:

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^{n-1},$$

szorozzunk ismét x-szel:

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n,$$

véve $x = \frac{1}{2}$-et, adódik, hogy

$$\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \Rightarrow$$

$$6 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n},$$

azaz a sor összege: 6.

IV. *A következő három feladat az $e^x, \cos x$ és $\sin x$ függvények hatványsorainak ismeretét tételezi fel.*

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{4^n}{(2n)!} = ?$

Megoldás. Mivel

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{és} \qquad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!},$$

ezért

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

így a sor összege: $\dfrac{e^2 + e^{-2}}{2}$.

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{9^n}{(2n)!} = ?$

Megoldás. Mivel

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

ezért a sor összege: $\cos 3$.

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3^{2n}}{(2n+1)!} = ?$

Megoldás. Mivel

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

ezért a sort átalakítva a következő módon:

$$\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

adódik, hogy összege: $\frac{1}{3} \sin 3$.

V. *Határozzuk meg az*

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

sor összegét!

Megoldás. Induljunk ki az alábbi hatványsorból:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots x^n + \cdots; \quad |x| < 1.$$

Innen

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots; \quad |x| < 1.$$

Szorozzunk be $(1+x)$-szel

$$\frac{1+x}{1+x^2} = 1 + x - x^2 - x^3 + x^4 + x^5 - x^6 - x^7 + \cdots; \quad |x| < 1,$$

majd integráljuk mindkét oldalt:

$$\int \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Így kapjuk, hogy

$$\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} - \cdots.$$

Az $x = 0$-s helyettesítéssel adódik, hogy $c = 0$. Így azt kapjuk, hogy $|x| < 1$ esetén az

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \cdots$$

A jobb oldali hatványsor az $x = 1$ helyen az

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \cdots$$

sort adja, amely konvergens (ezt hasonlóan láthatjuk be, mint a változó előjelű sorok esetében a Leibniz-kritériumot$^{(*)}$).
Ebből viszont Abel tétele$^{(**)}$ értelmében az adódik, hogy a sor összegfüggvénye folytonos az egész $[0;1]$-en, azaz: $f(1) = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\cdots$, hiszen $[0;1)$-en $f(x)$ folytonos, így a végpontban ahhoz, hogy $[0;1]$-en is folytonos legyen az összegfüggvény, csak a hatványsor $x = 1$-ben felvett értékét veheti fel.
Tehát

$$\operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{2}\ln 2 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \cdots,$$

azaz a kérdéses sor összege: $\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}$.

Megjegyzések:

1. $(*)$ **Leibniz-kritérium:** *Legyen* $a_n \geq 0$ *és* $a_n \downarrow 0$*, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *sor konvergens.*

2. $(**)$ **Abel tétele:** *Legyen a* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *hatványsor konvergencia-sugara* $R > 0$*. Ha a* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$ *sor konvergens, akkor a hatványsor összegfüggvénye a* $[0;R]$*-en folytonos.*

VI. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$$

sor? Abszolút konvergens-e?

Megoldás. Mivel

$$\frac{2n+3}{n^2+3n+2} = \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2},$$

így $\frac{2n+3}{n^2+3n+2} \downarrow$ és 0-hoz tart, így a váltakozó előjelű sorokra vonatkozó Leibniz-tétel (ld. V. feladatban) miatt az adódik, hogy konvergens.
Az abszolút konvergenciához alkalmazzuk a következő becslést:

$$\left|(-1)^n \frac{2n+3}{n^2+3n+2}\right| \geq \frac{2n}{n^2+3n^2+2n^2} = \frac{2n}{6n^2} = \frac{1}{3n},$$

és mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens (a harmonikus sor), így pozitív tagú sorokra vonatkozó minoráns kritérium miatt a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ sor is divergens, tehát a sor nem abszolút konvergens.

VII. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$$

sor?

Megoldás. Mivel

$$\sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^3}} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to \frac{1}{e} < 1,$$

ezért a sor a gyökkritérium$^{(*)}$ miatt konvergens.

Megjegyzések:

1. Ha a gyökkritériumot mellőzni akarjuk, akkor így is befejezhetjük: az

$$\sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^3}} \to \frac{1}{e} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n}, \text{ ha } n \geq n_0,$$

azaz

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n},$$

azaz a majoráns kritérium miatt konvergens a sor, hiszen majorálja az $\frac{1}{2}$ kvóciensű geometriai sor.

2. Gyökkritérium.

(∗) *Ha $a_n \geq 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, $\ell > 1$ esetén divergens a sor, míg $\ell = 1$ esetén nem dönthető el ezzel a módszerrel a kérdés.*

VIII. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

sor?

Megoldás. Alkalmazzuk a hányadoskritériumot$^{(*)}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}=\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\frac{[(n+1)!]^2}{(n!)^2}=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\to\frac{1}{4}<1,$$

tehát a sor konvergens.

Megjegyzések:

1. Itt is elkerülhető a hányadoskritériumra való hivatkozás, ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\frac{1}{4}\text{-ből arra következtetünk, hogy}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1}{2}\quad (n>n_0 \text{ esetén})\Rightarrow$$

$$a_{n+1}<\frac{1}{2}a_n,\quad \text{ha}\quad n\geq n_0\Rightarrow$$

$$a_{n_0+k}\leq a_{n_0}\left(\frac{1}{2}\right)^k\qquad \forall\, k\text{-ra},$$

és így a sort ismét egy $\frac{1}{2}$ kvóciensű geometriai sor majorálja, amiből a konvergencia adódik.

2. $(*)$: **Hányadoskritérium**. *Legyen* $a_n>0$ *és* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell<1$, *akkor a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *sor konvergens. Ha* $\ell>1$, *akkor divergens,* $\ell=1$ *esetén nem dönthető el ezzel a tétellel a kérdés.*

IX. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}$$

sor, ahol $\alpha>1$*?*

1. Megoldás. Alkalmazzuk a Cauchy-féle ekvikonvergencia-tételt$^{(*)}$, mely szerint elég venni a

$$\sum_{m=1}^{\infty}2^m\frac{1}{2^m\ln^{\alpha}2^m}=(\log_2 e)^{\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\alpha}}$$

sort, ami konvergens $\alpha > 1$ miatt; ezt is lássuk be ugyanígy, véve a

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\alpha-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$$

sort, ami egy egynél kisebb kvóciensű geometriai sor, ami konvergens.

