Meghökkentő és hihetetlen – barangolás a matematikai végtelen birodalmában (Végtelen sorokról)

59. Rátz László vándorgyűlés (spec.mat. szekció)
Gödöllő
2019. július 6.

Dr. Németh József c. egyetemi tanár
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Analízis Tanszék

Pólya György: ”Ha a tudomány valamelyik területét (vagy elméletét, vagy fogalmát) tanítjuk, akkor az emberpalántáknak nagy lépésekkel nyomon kell követniük az emberiség szellemi fejlődését.”

A végtelen a matematikában:

Ellentmondásos; vitatott, misztikus

”Sok képtelenség adódik a végtelen tagadásából is és elismeréséből is.” (Arisztotelesz, i.e. 384–322.)
”Mindig nagy falatnak tűnt”
”Megosztotta a matematikusokat” (Bolzano, 1781–1848)
(Kell-e? Dobjuk el!)
”A végtelent legjobb elkerülni” (Galilei, 1564-1642)
”Ősidők óta semmi sem kavarja fel annyira az emberi értelmet, mint a végtelen kérdése” (Hilbert 1900 PÁRIZS; 23, 1)

Példák (ellentmondások, meghökkentő dolgok a végtelent tekintve) (Első csokor)
A.

a) Galilei-féle paradoxon:

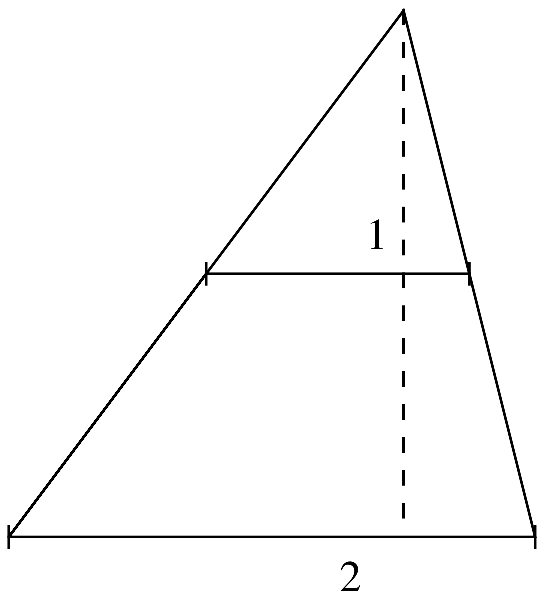
$$\begin{gathered} 1 \leftrightarrow 2 \\ 2 \leftrightarrow 4 \\ 3 \leftrightarrow 6 \\ \vdots \end{gathered}$$

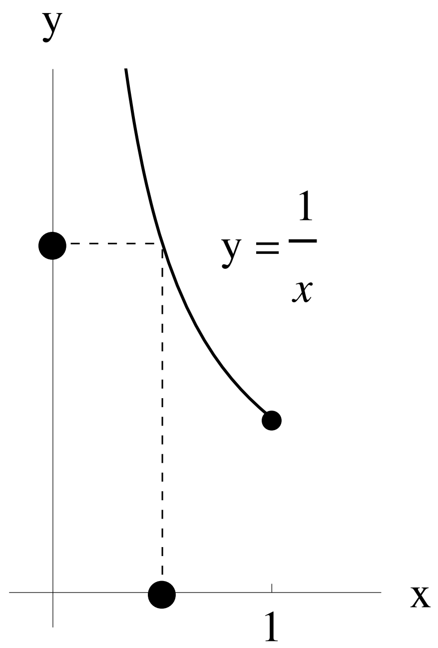
(kölcsönösen egyértelmű, akkor ”ugyanannyi” elem, Kalmár-lovasok)

Paradoxon? Ellentmondás? Rész–egész régi felfogása? (Bolzano, 1781-1848; a rész $\neq$ egész).

AXIOMA: "Az egész nagyobb, mint a része."

b) vagy $[0;1]$ és $[0;2]$ példája ($x \to 2x$)





vagy $(-1;1) \longleftrightarrow (-\infty;\infty), y = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$ vagy $y = \dfrac{x}{1+|x|}$.vagy a (0; 1) $\longleftrightarrow$ egész számegyenes összes pontja pl. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(2x-1)$ függvény; azaz a (0,1) intervallumnak annyi pontja van, mint az egész számegyenesnek.

Definíció: (ami "*feloldja az ellentmondást*", ami abból adódik, hogy a végesre igaz szabályokat akartuk a végtelenre "erőszakolni" (u.i.: a rész és egész problémáját)

Egy halmazt végtelen halmaznak nevezünk, ha van olyan valódi részhalmaza, amellyel a halmaz ekvivalens (azaz "ugyanannyi" pontja van).

(Ellenkező esetben *véges.*)

[Kihúztuk a "paradoxonok" méregfogát.] Ferdinand

Ludwig Philipp Georg Cantor (1845-1918; német) nászút; Dedekind; elismertség; depresszió; intézet.... (cikkeit sokszor visszavonta)

c) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ (természetes számok) Megszámlálhatóan végtelen halmaz

d) $\left\{\dfrac{p}{q}\right\}$: racionális számok

A racionális számok "ugyanannyian" vannak, mint a természetes számok (azaz **Megszámlálhatóan** végtelen sokan vannak) (**Számosság**)

Ábra:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \cdots \end{array}$$

(innen a **negatívak** is és utána **az összes**)

Megjegyzés: Számpárok $(n, m) \Leftrightarrow (2^n \cdot 3^m)$; számhármasok, szám n-esek, polinomok (egész e.h.); $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; ....

e) Van-e olyan, aminek "több" pontja van, mint a *term. számok* (ill. racionális számok) (azaz *nem megszámlálható*) ("Végtelenek között nem lehet különbséget tenni." (Bolzano $\Leftrightarrow$ Dedekind)

Igen: **Valós számok** (CANTOR) (4 év)

Módszere: (a $(0; 1)$ intervallum összes (valós) pontjára)

Indirekt: (tegyük fel, hogy megsz., azaz sorrendbe szedhető)

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,u_{11}u_{12}\ldots \\ x_2 &= 0,u_{21}u_{22}\ldots \\ &\vdots \\ x_n &= 0,u_{n1}u_{n2}\ldots u_{nn}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

(pl.: $0,5 = 0,499\ldots$-et vegyük)

Legyen $y = 0,v_1v_2v_3\ldots$, ahol legyen $v_n = 2$, ha $u_{nn} = 1$ és legyen $v_n = 1$, ahol $u_{nn} \neq 1$.

Ha pl. $y = x_n = 0,u_{n1}u_{n2}\ldots \underline{\underline{u_{nn}}}\ldots$

Elnevezés: *Kontinuum-számosságú* (valós számoké) Cantor féle diagonális eljárás. (halmaz elm., informatika)

Problémák: Van-e a megszámlálható és a kontinuum között? (Kontinuum-hipotézis) (Hilbert 1. a 23-ból, "Senki sem űzhet ki bennünket abból a paradicsomból, melyet Cantor teremtett nekünk." (D.H.))

Cantor: "A matematika lényege annak szabadságában van; sokkal hasznosabb a matematikai kérdések felvetése, mint a problémák megoldása.")

Gödel (1940): nem cáfolható; Cohen (1963): nem bizonyítható.

Megjegyzés: N, Q, Algebrai irracionális, transzcendens; $(\pi, e, \sin r, \cos r)$ (Ld. Liouville (1844); Hermite (1873); Lindemann (1882); Kronecker 1866-1903; Cantor: m.m.)

Van-e a kontinuumnál nagyobb számosság? (Azaz van-e olyan halmaz, amelynek "több" eleme van, mint a valós számok.) Pl: Cantor kérdése: A síknak az összes pontja ilyen-e? NEM.

g) A (0,1) szakasznak ugyanannyi pontja van, mint az egységnégyzetnek, ill. az egész síknak, sőt az egész háromdimenziós térnek, azaz kontinuum. Módszer: $P = (0, a_1, a_2, a_3, \ldots; 0, b_1, b_2, b_3 \ldots) \leftrightarrow 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3.$

Cantor: "Látom, de nem hiszem" Mit gondolt róla először? 3 évig "bizonyította" az ellenkezőjét; 1871-1874)

Az egységnégyzet és az egész sík közötti megfeleltetés triviális.

Tehát a síknak nincs több pontja, mint kontinuum (azaz valós számoké)

h) Van-e a kontinuumnál nagyobb számosságú halmaz
   - α) Polinomok (megszámlálható) (egész eh.)
   - β) Folytonos függvények (kontinuum) (HF; Sz.-Nagy Béla)
   - γ) Az összes függvény (kar. függvény); a valós számok összes részhalmazának a halmaza nagyobb számosságú, mint a kontinuum. (Cantor tétele.)

B. (Második csokor; **végtelen összegek**)

Bevezetés:

α) CSOKI

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = ?$$

β)

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots=? \quad \text{(TORTA)}$$

Vagy:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots &= A/\cdot\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots &= \frac{A}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

De

γ)

$$\left.\begin{aligned} 2+2^2+2^3+\cdots &= A/\cdot 2 \\ 2^2+2^3+\cdots &= 2A \end{aligned}\right\} \Rightarrow A=-2??$$

Mit szabad? Mit nem szabad? $0,\dot{1}\dot{3}$?

Ősidők óta:

– Archimedes (i.e. 287–212) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ (parabola szelet)

– R. Swineshead (XIV. sz.) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ (fizika; val.szín)

– N. Oresme (1323–1382) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ("minden számnál nagyobb")

– Madhava (1340–1405); G. Nilakhanta (1450–1550)

– Leibniz (1646–1716) "π; $\operatorname{arctg} x$; $\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdots\right)$

Kiemelendő (Leibniz-féle sor)

$$1-1+1-1+1-1+1\cdots$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha)(1-1)+(1-1)+\cdots=0\\ \beta)1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}\text{ az összeg.}$$

$$\gamma)\ \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\text{ (végtelen osztással)}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots.$$

Ezt elfogadta Leibniz, Johann és Jacob és Daniel Bernoulli (XVII–XVIII. sz.), Lagrange (1736–1813) is, de később így fogalmaz: ”ahhoz, hogy egy sor reprezentáljon egy számot, kell, hogy csökkenjenek a tagok”.

Továbbá:

Christian Wolf (1678–1734)

$$\frac{1}{3}=1-2+4-8+16\text{ (Leibniz nem fogadja el)}$$

Mercator (1620–1687)

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots,\ \text{de}$$

ln 3-mal nem foglalkozik (”cikis”)

Megjegyzés:

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1-x}{1-x^3}=$$
$$=(1-x)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)=$$
$$=1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+\cdots$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{3}=1-1+1-1+1-1\cdots$$

(ez már a γ) lépésnél is ”robbanhatott” volna)

Newton (1643–1727)

α) $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots$ (ha x ”kicsi”)

β) $\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}=x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-\cdots$ (ha x ”nagy”) (zseni)

Mi hiányzik (MINT EGY FALAT KENYÉR) ebben a káoszban?

CAUCHY (1789–1857)

Definíció: *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $s_n=a_1+\cdots+a_n$; ha $s_n\to s$ (véges), akkor a sor konvergens, és összege s, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=s$; ellenkező esetben a sor divergens (nincs összege).*

Eldőlt: $1-1+1-1+1-1\cdots$; $s_{2n}=0$; $s_{2n+1}=1\Rightarrow$ DIV.

"CSOKI" $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots=1$, hiszen $s_n\to 1$, mert $s_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1/2)^n-1}{1/2-1}$ végtelen mértani sor)

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\frac{1}{3^n}+\cdots=\frac{1}{2}$ (ez is mértani sor)

$2+2^2+2^3+\cdots$ divergens, hiszen $s_n\to\infty$

$0,\dot{1}\dot{3}=\frac{13}{10^2}+\frac{13}{10^4}+\cdots=\frac{13}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{13}{99}$, hiszen

$a+a\cdot q+a\cdot q^2+\cdots=\frac{a}{1-q}$, ha $|q|<1$. $\left(s_n=a\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\right)$
(Megnyugvás – nem hazudtunk 9. osztályban – erről később.)

VIGYÁZAT (új minőség, ne erőszakoljuk rá a végesre érvényes szabályokat; Hegel)

Példák (elrettentő)

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=A\approx 0,6931\ldots$ (Leibniz), de

$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}A$ (átrendezés)

Megoldás.

Írjuk ki részletesen a sor első néhány tagját:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=A. \tag{24}$$

Vegyük a következő sort, amelynek összege megegyezik az előzővel:

$$(25)\qquad 0+1+0-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}+0-\frac{1}{4}+\cdots=A.$$

Szorozzuk be a (25) alatti sort tagonként $\frac{1}{2}$-del:

$$(26)\qquad 0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}A,$$

majd adjuk össze tagonként a (24) és (26) sorokat:

$$(27)\qquad 1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}A.$$

Ez utóbbi sornak nyilván ugyanannyi az összege, mint a következőnek:

$$(28)\qquad 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}A.$$

Világos, hogy a (28)-as sor a (24)-nek olyan átrendezése, ahol két pozitív előjelű tagot követ egy negatív, majd ismét két pozitív, egy negatív és így tovább, tehát megadtunk egy kívánt átrendezést.

2) **Csoportosítás** (vagy zárójelezés) ld. $1+1-1+1-1+1-1+\cdots$ (de ha konv., akkor bármely csoportosított sor konvergens és összege ugyanannyi)

3) **Részsorokra bontás:**

a)

$$\begin{array}{ll}
1-1+0+1-1+0+1-1+0+\cdots & \\
1-1+0+0+0+\cdots & =0 \\
1-1+0+0+0+\cdots & =0 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots & =0 \\
 & \vdots
\end{array}$$

b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

Gyógyír: *Abszolút* konvergencia (ld. pl. Riemann tételét az átrendezésről. Így 1) esetén bármit lehet

4) Folytonosság

5) Riemann-integrálhatóság

6) Differenciálhatóság

1. Példa. Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$ sor összege nem folytonos a $[0,1]$ zárt intervallumon.

Megoldás. Alkossuk meg $s_n(x)$-et:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = x^n - 1. \tag{2}$$

Ebből látszik, hogy $|x| < 1$ esetén $s_n(x) = x^n - 1 \to -1$ (mivel $x^n \to 0$), míg ha $x = 1$, akkor $s_n(x) = 0 \to 0$, azaz az összegfüggvény

$$s(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } \ 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{ha } \ x = 1, \end{cases}$$

ami nyilvánvalóan nem folytonos a $[0, 1]$ zárt intervallumon.

Ez a példa azt mutatja, hogy folytonos függvényekből (hiszen az $f_n(x) = x^n - x^{n-1}$ függvények mindenütt folytonosak, így a $[0, 1]$ zárt intervallumon is) álló sor összegfüggvénye már nem feltétlenül folytonos. Most nézzük az integrálhatóságot. Erre vonatkozik a következő példa:

2. Példa. Legyen az $\{f_n(x)\}$ függvénysorozat a következőképpen definiálva: Szedjük valahogyan sorozatba a $[0, 1]$ intervallum racionális pontjait , és ezt a sorozatot jelöljük r_n-nel. Ezek után legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \ x = r_n, \\ 0, & \text{ha } \ x \ne r_n. \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor összegfüggvénye a $[0, 1]$ intervallumon nem Riemann-integrálható.

Megoldás. Mivel

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \ x = r_1, r_2, \ldots, r_n, \\ 0, & \text{ha } \ x \ne r_1, r_2, \ldots, r_n, \end{cases}$$

ezért $s_n(x) \to s(x)$, ahol

$$(3) \qquad s(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \ x \text{ racionális}, \\ 0, & \text{ha } \ x \text{ irracionális}. \end{cases}$$

A (3) alatti függvényről a bevezető analízisben megmutattuk, hogy nem Riemann-integrálható, amivel a példát megoldottuk.

Tehát a fenti példa azt mutatja, hogy a végtelen összegeknél az is előfordulhat, hogy integrálható függvények összege nem integrálható. Az alábbi példa a differenciálhatóságra vonatkozik.

3. Példa. Definiáljuk az $\{f_n(x)\}$ függvénysorozatot a következőképpen:

$$f_1(x) = \sqrt{x^2+1}\,,$$
$$f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - \sqrt{x^2+\frac{1}{n-1}}\,, \qquad \text{ha} \qquad n > 1.$$