2. Megoldás. Alkalmazzuk az integrálkritériumot$^{(**)}$.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_2^{\omega} \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx = \lim_{\omega\to\infty} \left[\frac{\ln^{1-\alpha} x}{1-\alpha}\right]_2^{\omega} =$$
$$= \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} [\ln^{1-\alpha} x]_2^{\omega} = \frac{1}{\alpha-1} \ln^{1-\alpha} 2,$$

hiszen $\lim\limits_{\omega\to\infty} \ln^{1-\alpha} \omega = 0$.
Ami azt jelenti, hogy az improprius integrál létezik, tehát a sor konvergens.

Megjegzések:

1. $(*)$: A **Cauchy-féle ekvikonvergencia-tétel** így szól: *Ha az $a_n \geq 0$ és $a_n \downarrow$, akkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{és a} \quad \sum_{m=1}^{\infty} 2^m a_{2^m}$$

sorok vagy mindketten konvergensek, vagy mindketten divergensek.

2. $(**)$: **Integrálkritérium.** *Legyen $f(x) \downarrow, f(x) \geq 0$ az $[1;\infty)$-intervallum és $\forall\, n$-re $f(n) = a_n$. Ekkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens $\Leftrightarrow$ $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ improprius integrál létezik és véges.*

3. Könnyen láthatjuk, hogy az eredeti sor $\alpha \leq 1$ esetén divergens.

X. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

sor? Abszolút konvergens-e?

Megoldás. Mivel $1 - \cos\dfrac{1}{\sqrt{n}} \downarrow 0$, ezért a Leibniz-kritérium (ld. V. feladat) miatt a sor konvergens.

Az abszolút konvergenciát nézve az alábbi átalakítást végezzük el:

$$1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\sin^2\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{\dfrac{\sin^2\frac{1}{\sqrt{n}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}}{1+\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}\geq\frac{1}{4n},\qquad \text{ha } n\geq n_0,$$

hiszen

$$\frac{\sin^2\frac{1}{\sqrt{n}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}\to 1 \text{ (ha } n\to\infty),$$

így $\geq \frac{1}{2}$, és $1+\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 2$.
Így azonban

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\geq\frac{1}{4}\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n},$$

ami a harmonikus sor divergenciája és a minoráns kritérium miatt azt jelenti, hogy a sor nem abszolút konvergens.

XI. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$$

sor?

Megoldás. Próbáljuk az általános tagot összehasonlítani a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergens sor általános tagjával, azaz vegyük a kérdéses

$$\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}\overset{?}{\leq}\frac{1}{n^2}$$

becslést. Nyilván

$$\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}\leq\frac{1}{n^2}\Leftrightarrow n^2<3^{\sqrt{n}}\Leftrightarrow t^4\leq 3^t\qquad (t=\sqrt{n}).$$

Mivel

$$(*) \qquad \frac{t^4}{3^t} \to 0, \qquad \text{ha} \qquad t \to \infty,$$

így $\dfrac{t^4}{3^t} \le 1$, ha $t \ge t_0$, azaz $t^4 \le 3^t$, ami azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{3^{\sqrt{n}}} \le \frac{1}{n^2}, \quad \text{ha} \quad n \ge n_0,$$

azaz

$$\sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}} \le \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

ami a majoráns kritérium miatt az eredeti sor konvergenciáját adja.

Megjegzések:

1. $(*)$: a L'Hopital szabály értelmében

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^4}{3^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{4t^3}{3^t \ln 3} = \lim_{\infty} \frac{12t^2}{3^t \ln^2 3} =$$
$$= \lim_{\infty} \frac{24t}{3^t \ln^3 3} = \lim_{\infty} \frac{24}{3^t \ln^4 3} = 0, \qquad \text{mivel } 3^t \to \infty.$$

2. A **L'Hopital szabály** következőképpen szól: *Ha*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \qquad (\textit{vagy mindkettő} 0)$$

és

$$\exists \lim_{\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

akkor

$$\exists \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3. A feladatot megoldhatjuk az integrálkritériummal is (ld. IX. feladat). Ekkor a $3^{-\sqrt{x}}$ függvényt kell integrálni.

XII. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$$

sor?

1. Megoldás. Mivel

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots, \qquad |x| < 1,$$

ezért mindkét oldalt integrálva az adódik, hogy

$$(*) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \qquad |x| < 1.$$

Mivel az eredeti sort úgy szeretnénk majorálni, hogy

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

helyett kisebbet vonjunk ki, ezért $\ln(1+x)$-et alulról szeretnénk becsülni ($x > 0$-ra). A $(*)$ előállításból úgy látszik, hogy

$$(**) \qquad \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} \quad (0 < x < 1 \text{ esetén}),$$

hiszen a következő tag a pozitív $\frac{x^3}{3}$. De be is tudjuk látni, hogy

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0, \quad \text{ha} \quad x > 0.$$

Legyen $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$; nyilván $f(0) = 0$, így ha $f'(x) > 0$, (ha $0 < x$), akkor $f(x) \uparrow \Rightarrow f(x) > 0$ lesz $x > 0$-ra (mivel $f(0) = 0$ volt). Viszont $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} \geq 1 - x \Leftrightarrow 1 \geq 1 - x^2$, ami fennáll.
Tehát $(**)$ valóban fennáll, ami azt jelenti, hogy az eredeti sorra fennáll, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \overset{(x=\frac{1}{n}\text{-et véve})}{\leq}$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right)\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

ami a majoráns kritérium miatt azt jelenti, hogy a sor konvergens (mivel a majoráló sor konvergens).

2. Megoldás. Mivel $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \downarrow e$, így

$$0<\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<$$
$$<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)},$$

azaz sorunkat a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ konvergens sor majorálja, azaz a sor konvergens.

XIII. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

sor?

Megoldás. Mivel $(\ln n)^{\ln n}=e^{\ln(\ln n)^{\ln n}}=e^{\ln n(\ln\ln n)}=n^{\ln\ln n}\geq n^2$, ha $n\geq n_0$, ezért a

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}\leq\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

azaz egy konvergens sor majorálja sorunkat, tehát az is konvergens.

XIV. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$$

sor?

1. Megoldás. Ismeretes, hogy $0<\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\leq \operatorname{tg}\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}$, tehát elég belátni a

$$(*)\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$$

konvergenciáját (ld. majoráns kritérium).