Bizonyítsuk be, hogy az ezekből a függvényekből alkotott

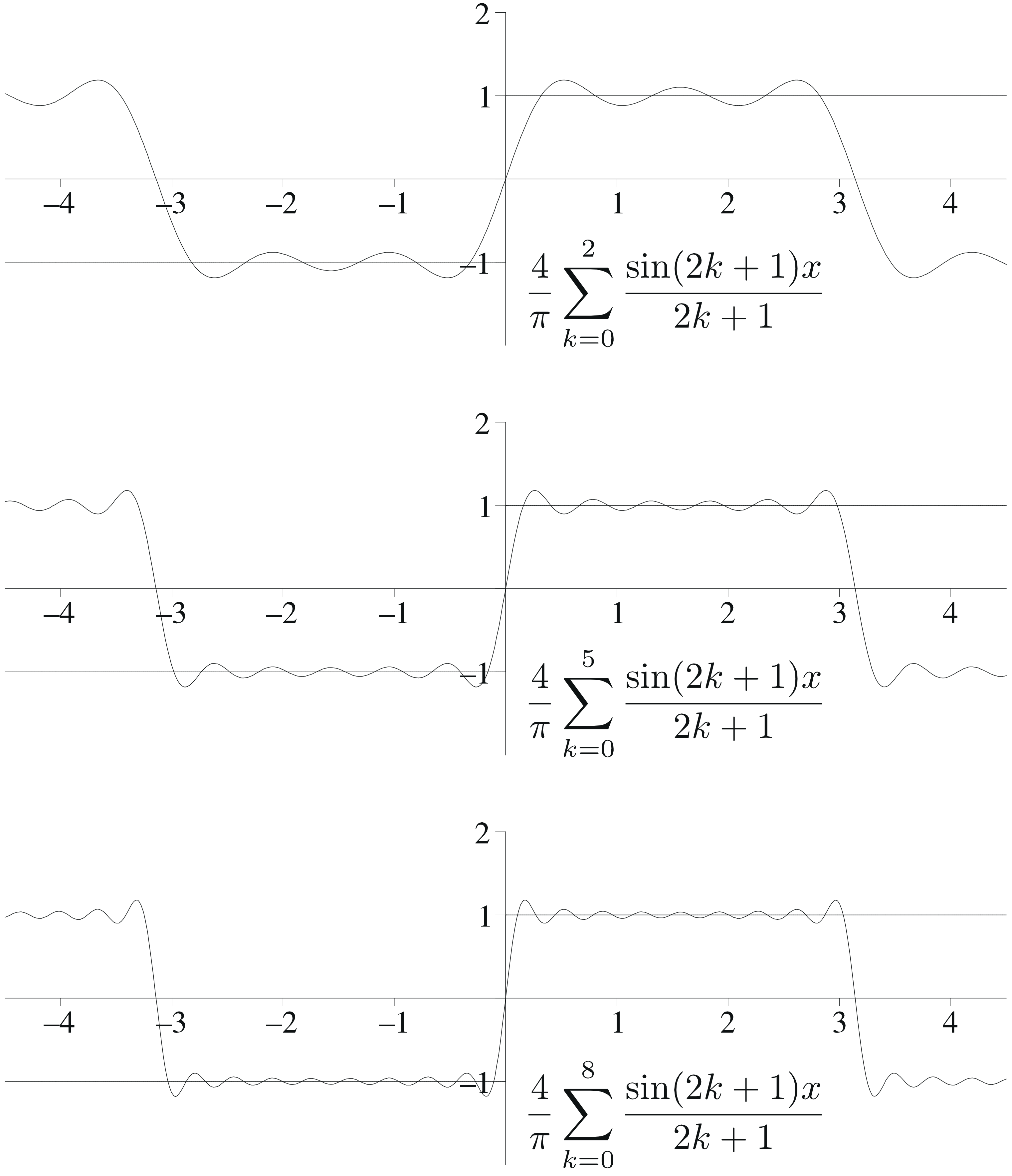
$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

függvénysor összegfüggvénye nem differenciálható a 0 pontban.

Megoldás. Alkossuk meg a sor n-edik részletösszegét:

$$s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\,.$$

Világos, hogy $s_n(x) \to |x|$ minden $x \in R$ esetén, tehát a sor összegfüggvénye az $s(x) = |x|$, ami valóban nem differenciálható az origóban, amit bizonyítani akartunk.


2
1
–4 –3 –2 –1 1 2 3 4
–1
$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{2}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$
2
1
–4 –3 –2 –1 1 2 3 4
–1
$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{5}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$
2
1
–4 –3 –2 –1 1 2 3 4
–1
$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{8}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$

1. ábra

Megjegyzés: Fourier (1768–1850) sgn x a szinuszok összege; Cauchy hibás bizonyítás.
Gyógyír mindenre: Egyenletes konvergencia (Weierstrass (1815–1897); Abel (1802–1829) pl. hatványsorok – ld. polinomok)

C. PÉLDÁK (Könyv; 40 feladat; felvillantok sokat, de mindent bizonyítok ebben a file-ban.)

a) **Mértani sor**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q} \Leftrightarrow |q| < 1.$$

Pl.

$$0,\dot{1}\dot{3} = \frac{13}{100} + \frac{13}{10^4} + \cdots = \frac{13}{100} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{100}} = \frac{13}{99}.$$

Kérdés marad (9. o.)

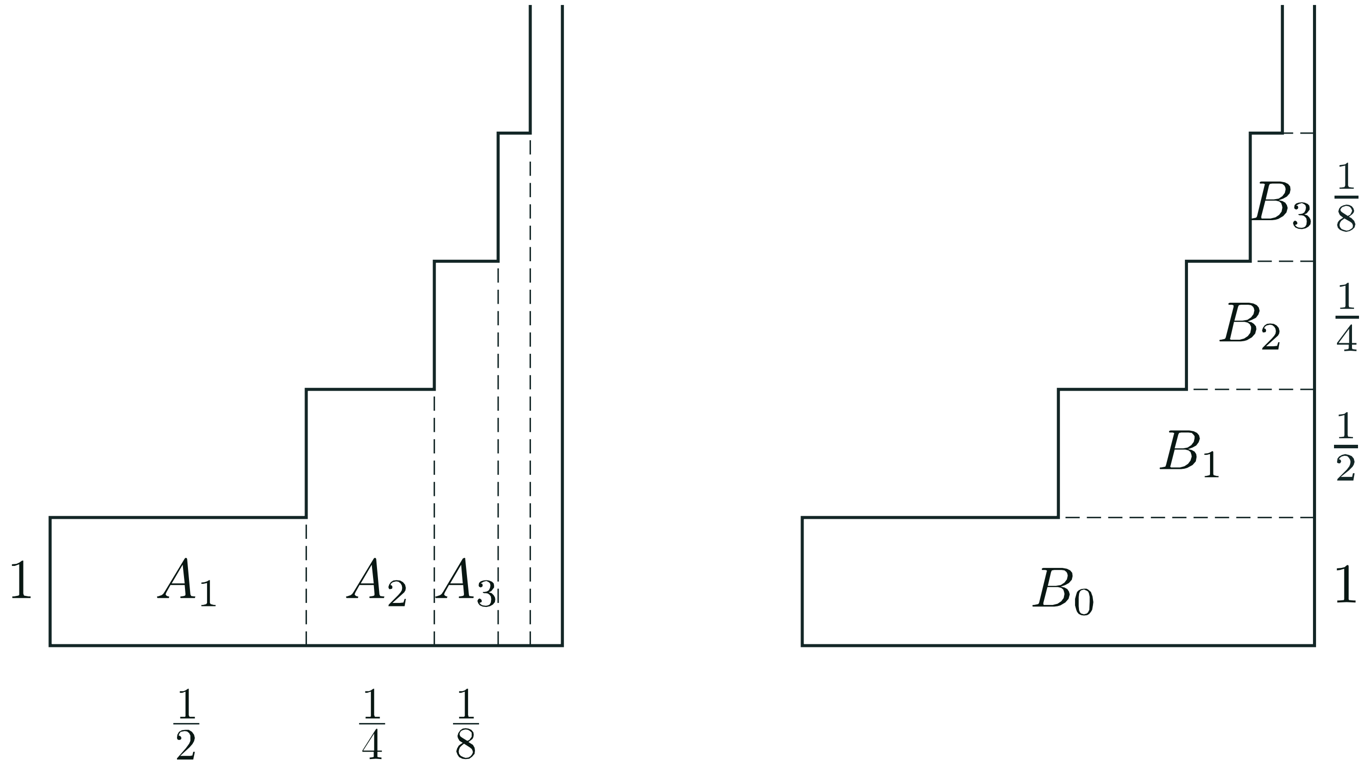
$$\left.\begin{aligned} A &= 0,1313\ldots \\ 100A &= 13,1313\ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow 99A = 13 \Rightarrow A = \frac{13}{99}.$$

α) $\sum c a_n \stackrel{?}{=} c \sum a_n$ és $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$ (Mindkettő **OK** + *konvergens* a sor.) (Nincs több u.a.)

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots$

(Swineshead; XIV. sz.)

1. Megoldás. Először egy olyan geometriai módszert mutatunk be, amely akár általános iskolában is tárgyalható. (Az utosó fejezetben utalunk arra, hogy ez az ötlet a XIV. századból származik.)



Az ábra alapján világos, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ téglalapok területei éppen $\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \ldots, \frac{n}{2^n}, \ldots$; a $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ téglalapoké pedig $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$. Viszont a bal oldali síkidomot eltolással átvive a jobb oldaliba éppen az adódik, hogy a két síkidom területe megegyezik, azaz

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots .$$

Viszont a jobb oldali sor egy $a = 1$, $q = 1/2$ paraméterű geometriai sor, így összege 2, tehát a példában levő sornak is 2 az összege.

2. Megoldás. Írjuk fel a sort részletesen:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots. \tag{12}$$

Bontsuk fel a sort a következőképpen:

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots & = 1 \\ \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots & = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots & = \frac{1}{2^2} \\ \ddots & \quad\vdots \end{array} \tag{13}$$

A fenti sorok mind mértani sorok, így könnyen adódtak az eddigiek alapján az egyenlőségek jobb oldalán szereplő számok. Ha tekintjük a jobb oldali oszlop elemeit, azok a következő végtelen sort adják:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots = 1\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

hiszen ez egy $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$ paraméterekkel rendelkező mértani sor. Tehát a kérdéses sor konvergens, és összege 2.

Kérdés: a részsorokra bontás jogos-e? (Abszolút konv.; pl. gyökkritériummal.)

III. Megoldás.

Most megmutatunk még egy módszert, amivel precízzé tehetjük a megoldást. Tekintsük a sor N-edik részletösszegét:

$$s_N = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{N}{2^N}\,. \tag{17}$$

Végezzük el a hasonló felbontást e véges összeg esetén is, és számítsuk ki az egyes összegeket:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^N} &= 1 - \frac{1}{2^N}\\
\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^N} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^N}\\
\frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^N} &= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^N}\\
&\vdots\\
\frac{1}{2^N} &= \frac{1}{2^{N-1}} - \frac{1}{2^N}.
\end{aligned} \tag{18}$$

(Az egyes összegeket a mértani sorozatra vonatkozó – középiskolában tanult – összegképlet alkalmazásával számoltuk ki.) Viszont (17) és (18) alapján az adódik, hogy

$$\begin{aligned}
s_N &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{N-1}} - \frac{N}{2^N}\\
&= 2 - \frac{1}{2^{N-1}} - \frac{N}{2^N} \to 2,
\end{aligned}$$

hiszen $\frac{1}{2^{N-1}} \to 0$ és $\frac{N}{2^N} \to 0$, ha $N \to \infty$. Az első sorozatra azt alkalmaztuk, hogy $q^N \to 0$, ha $|q| < 1$. A második sorozat esetében a következőképpen járhatunk el: Világos, hogy

$$0 < \frac{N}{2^N} = \Big(\frac{\sqrt[N]{N}}{2}\Big)^N \leq \Big(\frac{1,5}{2}\Big)^N$$

teljesül valamely N_0-nál nagyobb N-ek esetén, hiszen $\sqrt[N]{N} \to 1$. Viszont $(\frac{1,5}{2})^N \to 0$, hiszen $0 < \frac{1,5}{2} < 1$, így a rendőrelv miatt valóban $\frac{N}{2^N} \to 0$. Összegezve tehát azt kaptuk, hogy $s_N \to 2$, azaz a (12) sor összege valóban 2.

IV. Megoldás.

$1 + x + x^2 + \cdots x^n + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$, ha $|x| < 1$ (Mért. sor)

Differenciálva tagonként (!!?)

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + n \cdot x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} / \cdot x$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2};$$

vegyük $x = \dfrac{1}{2}$-t, így adódik, hogy

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

(Legszebb, de nagy apparátus.)

(Gyönyörű fokozatosság: ált. isk. – középisk. – egyetem.)

Megjegyzés. I.) Fizika

$$\frac{60}{2}+\frac{2\cdot 60}{2^2}+\frac{3\cdot 60}{2^3}+\cdots+\frac{n\cdot 60}{2^n}+\cdots=120,$$

azaz ...

II.) Val.sz. (várható érték)

III.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ (ld. könyv, ill. III. feladat a 40-ből)

Ötlet $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$ és így bontani részsorokra

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ (harmonikus sor)

Lassú

Pl.

$$s_{83}>5;\quad s_{12367}>10;\quad s_{36\cdot 10^6}>18\quad \text{(Jani bácsi)}$$

Bizonyítsuk be, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens.

Megoldás. Tekintsük a sor 2^n-edik részletösszegét:

(2)

$$s_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}+$$
$$+\cdots\cdot+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}.$$

Csökkentsük a (2) összeget úgy, hogy az $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ helyett $2\cdot\frac{1}{4}$-et, $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$ helyett $4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$-et írunk, $\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}$

helyett $8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$-et, és így tovább, az utolsó "blokkban" szereplő $\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ helyett $2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$-et vegyünk.

Így azt kapjuk, hogy $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$, amiből látszik, hogy bármely K számhoz megadható olyan n_0, hogy ha $n > n_0$, akkor $s_{2^n} \geq K$ (ugyanis elég olyan n_0-t venni, amelyre $1 + \frac{n_0}{2} > K$, azaz $n_0 > (K-1) \cdot 2$).

Ez definíció szerint azt jelenti, hogy $s_{2^n} \to \infty$, ha $n \to \infty$, amiből az s_n sorozat monoton növekedése miatt az adódik, hogy $s_n \to \infty$, tehát a sor valóban divergens.

Megjegyzés. Még 4-5 megoldás szerepel a könyvben (pl. Cauchy-féle konv.krit.; integrálkritérium(!) Euler-Mascheroni konstans, kondenzációs kritérium(?))

d) Az s_n viselkedése (Kürschák; 1900 körül)

Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 1$, akkor az s_n nem egész szám.

Megoldás. Kezdjük egy definícióval. A p szám paritásának foka k, ha $p = s \cdot 2^k$ és 2^{k+1}-gyel nem osztható p. Ezen fogalommal kapcsolatban megjegyezzük, hogy ha tekintjük az $1, 2, \ldots n$ számokat, akkor ezek között kell egy és csak egy maximális paritású számnak lenni, hiszen ha két ilyen lenne, mondjuk $s \cdot 2^k$ és $q \cdot 2^k$ alakban, akkor ezek között lenne páros számszor 2^k alakú, ami azt jelenti, hog annak a paritása nagyobb lenne, mint k.

Ezek után tegyük fel, hogy van olyan $n > 1$, hogy

$$(9) \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = A, \quad \text{ahol} \quad A \in Z.$$

Legyen $\cdot 2^r$ a legnagyobb paritású tag az $1, 2, \cdots n$ számok között. Ekkor (9) a következő alakban írható:

$$(10) \qquad \frac{u}{2^s \cdot v} + \frac{1}{\cdot 2^r} = A,$$

ahol v és u páratlan és $r > s$ (mivel r volt a maximális paritás).
Szorozzuk be (10) mindkét oldalát $2^s \cdot \cdot v$-vel, akkor az adódik, hogy

$$(11) \qquad u \cdot + \frac{v}{2^{r-s}} = A \cdot 2^s \cdot v,$$

ami ellentmondás, mert a bal oldal első tagja egész, a második pedig nem, így összegük nem adhatja ki a jobb oldalon álló egész számot. Tehát a részletösszegek nem adhatnak egész számot ($n > 1$) esetben).

e) $\sum\limits_{9 \notin n}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ viselkedése (elhagyjuk azokat a tagokat, amelyekben szerepel a 9-es számjegy; Kempner-féle sor).

Bizonyítsuk be, hogy a $\sum\limits_{9 \notin n}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor konvergens.

Megoldás. Írjuk fel az új sor néhány tagját részletesen.

$$\sum_{9 \notin n} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots =$$

(12)

$$= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}+\cdots\frac{1}{88}\right)+\left(\frac{1}{100}+\cdots\frac{1}{888}\right)+\cdots+$$

$$+\left(\frac{1}{10^k}+\cdots+\frac{1}{\underbrace{8\cdot 8\cdots 8}_{(k+1)-\text{szer}}}\right)+\cdots$$

Végezzük el a következő felső becsléseket:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{8}\leq 1+1+\cdots 1 = 8\cdot 9^0,$$

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{88}\leq\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10}=8\cdot 9\cdot\frac{1}{10},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{10^k}+\cdots+\frac{1}{\underbrace{8\cdot 8\cdots 8}_{(k+1)\text{- szer}}}<8\cdot 9^k\cdot\frac{1}{10^k}.$$

$$\vdots$$

Így azt kapjuk, hogy

(13)

$$\sum_{9\notin n}\frac{1}{n}<8\cdot 9^0\cdot\frac{1}{10^0}+\cdots+8\left(\frac{9}{10}\right)^k+\cdots=8\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^k=80,$$

tehát a sor valóban konvergens.

Megjegyzés.

1. A 80-at javították (1975; R. Baillie: $22, 92\ldots$)
2. $\sum\limits_{0\notin n}+\sum\limits_{1\notin n}+\sum\limits_{2\notin n}+\cdots+\sum\limits_{9\notin n}\leq 213$ (ld. Math. Magazin; **68**, 1995)
3. Az első olyan szám, ami miatt div. a sor: 1023456789.

f) Általános iskolai versenypélda.

Határozzuk meg annak a sornak az összegét,amelyet úgy kapunk, hogy a harmonikus sornak csak azon tagjait hagyjuk meg, amelyek véges tizedes tört alakban írhatók.