Mivel $\operatorname{tg}\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} = \sin\frac{1}{n} \cdot \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}}$, és ugyanakkor $\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1$ és $\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \to \frac{1}{2}$, így $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} \to \frac{1}{2}$, azaz ha $n > n_0$, akkor $0 < \operatorname{tg}\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} < \frac{1}{n^3}$, amiből a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ sor konvergenciáját figyelembe véve adódik, hogy a $(*)$-gal jelölt sorunk is konvergens.

2. Megoldás. Mivel $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ ($\forall x \in \mathbb{R}$ esetén érvényes), ezért azt sejtjük, hogy $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ (ha $x \geq 0$), de ezt a XII. feladat 1. Megoldásánál látott függvénydiszkussziós ötlettel itt is be tudjuk látni.
Ekkor azonban azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3 \cdot 6}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^3},$$

így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

ami adja a konvergencát (majoráns kritérium).

Megjegyezzük, hogy a $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!}$ $(x \geq 0)$ egyenlőtlenség bizonyításánál itt két lépésben tudjuk megoldani a feladatot.
Ugyanis be kell látni, hogy

$$(**) \qquad f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0; \quad f(0) = 0.$$

Nézzük a deriváltakat:

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}; \quad f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -\sin x + x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sin x,$$

ami fennáll, így $\Rightarrow f'(x) \uparrow\Rightarrow f'(x) > 0$ (mivel $f'(0) = 0$) $\Rightarrow f(x) \uparrow\Rightarrow f(x) \geq 0$ (mivel $f(0) = 0$), tehát $(**)$ fennáll.

XV. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$$

sor?

Megoldás. Próbálkozzunk a gyökkritériummal (ld. a VII. feladatot).

$$\sqrt[n]{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{e} \to 1,$$

azaz ebből nem vonhatunk le konklúziót a konvergenciára vonatkozóan.
Nézzünk egy elemi megoldást (ld. XII. feladat 2. Megoldásánál levő trükköt).
Mivel $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \downarrow e$, így $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq e$, amiből:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} \geq \left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\right]^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \to \frac{1}{e},$$

azaz a sor általános tagja $\geq \frac{1}{e}$, azaz nem tart 0-hoz, pedig ez a konvergencia szükséges feltétele, tehát a sor divergens.

XVI.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2} = ?$$

Megoldás. Mivel

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$$

(ez a $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ összefüggésből levezethető), ezért könnyen kiszámítható, hogy

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{n-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} = \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2},$$

$\left(x = \dfrac{1}{n-1}\right.$ és $y = \dfrac{1}{n+1}$ választással), amiből

$$s_n = \frac{\pi}{2} - \underline{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} + \operatorname{arctg}\frac{1}{1} - \underline{\operatorname{arctg}\frac{1}{3}} + \underline{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} - \underline{\operatorname{arctg}\frac{1}{4}} + \cdots$$
$$\cdots + \operatorname{arctg}\frac{2}{n^2} \to \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 1 = \frac{3}{4}\pi.$$

Tehát a sor összege $\dfrac{3}{4}\pi$.

Megjegyzés.

Az $\operatorname{arctg} \left.\dfrac{1}{n-1}\right|_{n=1} = \dfrac{\pi}{2}$ adja az első tagban a $\dfrac{\pi}{2}$-et $\left(\operatorname{arctg}\infty = \dfrac{\pi}{2}\right)$.

XVII. *Konvergens-e az*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^2$.

1. Megoldás. Mivel $x \geq \sin x$, így $\arcsin n \geq n$, tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

így a harmonikus sor divergenciája és a minoráns kritérium adja, hogy a sor divergens.

2. Megoldás. Mivel a $[0;1]$-en konvex $y = \arcsin x$ görbe pontjaira $\arcsin x \leq \dfrac{\pi}{2}x$, ahol az $y = \dfrac{\pi}{2}x$ a görbe húrja, ami az origón és az $\left(1; \dfrac{\pi}{2}\right)$ pontokon halad át, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ konvergenciájából a majoráns kritériummal adódik, hogy az eredeti sor konvergens.

XVIII. *Bizonyítsa be, hogy ha a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *konvergens, akkor* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ *is konvergens!*

Megoldás. Ismert, hogy ha $(x_1, \ldots, x_n)$ és $(y_1, \ldots, y_n)$ két szám n-es, akkor érvényes az ú.n. Cauchy-féle

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right)^2$$

egyenlőtlenség.

Most legyen $x_i = |a_i|,\ y_i = \dfrac{1}{i}$, akkor

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{a_i}{i}\right|\right)^2,$$

amiből adódik, hogy a $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{|a_i|}{i} = s_n$ részletösszegsorozat korlátos (mivel $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2$ és $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i^2}$ sorok konvergensek, így részletösszegeik korlátosak), és nyilván növő, amiből a konvergencia adódik, tehát $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n|}{n}$ konvergens, azaz a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ sorra még az *abszolút konvergencia* is adódott.

XIX. *Mekkora az összege a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^{n+1}} \cos\frac{3}{2^{n+1}}$$

sornak?

Megoldás. Mivel

$$\sin\alpha\cos 3\alpha = \frac{1}{2}(\sin 4\alpha - \sin 2\alpha),$$

ezért

$$\sin\frac{1}{2^{n+1}} \cos\frac{3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{1}{2^{n-1}} - \sin\frac{1}{2^n}\right],$$

és így

$$s^n = \frac{1}{2}\left[\sin 1 \underline{- \sin\frac{1}{2}} + \underline{\sin\frac{1}{2}} \underline{- \sin\frac{1}{2^2}} + \cdots + \underline{\sin\frac{1}{2^{n-1}}} - \sin\frac{1}{2^n}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin 1 - \sin\frac{1}{2^n}\right) \to \frac{1}{2}\sin 1.$$

Így a sor összege: $\dfrac{1}{2}\sin 1$.

XX. *Konvergens-e a következő sor?*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1) \qquad (a>1)$$

Megoldás. Mivel

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a>1),$$

így

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^0}{x-0} = a^0\cdot\ln a = \ln a,$$

amiből következik, hogy

$$\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}} > \frac{\ln a}{2}, \quad \text{ha} \quad n>n_0,$$

azaz

$$\sqrt[n]{a}-1 > \frac{\ln a}{2}\cdot\frac{1}{n},$$

és ebből

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1) > \frac{\ln a}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

és a minoráns kritérium és a harmonikus sor divergenciája adja, hogy eredeti sorunk divergens.