Megoldás. Nyilván azon $\frac{1}{m}$ alakú számokról van szó, amelyekre $m = 2^p \cdot 5^q$ alakú. Tekintsük a következő részsorokat:

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots&=2\\
\frac{1}{5}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots)&=2\cdot\frac{1}{5}\\
\frac{1}{5^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots)&=2\cdot\frac{1}{5^2}\\
&\vdots\quad\vdots\\
\frac{1}{5^q}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^p}+\cdots)&=2\cdot\frac{1}{5^q}\\
&\vdots\quad\vdots
\end{aligned}\tag{14}$$

A bal oldalon álló sorok pontosan a szóban forgó sor tagjait tartalmazzák (az összes $\frac{1}{5^q\cdot 2^p}$ alakú törtet és csak azokat), a jobb oldalon pedig egy $a = 2$, $q = \frac{1}{5}$ paraméterekkel rendelkező mértani sor áll, amelyek összege $2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$. Tehát a kérdéses sor összege $\frac{5}{2}$.

g*)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

I. Megoldás. Tekintsük a sor $2n$-edik részletösszegét:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{2n} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Vizsgáljuk tehát az

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n} = a_n \tag{21}$$

sorozat határértékét. Figyelembe véve, hogy

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right),$$

az adódik, hogy a_n az $\frac{1}{1+x}$ függvénynek a $[0,1]$ intervallum n egyenlő részre való beosztásához tartozó Darboux féle alsó integrál közelítő összege. És mivel az

$\frac{1}{1+x}$függvény integrálható $[0,1]$-en ezért $n \to \infty$ esetén

$$a_n \to \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [ln(1+x)]_0^1 = ln2.$$

Tehát $s_{2n} \to ln2$, és mivel $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, az adódik, hogy $s_{2n+1} \to ln2$, ami a sorozatok fésűs egyesítésére vonatkozó tétel szerint azt jelenti, hogy $s_n \to ln2$.
Tehát a sor összege $ln2$.

II. Megoldás.

Ez a megoldás mellőzi az integrálást, helyette azt a több középiskolában is ismert tényt használja, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monoton nőve, $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ pedig monoton csökkenve tart e-hez.

A (21) alatti sorozat konvergenciájának vizsgálatától válik el ez a megoldás az előzőtől. Próbáljuk tehát az a_n sorozat határértékét meghatározni. Az előbbiek alapján minden egynél nagyobb ν pozitív egész szám esetén teljesül, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu < e < \left(1 + \frac{1}{\nu - 1}\right)^\nu.$$

Vegyük a fenti egyenlőtlenség e alapú logaritmusát, és osszuk végig ν-vel, akkor az adódik, hogy

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) < \frac{1}{\nu} < \ln\left(1 + \frac{1}{\nu - 1}\right). \tag{22}$$

Tegyük most ν helyébe rendre az

$$n + 1,\ n + 2,\ \ldots,\ 2n$$

számokat, így a következő egyenlőtlenség-rendszert kapjuk:

$$
\begin{aligned}
&\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\\
&\ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right) < \frac{1}{n+2} < \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right),\\
&\qquad\vdots\\
&\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) < \frac{1}{2n} < \ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Figyelembe véve, hogy

$$
\begin{aligned}
&\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln(n+2)-\ln(n+1),\\
&\qquad\vdots\\
&\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = \ln(2n+1)-\ln 2n,
\end{aligned}
$$

összeadva az egyenlőtlenségeket, a bal és a jobb oldalon teleszkópikus összegek vannak, így a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$
\ln(2n+1)-\ln(n+1) < \underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{a_n} < \ln 2n-\ln n.
$$

Mivel $\ln\frac{2n+1}{n+1} \to \ln 2$, így a rendőrelv alapján $a_n \to \ln 2$, amit éppen meg akartunk mutatni.

III. Megoldás.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad \text{ha} \quad |x| < 1.$$

Integráljuk tagonként (!!?)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \quad \text{ha} \quad |x| < 1.$$

Mivel ez a hatványsor az $x = 1$ helyen az $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ konvergens sort adja (ld. Leibniz-kritérium), ezért Abel tétele (!!) szerint az összegfüggvény folytonos a $[0;1]$-on, azaz az $x = 1$ helyen az összegfüggvény csak $\ln(1+1) = \ln 2$ lehet. (ÁBRA kell)

IV. Megoldás.

Igaz az alábbi: ha $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, akkor

$$s_n - \ln n \downarrow \ \text{ és } \ \lim_{n\to\infty} \overbrace{(s_n - \ln n)}^{c_n} \stackrel{\text{def}}{=} c$$

(Euler–Mascheroni-konstans)

Így ha S_n a kérdéses sor n-edik részletösszege, akkor

$$S_{2n} = s_{2n} - s_n = \ln 2n + c_{2n} - \ln n - c_n \to \ln 2.$$

$\Rightarrow$ a sor összege: $\ln 2$.

V. Megoldás.

A Fourier-sorok elméletéből (ld. Szász Pál: A diff. és int. számítás elemei)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right), \text{ ha } x \in (0; 2\pi),$$

amiből: $x = \pi$-t véve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

h) (ld. V. feladat a 40-ből)

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = ?$$

Megoldás.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots; \qquad |x| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots; \ |x| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1+x}{1+x^2} = 1 + x - x^2 - x^3 + x^4 + x^5 - x^6 - x^7 + \cdots.$$

Integrálva:

$$\int \frac{1+x}{1+x^2} dx = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} - \cdots, \text{ ha } |x| < 1.$$

Ebből, mivel

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx =$$
$$= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\cdot \ln(1+x^2),$$

az adódik, hogy

$$\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c = x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,\ \text{ha } |x|<1.$$

Az $x = 0$-s helyettesítés azt adja, hogy $c = 0$ így $|x| < 1$ esetén

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) =$$
$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} - \cdots,\ \text{ha } |x| < 1.$$

Mivel a jobb oldali hatványsor $x = 1$ helyen konvergens (biz. hasonló, mint a Leibniz-kritériumnál) az Abel tételből az adódik, hogy

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{2}\ln(1+1),$$

tehát a kívánt sor összege: $\dfrac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}$.

i) Egy újabb érdekes összeg (az előző "folytatása")

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\ln\sqrt[3]{2}+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

(ld. könyv 130. o.)

Ötlet: $\dfrac{1+x+x^2}{1+x^3}=\cdots$ sorfejtésből kell kiindulni.

Megjegyzés: a h) és i) példákhoz ha nem ugyanannyi (+) és (-) tag van, akkor divergens a sor, ha ugyanannyi, akkor konvergens (ld. XL. feladat a 40-ből).

j) (Ságvári – bocsánat!!!) A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}$ sor problémája.

Segédtétel. (Dirichlet-féle kritérium) *Ha $a_n \downarrow 0$ és $b_1+b_2+\cdots+b_n$ sorozat korlátos, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergens.*

Bizonyítás. (Cauchy-kritériummal)

$$\left|\sum_m^n a_k b_k\right| = \left|\sum_m^n a_k(B_k - B_{k-1})\right| =$$

$$= \left|\sum_m^n a_k B_k - \sum_{m-1}^{n-1} a_{k+1} B_k\right| =$$

$$= \left|\sum_m^{n-1} B_k(a_k - a_{k+1}) - a_m B_{m-1} + a_n B_n\right| \le$$

$$\le K(a_m - a_n) + K\,a_m + K\,a_n \to 0,$$

azaz a sor konvergens.

A példában szereplő sor konvergenciájának bizonyításához most azt fogjuk belátni, hogy az

$$s_n = \sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n$$

sorozat korlátos.

Ez a következő trigonometrikus azonosságból adódik:

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad (x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}). \tag{34}$$

Ezt könnyű belátni például teljes indukcióval, vagy a jobb oldalon levő nevezővel végig szorozva és alkalmazva a

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

összefüggést, a bal oldalon egy teleszkópikus összeget kapunk, amelyben a megmaradó tagok éppen (34) jobb oldalán a számlálóban levő két taggal egyenlőek.

Tehát (34) alkalmazásával az adódik, hogy

$$|s_n| = |\sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n| = \\ = \left|\frac{\cos\frac{1}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}}{2\sin 1/2}\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{1}{2}} = K,$$

azaz $\{s_n\}$ valóban korlátos sorozat.

Ezek után alkalmazzuk a Dirichlet-kritériumot a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \frac{1}{n}$$

sorra az $u_n = \sin n$ és $a_n = 1/n$ szereposztással, és akkor azonnal adódik a szóban forgó sor konvergenciája.

Megjegyzés. Fourier-sorral $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n} = \dfrac{\pi - 1}{2}$.

Kérdés: Abszolút konvergens-e a sor? Nem – azaz feltételesen konvergens.

Bizonyítsuk be, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ sor feltételesen konvergens.

Megoldás. Az előző példa eredményeit figyelembe véve csak azt kell belátni, hogy a sor nem abszolút konvergens.

Tegyük fel az ellenkezőjét, azaz, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{\sin n}{n}|$ sor konvergens. Ebből az adódik, hogy az $s_N = \sum\limits_{n=1}^{N} |\frac{\sin n}{n}|$ sorozat konvergens. De akkor korlátos is, és a $|\sin n| \geq \sin^2 n$ alapján akkor az $s_N^* = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{\sin^2 n}{n}$ sorozat is korlátos. Viszont a $\sin^2 n = \frac{1-\cos 2n}{2}$ összefüggésből azt kapjuk, hogy s_N^* a következő alakú:

$$s_N^* = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos 2n}{n}\,. \tag{35}$$

Tekintettel arra, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$ sor konvergens, hiszen a Dirichlet kritérium itt is alkalmazható, ugyanis a könnyen igazolható

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos(n+1)\frac{\alpha}{2}$$

egyenlőség alapján a

$$\cos 2 + \cos 4 + \cdots + \cos 2n = \frac{\sin n}{\sin 1}\cos(n+1)$$

áll fenn, amiből látszik, hogy a

$$|\cos 2 + \cos 4 + \cdots + \cos 2n| = \Big|\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\Big|$$

összeg n-től független korlát alatt marad, az $\{\frac{1}{n}\}$ sorozat pedig monoton csökkenve 0-hoz tart. Ekkor viszont a (35) jobb oldalán szereplő második részletösszeg konvergens, ha $N \to \infty$, az első pedig (a harmonikus sor divergenciája miatt) nem korlátos, így $\{s_N^*\}$ sem lehet az, ami ellentmondás, tehát eredeti sorunk valóban nem abszolút konvergens.

Megjegyzés. A fenti bizonyításból látszik, hogy már a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n}$ sor is divergens. (Pólya; Sz.-Nagy)

További kérdés:

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{tg} n}{n}$ sor konvergens-e?

Bizonyítsuk be, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg} n}{n}$ sor divergens.

Megoldás. Azt fogjuk bizonyítani, hogy a $\{\frac{\operatorname{tg} n}{n}\}$ sorozat nem tart 0-hoz, és mivel az általános tag 0-hoz tartása szükséges feltétele a konvergenciának, így a sor valóban divergens lesz.

Itt alkalmazni fogjuk az alábbi – önmagában véve is érdekes – tételt az irracionális számok racionális számokkal való approximációjáról (lásd pl. XXIV. feladat a 40-ből).

Tétel. *Legyen α irracionális szám. Ekkor létezik végtelen sok olyan p, q egész szám, amelyekre*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Legyen most $\alpha = \pi/2$ és q-t pedig vegyük egy 1-nél nagyobb páratlan számnak (a tétel bizonyításából kiderül, hogy q vehető ilyennek), úgy, hogy teljesüljön az

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{1}{q^2}$$

egyenlőtlenség, amiből adódik, hogy

$$\left|p - q\frac{\pi}{2}\right| < \frac{1}{q} < \frac{\pi}{4}.$$

Mivel q páratlan, a ctg függvény differenciálható a $[q\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, q\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}]$ intervallumon, így ott alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel, azaz létezik olyan z érték p és $q\frac{\pi}{2}$ között, amelyre fennáll, hogy

$$|\operatorname{ctg} p| = \left|\operatorname{ctg} p - \operatorname{ctg} q\frac{\pi}{2}\right| = \left|p - q\frac{\pi}{2}\right| \cdot \frac{1}{\sin^2 z}\,.$$

De a kérdéses intervallumra $\frac{1}{\sin^2 z} \le 2$, így

$$|\operatorname{ctg} p| \le 2\Big|p - q\frac{\pi}{2}\Big|,$$

amiből

$$|\operatorname{tg} p| \ge \frac{1}{2|p - q\frac{\pi}{2}|} > \frac{q}{2} \ge \frac{p}{4}\,,$$

mivel $\frac{p}{q} \le 2$.

Ezt figyelembe véve az adódik, hogy végtelen sok p esetén

$$\Big|\frac{\operatorname{tg} p}{p}\Big| \ge \frac{1}{4}\,,$$

amiből valóban következik, hogy $\frac{\operatorname{tg} n}{n} \not\to 0$, ha $n \to \infty$.

Érdekességként jegyezzük meg, hogy ma még nem ismert pl. a $\{\frac{\operatorname{tg} n}{n^2}\}$ sorozatról sem, hogy nullához tart-e vagy nem, de pl. $\{\frac{\operatorname{tg} n}{n^8}\}$-ról már tudjuk, hogy nullához tart. (ld. Math. Magazine **72**, 1999)

Érdekes, hogy azt sikerült belátni, hogy

$$\frac{\operatorname{tg} n}{n^2} \le \frac{11 \cdot 10^6}{n}, \text{ ha } n \le 10^{8\cdot 10^6}.$$

l) A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ sor problémája.

Bizonyítsuk be, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

1. megoldás. Alkalmazzuk az alábbi becslést:

(2)
$$s_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n},$$

majd az egyes tagokat bontsuk fel törtek különbségére az alábbi módon:

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1-\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3};\quad \ldots,\quad \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Így (2) jobb oldala helyett az írható, hogy

$$1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} = 2-\frac{1}{n},$$

hiszen a közbülső tagok kiesnek, ugyanis ez egy teleszkópikus összeg. Azt kapjuk, hogy

$$s_n \le 2-\frac{1}{n} < 2,$$

tehát a részletösszegek sorozata korlátos, és mivel s_n monoton növő, ezért konvergens is, tehát az (1) sor valóban konvergens, sőt, összege nem nagyobb 2-nél.

Megjegyezzük, hogy az $s_n \le 2-\frac{1}{n}$ állítás teljes indukcióval is bizonyítható, amit az olvasóra bízunk (érdekessége ennek a bizonyításnak, hogy a „gyengébb" $s_n \le 2$ egyenlőtlenség bizonyítására a teljes indukciós módszer nem alkalmazható).

Megjegyzés. Még van a könyvben 4 további módszer (kondenzációs tétel; Cauchy-féle konv.kritérium, integrálkritérium (!))

2. megoldás. Végül egy szép geometriai megoldást adunk, amely során azt az önmagában is érdekes tényt mutatjuk meg, hogy az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\cdots$, $\frac{1}{n}$ oldalú négyzetek elhelyezhetők az egységnyi oldalú négyzetben úgy, hogy ne fedjék egymást.

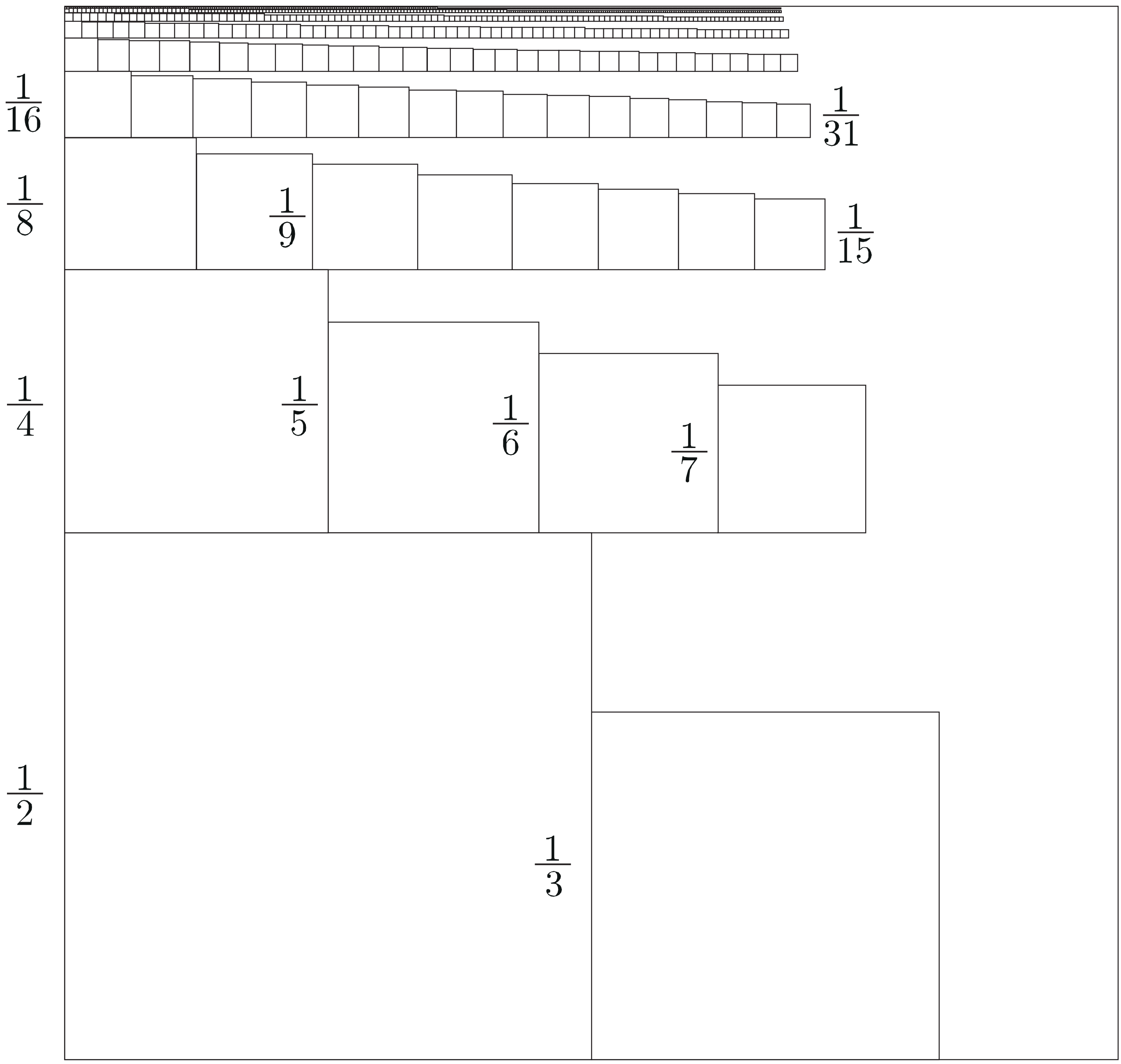
Használjuk fel, hogy

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1,$$

továbbá, hogy

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}<\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}=2^n\cdot\frac{1}{2^n}=1.$$

Ezek alapján elkészíthetjük az alábbi ábrán vázolt konstrukciót:



Most egy szép középiskolai versenypélda (Pintér Lajostól)

Példa. Adjuk meg azokat a páronként különböző a_1, a_2, $\dots$, a_n természetes számokat, amelyekre

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}=1.$$

Megoldás. Nyilván vehetjük a számokat az

$$a_1<a_2<\cdots<a_n$$

növekvő sorrendben.