XXI. *Legyen* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *és* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *két pozitív tagú sor, amelynek tagjaira fennáll, hogy*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \textit{ha} \quad n\ge n_0.$$

Bizonyítsa be, hogy ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergens, akkor* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *is konvergens!*

Megoldás. Vezessük be az alábbi jelölést:

$$c_n = \frac{a_n}{b_n},$$

így

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \frac{a_n}{b_n} = c_n, \quad \text{ha} \quad n\ge n_0.$$

Tehát $c_n \downarrow$, ha $n \geq n_0$. De akkor c_n korlátos is, azaz $\exists\, c > 0$ úgy, hogy $0 < c_n < c$, ha $n \in \mathbb{N}$. De akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot b_n < c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

amiből következik, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergenciája maga után vonja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergenciáját (majoráns kritérium), amit éppen bizonyítani akartunk.

XXII. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n \cdot n!}$$

sor?

Megoldás. Legyen

$$a_n = \frac{n^n}{e^n \cdot n!},$$

azaz sorunk általános tagja. Ekkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{e^n \cdot n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{e^n \cdot n!}{n^n} =$$

$$= \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{e} \overset{(*)}{>} \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n}{n+1} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}.$$

A XXI. feladat eredményét használva az adódik, hogy ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens lenne, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$-nek is konvergensnek kellene lenni, ugyanis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}$$

fennáll. Azaz a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens, ami éppen az eredeti sor, tehát $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{e^n \cdot n!}$ divergens.

Megjegzés.

A $(*)$ lépésnél azt használtuk fel, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \downarrow e.$$

XXIII. *Adjon példát olyan* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *pozitív tagú konvergens sorra, amelyre* $n \cdot a_n \to 0$ *nem áll fenn!*

Megoldás. Legyen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ az a sor, amelyre

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{ha} \quad n = k^2 \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor felbontható két részsor összegére a következőképpen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{\substack{n=1 \\ n=k^2}}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq k^2}}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

és mivel mindkettő abszolút konvergens (hiszen az első a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ sor, a másik pedig a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ sor egy részsora), ezért $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.
Az nyilvánvaló, hogy $n \cdot a_n \not\to 0$, hiszen ha $n = k^2$, akkor $n \cdot a_n = 1$, azaz $n \cdot a_n$-nek van egy 1-hez tart részsorozata.

XXIV. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos n)^n$$

sor?

Megoldás. Használjuk azt a tételt (*a megoldás végén leírjuk ennek a bizonyítását is!*), hogy $\forall\alpha$ irracionális számhoz $\exists \dfrac{p_n}{q_n}$ racionális sorozat úgy, hogy

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Így $\exists \frac{p_n}{q_n}$, amelyre

$$\left|\pi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2} \Leftrightarrow |\pi\, q_n - p_n| < \frac{1}{q_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\cos p_n| = |\cos(p_n - \pi\, q_n)| > \cos\frac{1}{q_n} = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2q_n} >$$

$$> 1 - \frac{1}{2q_n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\cos p_n|^{p_n} > \left(1 - \frac{1}{2q_n^2}\right)^{p_n} \overset{(*)}{>} 1 - \frac{p_n}{q_n} \cdot \frac{1}{2q_n} > \frac{1}{2}, \text{ ha } n > n_0,$$

azaz $(\cos n)^n \not\to 0$, így a sor divergens.

Megjegyzés.

A $(*)$ lépésben az $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha\, x$ (ha $x > -1$ és $\alpha \geq 1$) ú.n. Bernoulli-egyenlőtlenséget használtuk.

Most belátjuk a következő tételt: *Ha α irracionális szám, akkor* $\exists \frac{p_n}{q_n}$ $(p_n, q_n \in \mathbb{Z})$, *úgy hogy* $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$ *teljesüljön.*

Bizonyítás. Legyen n fix, $n \in \mathbb{N}$ és tekintsük a következő $(n+1)$ db valós számot a $[0,1)$ intervallumból:

$$(*) \qquad 0,\ \alpha - [\alpha],\ 2\alpha - [2\alpha], \ldots,\ n\alpha - [n\alpha].$$

Mivel

$$(**) \qquad \left[\frac{j}{n}; \frac{j+1}{n}\right),\ j = 0, 1, \ldots, n-1 \text{ (n db intervallum) lefedi a } [0,1) - \text{et},$$

ezért kell lenni legalább két olyan pontnak (a *skatulyaelv* miatt) a $(*)$ pontok közül pl. $n_1\alpha - [n_1\alpha]$ és $n_2\,\alpha - [n_2\alpha]$ $(0 \leq n_1 < n_2 \leq n)$, amelyek egy intervallumba esnek a $(**)$ intervallumok közül.

Így

$$|n_2\alpha - [n_2\alpha] - [n_1\alpha - [n_1\alpha])| < \frac{1}{n},$$

azaz

$$\left|\underbrace{(n_2 - n_1)}_{q_n}\alpha - (\underbrace{[n_2\alpha] - [n_1\alpha]}_{p_n})\right| < \frac{1}{n},$$

azaz

$$|\alpha q_n - p_n| < \frac{1}{n} < \frac{1}{q_n} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Úgy kapunk újabb $\frac{p_n^*}{q_n^*}$ tagot, ha olyan n^*-ot veszünk, amelyre az előbbi $|q_n\alpha - p_n| > \frac{1}{n^*}$ és $|\alpha q_n^* - p_n^*| < \frac{1}{n^*}$ lesz; így tehát egy végtelen sorozat adódik.

XXV. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\ln\cos\frac{1}{n}$$

sor?

1. Megoldás.

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\ln\cdot\cos\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{\cos\frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{n}}} \overset{(*)}{\leq}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\sqrt{\frac{n^2}{n^2-1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right) \overset{(**)}{\leq}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$, ami konvergens, tehát a majoránskritérium miatt eredeti sorunk is konvergens.

Megjegyzés.
A $(*)$ lépésben a $\sin x \leq x$ $(x \geq 0)$ becslést használtuk.
A $(**)$-nál pedig azt használtuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0} = [\ln(1+x)]|_0' = \frac{1}{1+x}|_0 = 1 \Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} < 2,$$

ha x elég kicsi pozitív szám, azaz $\ln(1+x) < 2x$, ha $0 \leq x \leq x_0$.
Egyébként $\ln(1+x) < x$ is belátható a $\ln(1+x)$ hatványsorából – mint ahogy azt elég sok korábbi feladatnál már használtuk is.

2. Megoldás. Mivel

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \qquad \text{(hatványsor)},$$

integrálva

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

azaz $\ln(1+t) \approx t$, ha t nagyon kicsi, másrészt

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad \text{(hatványsor)},$$

amiből $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2!}$, ha x kicsi.
Így

$$\ln(\cos x) \approx \ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \approx -\frac{x^2}{2},$$

ha x kicsi. Ebből azt sejtjük, hogy

$$\frac{\ln(\cos x)}{\dfrac{x^2}{2}} \approx -1,$$

azaz, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\ln(\cos x)}{\dfrac{x^2}{2}} = 1.$$

Ezt a L'Hopital-szabállyal (ld. XI. feladat) így láthatjuk be:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\ln(\cos x)}{\dfrac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{\sin x}{x}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{1}{\cos x}} = 1.$$

Azaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{2n^2}} = 1,$$

amiből az adódik, hogy

$$\frac{-\ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{2n^2}} < 2 \Leftrightarrow -\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} -\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

azaz sorunk konvergens a majoráns kritérium miatt.

XXVI.

a) *Van-e olyan* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergens sor, amelyre* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *divergens?*

b) *Adjon meg olyan* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sort, amely konvergens, de* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ *divergens.*

Megoldás. a) Nyilván olyan váltakozó előjelű sort kell megadni, amelynek a négyzete divergens. Pl.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergens (Leibniz-kritérium; ld. V. feladat) és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens (harmonikus sor).

b) Tekintsük a következő sort (részletesen kiírva jónéhány tagot):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{3}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{3}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{n\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} + \cdots \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}}_{n \text{ db}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \cdots .$$

Nyilván $s_m \to 0$ $(m \to \infty)$ (az egyes "blokkok" legfeljebb $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$-ig nőnek fel, majd lenullázza az összeget a $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$-es tag.)
Tehát ez a sor konvergens.
Most nézzük a következő sort:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3} + \cdots$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4} + \cdots + \frac{1}{n^4}}_{n \text{ db}} - \frac{1}{n} + \cdots .$$

Nyilván ennek a sornak a részletösszegei egyrészt a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergens, másrészt a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$ divergens sor részletösszegeiből tevődik össze, azaz a sor divergens.

XXVII. *Tegyük fel, hogy a pozitív tagú* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor divergens, és jelölje* S_n *a sor részletösszeg-*

sorozatát, azaz $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. *Bizonyítsa be, hogy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$$

divergens!

Megoldás. Minden pozitív n és p számra nyilván fennáll, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \geq \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k}{S_{n+p}} = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}}.$$

Mivel $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1$ (n rögzített), azaz a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ sorra nem teljesül a Cauchy-féle konvergencia-kritérium$^{(*)}$, azaz divergens.

Megjegyzés.

$(*)$: **A Cauchy-féle konvergencia-kritérium** így szól: *Egy* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sor akkor és csak akkor konvergens, ha* $\forall\, \varepsilon (> 0)$ *számhoz* $\exists$ *olyan* n_0, *hogy* $\forall\, p$*-re*

$$\left| \sum_{k=n_0}^{n_0+p} b_k \right| < \varepsilon.$$

XXVIII. *Bizonyítsa be, hogy minden pozitív tagú divergens* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sorhoz van olyan* $\{c_n\}$ *monoton csökkenve* 0*-hoz tartó sorozat, amelyre* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot c_n$ *divergens!*

Megoldás. Elég venni a $c_n = \dfrac{1}{S_n}$ sorozatot, ahol S_n a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor n-edik részletösszegsorozata, azaz $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$; ugyanis a XXVII. feladatban szereplő eredmény szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot c_n$$

divergens.
A c_n sorozat pedig monoton csökkenve 0-hoz tart, hiszen $S_n \uparrow +\infty$ (mivel pozitív tagú divergens a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor).

XXIX. *Az α paraméter mely értékeire konvergens a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\cdot\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$$

sor?

Megoldás. Próbáljuk megbecsülni az $1-n\cdot\sin\frac{1}{n}=1-\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ sorozat nagyságrendjét.

Tekintsük az $1-\dfrac{\sin x}{x}$ függvényt! Mivel

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots \quad (\sin x \text{ fgv. hatványsora}),$$

ezért

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots,$$

amiből

$$1-\frac{\sin x}{x}=\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\cdots,$$

amiből az a sejtésünk, hogy

$$1-\frac{\sin x}{x}\approx\frac{x^2}{6},$$

ha x elég kicsi.
Ezért számítsuk ki a következő határértéket (alkalmazzuk a L'Hopital-szabályt; ld. a XI. feladatot):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6},$$

hiszen $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$, ha $x\to 0$.

Tehát $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\dfrac{1}{6}$, amiből következik, hogy ha x elég kicsi, akkor

$$\frac{1}{7}<\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{x^2}<\frac{1}{5},$$

innen $x = \dfrac{1}{n}$-et véve az adódik, hogy

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{7} < 1 - \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} < \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n^2},$$

így

$$\frac{1}{7^\alpha} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}} < \left(1 - n \cdot \sin \frac{1}{n}\right)^\alpha < \frac{1}{5^\alpha} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}},$$

amiből az adódik, hogy ha $2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \dfrac{1}{2}$, akkor a majoráns kritériumból adódik a sor konvergenciája, $2\alpha \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \leq \dfrac{1}{2}$ esetén pedig minoráns kritériumból kapjuk a sor divergenciáját.