Így ha $a_1 = 1$, akkor már több számot nem is vehetünk, hisz akkor $1/a_1^2 = 1$.

Ha viszont nem szerepel a számok között az 1-es, akkor, mivel

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2,$$

ezért bármilyenek is az $a_1, \cdots, a_n$ számok, mindig az teljesül, hogy

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < 1,$$

tehát a feladatnak akkor és csak akkor van megoldása, ha $n = 1$, és ekkor az egyetlen megoldás az $a_1 = 1$.

Megjegyzés. Egy szép alkalmazás (analízis – számelmélet – valószínűség) (Könyvem 50. oldal)

Kérdés: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ =? (1644 Pietro Magnoli; Baseli probléma).

Euler 1734; 1744.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{100} = 1,54977$$

$$1 + \frac{1}{2^2} - \cdots + \frac{1}{10^4} = 1,63498$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = 1,6449340668482264364 7$$

(A $\dfrac{\pi^2}{6}$-nak is ez az első 21 jegye!!!; memória) + 10 év (Jacob Bernoulli: bárcsak a bátyám...) (Csészék, villamos; mentő; szőnyeg)

Bizonyítsuk be, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Megoldás. Elsőnek vázoljuk Euler egyik módszerét, amellyel megerősítette sejtését. (Azért fogalmazunk ilyen óvatosan, mert ebben a bizonyításban van több olyan lépés, amelyek jogosságát Euler csak sejtette és később nyertek ebben a formában bizonyítást.)

Induljunk ki abból, hogy egy algebrai polinom, amelynek zéróhelyei: $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$, a következő alakban írható:

$$\begin{aligned} P(x) &= A(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n) = \\ &= B\Big(1-\frac{x}{r_1}\Big)\Big(1-\frac{x}{r_2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{x}{r_n}\Big), \end{aligned} \tag{7}$$

ahol $r_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n$. Mint ismeretes, a sin függvény a következő sor-alakban írható fel:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots. \tag{8}$$

Leosztva x-szel mindkét oldalt, a következőt kapjuk:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots, \tag{9}$$

másrészt, mivel $\frac{\sin x}{x}$-nek a zéróhelyei $\pm k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$, ezért a (7) mintájára (9)-et írhatjuk a következő szorzatalakban:

$$(10) \qquad \frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

Összehasonlítva a (9) és (10) jobb oldalán levő x^2-es tag együtthatóit, az adódik, hogy

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \cdots,$$

amiből valóban kapjuk, hogy

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots.$$

Megjegyzés. Sok sebből vérzik (vannak precíz bizonyítások is a könyvben). Jellemző: The proof Euler failed...

További összegek (Euler)

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{2^0}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{1}\pi^2$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{2^2}{5!}\frac{1}{3}\pi^4$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots=\frac{2^4}{7!}\frac{1}{3}\pi^6$$
$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\cdots=\frac{2^6}{9!}\frac{3}{5}\pi^8$$
$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\cdots=\frac{2^8}{11!}\frac{5}{3}\pi^{10}$$
$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\cdots=\frac{2^{10}}{13!}\frac{691}{105}\pi^{12}$$
$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\cdots=\frac{2^{12}}{15!}\frac{35}{1}\pi^{14}$$
$$1+\frac{1}{2^{16}}+\cdots=\frac{2^{14}}{17!}\frac{3617}{15}\pi^{16}$$
$$1+\frac{1}{2^{18}}+\cdots=\frac{2^{16}}{19!}\frac{43867}{21}\pi^{18}$$
$$1+\frac{1}{2^{20}}+\cdots=\frac{2^{18}}{21!}\frac{1222277}{55}\pi^{20}$$
$$1+\frac{1}{2^{22}}+\cdots=\frac{2^{20}}{23!}\frac{854513}{3}\pi^{22}$$
$$1+\frac{1}{2^{24}}+\cdots=\frac{2^{22}}{25!}\frac{1181820455}{273}\pi^{24}$$
$$1+\frac{1}{2^{26}}+\cdots=\frac{2^{24}}{27!}\frac{76977927}{1}\pi^{26}$$

Megjegyzés. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$; Apery (irracionális)

További kérdés. Mivel $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^{3/2}} > \frac{1}{n^2}$, így érdekesek az m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}$ példák. Ezek mind könnyen adódnak az ú.n. **kondenzációs tétel**lel. Miszerint *ha* $a_n \geq 0$ *;s* $a_n \downarrow 0$*, akkor a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *és* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sorok ekvikonvergensek* (azaz...)

A bizonyítás alapötlete:

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{n+1} a_{2^{n+1}} = 2^n \cdot a_{2^{n+1}} \leq a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}} \leq 2^n \cdot a_{2^n}.$$

Pl.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konv.$\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^{3/2}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n$ konv., ami konv. mértani sor.

Egyébként ezek a példák az integrálkritériummal is könnyen megoldhatók (ld. a könyv 59-60. oldalán).

n) A prímszámok reciprok-sora.

A természetes számok és a négyzetszámok reciprokaiból álló sorokhoz hasonlóan érdekes annak a vizsgálata is, hogy vajon a *prímszámok* reciprokaiból álló sor konvergens-e vagy divergens. Azaz, ha $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ jelenti a prímszámok nagyság szerint rendezett sorozatát, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \tag{6}$$

sor konvergenciája a kérdés.
Bizonyítsuk be, hogy a (6) sor divergens (ld. Algebra kurzusok).

Megoldás. Ennek a ténynek is sokféle bizonyítása ismert, mi most egy aránylag egyszerű indirekt bizonyítással ismerkedünk meg.

Legyen p_n az n-edik prím, és tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ sor konvergens. Fixáljuk k-t úgy, hogy

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2} \tag{7}$$

legyen (ez a Cauchy-kritérium alapján lehetséges). (Természetesen, ha a középiskolában nem ismert a Cauchy-kritérium, akkor azt kell hangsúlyozni, hogy egy konvergens sorból nyilván el tudunk hagyni annyi tagot, hogy a maradék kisebb legyen egy előre adott számnál.) Legyen $Q = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ (tehát az első k prím szorzata). Tekintsük a következő sort:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1+iQ}\,, \tag{8}$$

jelölje $S(r)$ ennek a sornak r-edik részletösszegét, azaz legyen

$$S(r) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{1+iQ}\,.$$

Mivel $1 + iQ$ relatív prím Q-hoz, így az $S(r)$-ben levő összes tört nevezőinek prímtényezői a következő prímekből kerülnek ki:

$$P(r) = \{p_{k+1},\ p_{k+2},\ \cdots,\ p_{m(r)}\}.$$

Most jelölje $S(r, j)$ az $S(r)$ összeg azon tagjainak az összegét, amelyek nevezői rögzített (nem feltétlenül különböző) j prímtényezőből állnak. Minden ilyen tag $1/(q_1 \cdots q_j)$ alakú, úgy, hogy minden $q_i \in P(r)$. De minden ilyen tag legalább egyszer előfordul a következő hatvány kifejtésében:

$$\Big(\sum_{n=k+1}^{m(r)} \frac{1}{p_n}\Big)^j.$$

Ezt figyelembe véve ((7) alapján) adódik, hogy

$$S(r, j) < \Big(\frac{1}{2}\Big)^j,$$

ebből azonban minden r-re azt kapjuk, hogy

$$S(r) = \sum_j S(r, j) < \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^j = 1.$$

Így azt kapjuk, hogy a (8) sor részletösszegei korlátos sorozatot alkotnak, azaz (lévén a sor pozitív tagú) a (8) sor konvergens. De ez ellentmondás, mert

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 + iQ} > \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i + 1)Q} \geq \frac{1}{2Q} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i},$$

így a harmonikus sor divergenciája miatt (8) is divergens.

Tehát ellentmondásra jutottunk, azaz a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

sor divergens.

o) Egy csodálatosan szép példa.