XXX. *Bizonyítsuk be, hogy*

a) *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$ *sor divergens;*

b) *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^2$ *sor konvergens!*

Megoldás.

a) Állítom, hogy $n \geq 3$ esetén

$$\sqrt[n]{n} - 1 \geq \frac{1}{n},$$

ugyanis

$$n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

hiszen

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

úgy, hogy

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \uparrow e \leq 3.$$

Tehát $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) \geq \dfrac{1}{n}$, ami a minoráns kritérium és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ sor divergenciája miatt divergens.

b) Állítom, hogy $\forall\alpha < 1$ esetén

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \frac{1}{n^\alpha}, \text{ ha } n > n_0,$$

azaz

$$n < \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n$$

a bizonyítandó állítás, ami ekvivalens a

$$\ln n < n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

egyenlőtlenséggel, azaz elég belátni, hogy

$$\frac{\ln n}{n} < \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \text{ha} \quad n > n_0.$$

Próbáljuk meg a $\ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$-t csökkenteni, vegyük a $\ln(1+x)$ függvényt, írjuk fel ennek a hatványsorát, azaz

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad (|x| < 1;\ \text{geometriai sor}),$$

ebből integrálással:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (|x| < 1).$$

Azt sejtjük, hogy $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$, hiszen a következő tag pozitív ($x > 0$-ra). Ezt a sejtést könnyen beláthatjuk a korábbi néhány példában megmutatott függvénydiszkussziós eljárással, hiszen $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1}{1+x} - (1-x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x^2} > 1$ ($0 < x < 1$ esetén) $\Rightarrow f(x) \uparrow$ és $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) > 0$, ha $x > 0$, tehát sejtésünk igaz.

Így viszont

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) > \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} > \frac{1}{2n^\alpha},$$

az viszont nyilvánvaló, hogy
$$\frac{\ln n}{n} < \frac{1}{2n^{\alpha}},$$
hiszen $2 \ln n < n^{1-\alpha}$, ami $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{1-\alpha}}{2\ln n} = \infty$ (pl. L'Hopital szabállyal; ld. XI. feladat) alapján adódik. Így valóban kaptuk, hogy $\sqrt[n]{n} - 1 < \dfrac{1}{n^{\alpha}} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 < \sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ konvergens, ha $\alpha > \dfrac{1}{2}$, ezzel beláttuk a b) állítást is.

XXXI. *Vizsgálja a következő sort feltételes és abszolút konvergencia szempontjából!*
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right].$$

1. Megoldás. A sor nyilván konvergens, hiszen $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \uparrow e$, tehát $e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \downarrow 0$ és változó előjelű, így a Leibniz-kritérium (ld. V. feladat) miatt konvergens.
Most bemutatjuk, hogy
$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]$$
divergens, tehát a sor nem abszolút konvergens, azaz mindent egybevetve a sor feltételesen konvergens.
Induljunk ki a következő hatványsorból:
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad (|x| < 1),$$
amiből
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$
Ebből azt sejtjük, hogy
$$\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad \text{ha} \quad x > 0,$$
(hasonlóan bizonyítható, mint a XXX. feladatban, csak $f'(x)$ mellett $f''(x)$-et is venni kell). Így $x = \dfrac{1}{n}$-et véve
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} < e^{n\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\right]} = e^{1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}}.$$

Ebből:

$$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > e-e^{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}} = e\left(1-e^{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}}\right) > e\left(1-e^{-\frac{1}{4n}}\right).$$

Az $\left(1-e^{-\frac{1}{4n}}\right)$ becslésekor az e^x függvény $x_0=0$-ban levő differencia-hányadosát, majd differenciálhányadosát használjuk. Nevezetesen

$$\frac{e^{-\frac{1}{4n}}-e^0}{-\frac{1}{4n}-0} \to (e^x)'|_{x=0} = e^x|_0 = 1, \quad \text{ha} \quad -\frac{1}{4n}\to 0$$

azaz $n\to\infty$.

Így viszont $\dfrac{e^{-\frac{1}{4n}}-1}{-\frac{1}{4n}} > \dfrac{1}{2}$, ha n elég nagy; ami így is írható:

$$\frac{1-e^{-\frac{1}{4n}}}{\frac{1}{4n}} > \frac{1}{2} \Rightarrow 1-e^{-\frac{1}{4n}} > \frac{1}{8n}.$$

Ezt használva

$$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \frac{1}{8n}$$

adódik, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \geq \frac{e}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

amiből a minoráns kritérium és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ adja, hogy a kérdéses $(*)$ sor divergens.

2. Megoldás. A konvergencia bizonyítása ugyanaz, mint előbb. Az, hogy nem abszolút konvergens a sor, azt az alábbi módon láthatjuk be.

Tudjuk, hogy

$$(*) \qquad e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

és a binomiális tételből azt kapjuk, hogy

$$(**) \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ebből viszont $(**)$-ot $(*)$-ból kivonva az adódik, hogy

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2!} + \left[1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]\cdot\frac{1}{3!} + \cdots.$$

Világos, hogy a jobb oldalon minden [ ]-ben levő tag pozitív, így az összeg biztos, hogy nagyobb vagy egyenlő, mint $\frac{1}{2n}$, ahonnan azonnal adódik a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

azaz, hogy a sor divergens.

XXXII. *Legyen $\{a_n\}$ egy nem-negatív, monoton csökkenő számsorozat. Bizonyítsuk be, hogy ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$. Mutassa meg, hogy ez az utóbbi feltétel nem elegendő a sor konvergenciájához!*

Megoldás. Mivel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, ezért $s_k = \sum\limits_{\ell=1}^{k} a_\ell$ konvergens, így

$$(*) \qquad s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty$$

és

$$(**) \qquad s_{2n+1} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Így $(*)$-ból kapjuk, hogy (a monotonitást is figyelembe véve)

$$\sum_{k=n}^{2n} a_k \geq n \cdot a_{2n} = \frac{1}{2}(2n \cdot a_{2n}) \to 0,$$

ugyanígy $(**)$-ból

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k \geq n \cdot a_{2n+1} = \frac{n}{2n+1}(2n+1)a_{2n+1} \to 0,$$

amiből jön, hogy $n \cdot a_n \to 0$.
A feladat második részében elegendő tekinteni a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ sort, hiszen $n \cdot a_n = \dfrac{1}{\ln n} \to 0$, holott a sor divergens, hiszen

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln n} dx = \lim_{\omega \to \infty} \int_2^{\omega} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim [\ln \ln x]_2^{\omega} = \ln \ln \omega - \ln \ln 2 \to \infty,$$

tehát az integrálkritérium értelmében a sor divergens (ld. IX. feladat).
Ugyanarra az eredményre jutottunk volna az utóbbi sor divergenciáját illetően a Cauchy-féle ekvikonvergencia-tétellel is (ld. IX. feladat), $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ helyett a $\sum\limits_{m=1}^{\infty} 2^m \dfrac{1}{2^m \ln 2^m} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m \ln 2}$ sort elég vizsgálni, ami viszont divergens (harmonikus sor!).

XXXIII. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n) \ln \ln n}$$

sor?

Megoldás. Mivel a nevező írható a következőképpen:

$$e^{(\ln \ln n)^2},$$

ezért próbáljuk $(\ln \ln n)^2$-et becsülni. Állítjuk, hogy

$$(\ln \ln x)^2 < \ln x \Leftrightarrow \frac{(\ln \ln x)^2}{\ln x} < 1.$$

Alkalmazzuk a L'Hopital-szabályt (ld. XI. feladat):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln \ln x)^2}{\ln x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2(\ln \ln x) \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 \ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\ln x} = 0,$$

azaz $\dfrac{(\ln\ln x)^2}{\ln x} < 1$, ha x elég nagy, tehát állításunk igaz. Innen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

így a minoráns kritérium és a harmonikus sor divergenciája miatt az eredeti sor divergens.

XXXIV. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10\sin n}$$

sor?

Megoldás. Az ú.n. **Dirichlet-kritériumot** akarjuk használni, amely úgy szól, hogy *ha az $\{a_n\}$ sorozatra igaz, hogy $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n|$ korlátos és $b_n \downarrow 0$, akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

konvergens.

Itt a $\{\sin n\}$ játszhatná a_n szerepét, de az $\dfrac{1}{n + 10\sin n}$ nem monoton, így előbb egy trükköt kell alkalmaznunk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10\sin n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(n - 10\sin n)}{n^2 - 100\sin^2 n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin n}{n^2 - 100\sin^2 n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10\sin^2 n}{n^2 - 100\sin^2 n} = S_1 - S_2.$$

Először vizsgáljuk S_2-t (végezzük a becslést alkalmas n_0-tól):

$$S_2 = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{10\sin^2 n}{n^2 - 100\sin^2 n} \le \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{10}{\frac{n^2}{2}} \le 20 \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

ami konvergens.
Most nézzük S_1-et.
Ha utalva a Dirichlet-kritériumra

$$a_n = \sin n \qquad \text{és} \qquad b_n = \frac{n}{n^2 - 100\sin^2 n}$$

jelöléseket használjuk, akkor meg kell mutatnunk, hogy

a) $|\sin 1+\sin 2+\cdots+\sin n|$ korlátos

b) az $f(x)=\dfrac{x}{x^2-100\sin^2 x}$ függvény monoton csökkenő és 0-hoz tart, ha $x\to\infty$.

Ad a): Trigonometriai azonosságok alkalmazásával adódik, hogy

$$(*)\qquad \sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}},\quad x\neq 2k\pi;$$

amiből kapjuk, hogy

$$|\sin 1+\sin 2x+\cdots+\sin n|\leq\frac{1}{\sin\dfrac{1}{2}}=K,$$

tehát fennáll az állításunk az $a_n=\sin n$ sorozatra. (A $(*)$-ot akár teljes indukcióval, akár a $2\sin\dfrac{x}{2}$-del való átszorzással is lehet bizonyítani.).

Ad b): Deriválással:

$$f'(x)=\frac{x^2-100\sin^2 x-x(2x-200\sin x\cdot\cos x)}{(x^2-100\sin^2 x)^2}=$$

$$=\frac{-x^2-100\sin^2 x+100\cdot x\cdot\sin 2x}{(x^2-100\sin^2 x)^2}<0\Leftrightarrow$$

$$-x^2-100\sin^2 x+100x\sin 2x<0\Leftrightarrow 100\left(\sin 2x-\frac{\sin^2 x}{x}\right)<x,$$

ami valahonnan kezdve igaz; tehát $f(x)\downarrow$, és triviális, hogy $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. Így az a) és b)-ben foglaltakból következik, hogy S_1 is konvergens, azaz az eredeti sor konvergens.

XXXV. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$$

sor?

Megoldás. Mivel $\sin^2 n=\dfrac{1-\cos 2n}{2}$, ezért sorunk előáll az alábbi módon:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}.$$

Az első sor a Leibniz-kritérium (ld. V. feladat) miatt konvergens, a másodikat először írjuk a következő formába:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos 2n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\left(n + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(2+\pi)}{n}.$$

Ha $a_n = \cos n(2+\pi)$ és $b_n = \dfrac{1}{n}$ "szereposztással" alkalmazni akarjuk a Dirichlet-kritériumot (ld. a XXXIV. feladatot), elég csupán belátni, hogy

$$|\cos(2+\pi) + \cos 2(2+\pi) + \cdots + \cos n(2+\pi)|$$

korlátos, ami a következő trigonometrikus azonosság alapján adódik:

$$(*) \qquad \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\sin \dfrac{n\alpha}{2}}{\sin \dfrac{\alpha}{2}} \cos(n+1)\frac{\alpha}{2}.$$

($(*)$ adódik a $\sin\dfrac{\alpha}{2}$-lel való átszorzással, vagy akár teljes indukcióval).
Így tehát a második sor is konvergens, azaz az eredeti sor is.

XXXVI. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$$

sor?

Megoldás. Belátjuk, hogy $\sin n^2 \not\to 0$, azaz nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele (az általános tag 0-hoz tartása).
Először belátjuk, hogy a $\sin 2n$ **sorozat** nem konvergens.
Tegyük fel, hogy konvergens, akkor

$$\sin 2(n+2) - \sin 2n \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty;$$

de

$$\sin 2(n+2) - \sin 2n = 2 \cdot \sin 2 \cdot \cos 2(n+1) \to 0 \Rightarrow \cos 2n \to 0,$$

akkor viszont

$$\cos 2(n+2) - \cos 2n = -2 \cdot \sin 2 \cdot \sin 2(n+1) \to 0,$$

azaz $\sin 2n \to 0$, de akkor

$$1 = \cos^2 2n + \sin^2 2n \to 0 + 0 = 0,$$

ami ellentmondás.
Most megmutatjuk, hogy $\sin n^2 \not\to 0$.
Tegyük fel, hogy $\sin n^2 \to 0$, akkor kapjuk, hogy

$$\sin(n+1)^2 - \sin(n-1)^2 \to 0,$$

azaz

$$2 \cdot \sin 2n \cdot \cos(n^2+1) \to 0,$$

azaz

$$2 \cdot \sin 2n(\cos n^2 \cdot \cos 1 - \sin n^2 \cdot \sin 1) \to 0,$$

azaz

$$2 \cdot \sin 2n \cdot \cos n^2 \cdot \cos 1 - 2 \cdot \sin 2n \cdot \sin n^2 \cdot \sin 1 \to 0.$$