Mutassuk meg, hogy van két olyan szomszédos négyzetszám, amelyek közé legalább 10^6 db prímszám esik.

Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz minden n természetes szám esetén n^2 és $(n+1)^2$ közé kevesebb, mint 10^6 db prímszám esik.

Jelölje $p_1^{(n)}, \ldots, p_{s_n}^{(n)}$ ezeket a prímszámokat. Ekkor tehát $s_n < 10^6$ teljesül minden n esetén. Nyilvánvaló, hogy ekkor

$$\frac{10^6}{n^2} > \frac{1}{p_1^{(n)}} + \frac{1}{p_2^{(n)}} + \cdots + \frac{1}{p_{s_n}^{(n)}}\,.$$

Viszont, ha mindkét oldalt összegezzük, adódik, hogy

$$10^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}\,,$$

ahol a jobb oldali összegben az összes prímszám reciprok összege van. Ez nyilvánvaló, hogy ellentmondás, mert a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ sor pedig divergens, mégpedig úgy, hogy (pozitív tagú lévén) a részletösszegek tartanak a végtelenbe. Azaz eredeti állításunk valóban igaz.

Megjegyezzük, hogy 10^6 helyett természetesen bármilyen nagy szám vehető.

A HASZNOSSÁG

1.) $0,\dot{1}\dot{3}$

2.) $\sqrt{2} = 1,414213562\cdots$ Hogyan? (Előre adott pontossággal.)

”akárhány” ez csak a végtelen lehet

Pl. 2006-ban Kondo: $200 \cdot 10^9$ tagig (13 nap 14 óra gépen) Hogyan?

3.) $\pi = 3,141592653\ldots$

Pl. 2013 : $\pi = 3,14\ldots$ ($8 \cdot 10^{24}$ jegy; Cal. Santa Clara Univ.: 26 gép 37 napig. Hogyan? Miért kell?)

Pl. Mars szonda 103.522 km eltérés, ha $\pi = 3,14$ vagy $\pi = 3,14\cdots$ (31 jegy). Ez a Hold–Föld táv. harmada.

Ad 2. $\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$ Hogyan?

Bizonyítható (Newton binomiális tétele), hogy

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k + \cdots + x^n.$$

(Pl. teljes indukció, HF).

Pl. $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$.

$n \to \dfrac{1}{2}$ (NEWTON) (Jogosság: 100 év múlva Abel)

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 +$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 +$$

$$+\cdots+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^n + \cdots$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!} + \cdots$$

(Minél több tag, annál több tizedes jegy adódik, HF.)
Ennél van sokkal ”gyorsabb” módszer is.

Megjegyzés. I. Lyukak; pl. binomiális együtthatók kombinatórikus jelentése. Abel: binomiális sor (tetszőleges α-

ra)

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \ |x| < 1;$$

és pl. $x = 1$-ben $\alpha > -1$ konvergens csak (Newton után 100 évvel; Newton érezte $x = 1$-re; $\alpha = \frac{1}{2}$ esetén rendben van. $|x| < 1$-re is.)

II. *Gyorsítás.* Pl.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k,$$

$x = 1$ helyett $x = \frac{1}{2}$ sokkal kisebb lesz a hiba $-\left(\frac{1}{2}\right)^k$ az 1 helyett.

Ad e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (elemi módon; v.ö. Taylor-sor).

Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e. \tag{2}$$

Megoldás. Jelöljük a (2) sor n-edik részletösszegét s_n-nel, azaz

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\,. \tag{3}$$

Be fogjuk látni, hogy $s_n \to e$, ha $n \to \infty$.

A binomiális tétel alkalmazásával adódik, hogy

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{2!} + \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n^n}\cdot\frac{1}{n!} \\
&\le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n,
\end{aligned}$$

tehát azt kaptuk, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le s_n. \tag{4}$$

Most rögzítsünk egy $k \in \mathbb{N}^+$ számot. Legyen $n > k$, és $(1+\frac{1}{n})^n$-nek a binomiális kifejtéséből hagyjuk el a $(k+1)$-edik utáni tagokat. Ezzel az $(1+\frac{1}{n})^n$ kifejezést csökkentjük, azaz

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+1+\frac{n(n-1)}{n^2}\frac{1}{2!}+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{3!}+\dots+$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!}$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+$$
$$+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Ha $n\to\infty$, a bal oldal határértéke e, a jobb oldalé pedig (k rögzített)

$$1+1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{k!}\,.$$

Ebből tehát az adódik, hogy

$$e\geq 1+1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{k!}=s_k. \tag{5}$$

Mivel (5) minden k-ra igaz, így k helyett n-et írva és figyelembe véve (4)-et, azt kapjuk, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq s_n\leq e.$$

A rendőrelv alapján adódik, hogy $\lim_{n\to\infty} s_n = e$, azaz (2)-t sikerült belátnunk.

Egy fontos példa.

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin(2\pi e n!)$ határértéket!

Megoldás.

$$n \cdot \sin(2\pi e n!) = n \cdot \sin\left[2\pi n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right] =$$

$$= n \cdot \sin\left[2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right] (*),$$

mert $\sin n!\left(1+1+\cdots\frac{1}{n!}\right)\cdot 2\pi = 0$. Viszont $(*)$ a következőképpen becsülhető:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 2\pi}}{n \cdot \sin 2\pi \frac{1}{n+1}} \le (*) \le \underset{\substack{\downarrow \\ 2\pi}}{n \cdot \sin 2\pi \frac{1}{n}},$$

hiszen

$$n \cdot \sin \frac{2\pi}{n+1} = \underbrace{\frac{\sin \dfrac{2\pi}{n+1}}{\dfrac{2\pi}{n}}}_{\substack{\downarrow \\ 1 \cdot 2\pi}} \cdot 2\pi$$

és

$$n \cdot \sin\frac{2\pi}{n} = \underbrace{\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi\frac{1}{n}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \cdot 2\pi$$

$$\downarrow$$

$$1 \cdot 2\pi$$

Tehát a határérték: $2\pi \Rightarrow e$ irracionális

Megjegyzés. A $(*)$ felső becslésénél a $\sum$ minden tagjában minden tényező helyett $(n+1)$-et véve egy $\frac{1}{n+1}$ kvóciensű mértani sort kapunk.

Ad π) Korábban említettük: Madhava; Nilakhanta; Leibniz

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \Rightarrow \operatorname{arctg} x =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \text{ ha } |x| < 1; \text{ Abel- tétel.}$$

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right); \text{Newton}$$

Lassú, de szép.

i.e.	2000 (B)	$3,\mathbf{125}$
	(E)	$3,\mathbf{16}$
	250 (A)	$3,\mathbf{141}8$
i.sz.	263 :	5 tizedesjegy
	480 :	7
	1429 :	14
	1610 :	35
	1719 :	112
	1847 :	152
	1874 :	527
	1973 :	1 001 250
	2002 :	1 240 000 000 000
	2010 :	5 000 000 000 000
	2012 :	1 241 100 000 000 000 000
	2013 :	8 000 000 000 000 000 000 000 000

A továbbiakban bizonyítás nélkül sorolunk fel néhány érdekes előállítást (a szerzővel és évszámmal együtt).

François Viète (kb. 1579):

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots.$$

John Wallis (kb. 1650):

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdots}.$$

William Brouncker (kb. 1650):

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cdots}}}} \, .$$

Madhava, James Gregory, Gottfried Wilhelm Leibniz (1450–1671):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

Isaac Newton (kb. 1666):

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\Big(\frac{2}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \cdots\Big).$$

Srinivasa Ramanujan (1914):

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42\,n+5}{2^{12\,n+4}} \, .$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{[1103 + 26390\,n]}{396^{4n}} \, .$$

David Chudnovsky és Gregory Chudnovsky (1989):

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^3(3n)!} \frac{13591409 + n\,545140134}{(640320^3)^{n+1/2}} \, .$$

(Minden újabb tag hozzávétele kb. 15 újabb pontos jegyét adja π-nek.)

Jonathan Borwein és Peter Borwein (1989):

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \frac{(A + nB)}{C^{n+1/2}} ,$$

ahol

$$\begin{aligned} A &:= 212175710912\sqrt{61} + 1657145277365 \\ B &:= 13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750 \\ C &:= [5280(236674 + 30303\sqrt{61})]^3. \end{aligned}$$

(Minden újabb tag hozzávétele kb. 31 újabb pontos jegyét adja π-nek.)

David Bailey, Peter Borwein és Simon Plouffe (1996):

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \Big(\frac{4}{8\,i+1} - \frac{2}{8\,i+4} - \frac{1}{8\,i+5} - \frac{1}{8\,i+6} \Big).$$

Ez utóbbi módszerről részletesen olvashatunk: [14]-ben (Math. Gazette, Vol. 83, Nr. 498, 1999).

Egy porszem virágot terem,
S egy szál vadvirág az eget,
Fogd föl tenyeredbe a végtelent,
S egy perc alatt élj évezredet.

(W. Blake)