Mivel az indirekt feltevés alapján $\sin n^2 \to 0$, így a második tagban levő sorozat $\to 0$, ezért a

$$(*) \qquad 2 \cdot \sin 2n \cdot \cos n^2 \cdot \cos 1 \to 0$$

kell, hogy teljesüljön.
Mivel $\{\sin 2n\}$-nek nincs határértéke, de korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass tétel értelmében kell lenni torlódási pontjának, de mivel nem konvergens, ezért több, mint egy torlódási pontja kell, hogy legyen, azaz van legalább egy $a \neq 0$ torlódási pontja; legyen $\{n_k\}$ az a sorozat, amelyre

$$\sin 2n_k \to a,$$

akkor a $(*)$-ból adódik, hogy $\cos n_k^2 \to 0$ kell, hogy legyen, de az eredeti feltételből $\sin n_k^2 \to 0$ is teljesül, így

$$1 = \sin^2 n_k^2 + \cos^2 n_k^2 \to 0 + 0 = 0,$$

ami ellentmondás, tehát $\sin n^2 \to 0$ nem áll fenn. Azaz eredeti sorunk divergens.

XXXVII. *Konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3}$$

sor?

Megoldás. A korábbi néhány példában több ízben becsültük $\cos x$-et a hatványsorának első néhány tagjával, itt azonban ezt túl nehéznek gondoltuk, ezért másképp közelítjük a problémát (de az olvasó járhatja a másik utat is).
Mivel $\cos \frac{1}{n} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{n}}$-et akarjuk felülről becsülni, azaz $\sin \frac{1}{n}$ helyett akarunk kisebbet venni. Mivel a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-en konkáv $\sin x$ függvény grafikonja az $y = \frac{2}{\pi}x$ húr felett van, ezért

$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, ha $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Ebből kapjuk, hogy

$$\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{n}} \leq \sqrt{1-\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{\pi^2 n^2}}.$$

Így adódik, hogy

$$(*) \qquad \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} \leq \left[\left(1-\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\dfrac{n}{2}}.$$

Mivel

$$\left(1-\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e^{-\dfrac{4}{\pi^2}} = \frac{1}{e^{\dfrac{4}{\pi^2}}} < \frac{1}{e^{\dfrac{1}{\pi^2}}},$$

így $(*)$-ból

$$\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} \leq \left(\sqrt{e^{-\dfrac{1}{\pi^2}}}\right)^n = q^n,$$

ahol $0 < q < 1$, azaz a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$ sort majorálja a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergens geometriai sor, amiből adódik az eredeti sor konvergenciája.

XXXVIII. *Legyen a nem-negatív tagú* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor konvergens. Bizonyítsuk be, hogy a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n\cdot a_{n+1}}$$

sor szintén konvergens! Mutassuk meg, hogy fordítva nem igaz, de ha a_n *monoton csökkenő, akkor a fordított állítás is igaz.*

Megoldás. A $\sqrt{a_n\cdot a_{n+1}} \leq \frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ egyenlőtlenségből $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n\cdot a_{n+1}}$ konvergenciája azonnal adódik.

Továbbá, ha $a_n\downarrow$, akkor $\sqrt{a_n\cdot a_{n+1}} \geq a_{n+1}$, így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n\cdot a_{n+1}}$ konvergenciájából $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergenciája adódik (majoráns kritérium).

Most tekintsük az alábbi sorozatot:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \dfrac{1}{n^4}, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k \cdot a_{k+1}} \le \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},$$

azaz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$ konvergens, míg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens (hiszen $a_n \not\to 0$).

XXXIX. *Következik-e a* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ *határértékből, hogy a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *és* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sorok egyidejűleg konvergensek vagy divergensek?*

Megoldás. Legyen

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n \cdot \ln n} \qquad \text{és} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Nyilván

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{\ln n} = 1.$$

Ugyanakkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

sor divergens, mert az első sor Leibniz-típusú (azaz konvergens; ld. V. feladat), a második pedig divergens (pl. az integrálkritérium, vagy a Cauchy-féle ekvikonvergencia-tétel (ld. IX. feladat) miatt. Viszont a

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

sor konvergens.

XL. *A* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ *harmonikus sorban az első tagtól kezdve felváltva p db "+", majd "q" db "−" előjellel vesszük a tagokat. Mutassuk meg, hogy ha* $p = q$*, akkor a sor konvergens. Adjon példát arra, hogy ha* $p \neq q$*, akkor divergens a sor!*

Megoldás. Legyen tehát $p = q$, ekkor

$$S_{\ell\cdot p} = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{2p}\right) + \cdots +$$
$$+ (-1)^{\ell+1}\left(\frac{1}{(\ell-1)p+1} + \cdots + \frac{1}{\ell\cdot p}\right),$$

azaz az $S_{\ell\cdot p}$ a részletösszege egy váltakozó előjelű sornak, és a tagok (a zárójelekben levő összegek) monoton csökkenve 0-hoz tartanak, így a $\lim\limits_{\ell\to\infty} S_{\ell\cdot p}$ létezik (Leibniz-kritérium; ld. V. feladat). Az viszont világos, hogy minden $S_{\ell\cdot p+k}$ $(k = 1, 2, \ldots p-1)$ alakú részletösszeg ugyanahhoz a határértékhez tart, ha $\ell \to \infty$, így a szóban forgó sor konvergens.
A feladat második részéhez legyen $p = 2, q = 1$, azaz a következő sort nézzük:

$$(*) \qquad 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots.$$

Jelölje s_n^* a $(*)$ sor, s_n pedig az eredeti harmonikus sor n-edik részletösszegét. Ekkor

$$s_{3n}^* = s_{3n} - 2\cdot\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots\right) =$$
$$= s_{3n} - \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right) =$$
$$= s^{3n} - \frac{2}{3}s_n > s_n - \frac{2}{3}s_n = \frac{1}{3}s_n \to \infty,$$

(mivel a harmonikus sor esetén $s_n \to +\infty$).
Azaz a $(*)$ sor divergens, hiszen $s_{3n}^* \to +\infty$.