Ritmus a matematika történetében és a matematika tanításában

Kántor Sándorné Varga Tünde
DE Matematikai Intézet

- Ebben az előadásban J. Bruner kognitív reprezentációs elméletére támaszkodva bemutatjuk a matematika történetében és a matematika tanulásában a három reprezentációs forma, vagyis az enaktív, az ikonikus és a szimbolikus sík ritmikus megjelenését.

Bruner reprezentációs elmélete

Bruner dolgozta ki a gondolkodásra és a tanulásra vonatkozó kognitív elméletet.

Az ismeretszerzés három síkja:

- 1. Enaktív (materiális) sík
- 2. Ikonikus (képi) sík
- 3. Szimbolikus (nyelvi) sík

Brunner reprezentációs elmélete

- Brunner szerint a tanulók önálló felfedeztető munkájának az alapja a tapasztalat, az illusztráció, amit verbális tanulás kísér.
- Ha egy új fogalmat vagy definíciót tanulunk, akkor a felfedeztető tanulásnál célszerű a Bruner féle három reprezentációs sík ritmusának a követése.

Ritmus a tanításában

- Az ismeretszerzés konkrét tárgyi tevékenységek, cselekedetek , manipulációk segítségével megy végbe.
- A fogalmak megértésénél és rögzítésénél az információkat legtöbb esetben képi síkon tároljuk, a probléma megoldásnál a tanulóknak szüksége van a képi megjelenítésre.
- Az ismereteket matematikai szimbólumok és a nyelv segítségével rögzítjük.

Ritmus a matematika történetében

- A tanulók egyéni tanulásmódja és a matematikatörténet útja sokban hasonló.
- A geometriai ábrák és az algebrai formulák a matematika történetében egyenrangú komponensek.
- Így Bruner elmélete azt sugallja, hogy a tanulási-tanítási folyamat sokkal hatékonyabb az új ismeretek elsajátításánál, ha az enaktív síktól haladunk az ikonikus síkon át a szimbolikus síkig.

- A bemutatásához egyrészt Tobias Mayer Matematikai Atlasza (Mathematischer Atlas, Pfeffel, 1745) XLV. tábláját fogjuk felhasználni.
- Másrészt megmutatjuk, hogy hogyan ismétlődik a Mayernél tapasztalt ritmus a 21. századi középiskolai tanításban, a tehetséggondozásban és a versenyeken.

Tobias Mayer(1723-1762)

Tobias Mayer élete és munkássága

- Édesapja kerékgyártó és kútfúró mester volt, tőle tanult meg írni és rajzolni. Szüleit korán elveszítette, először édesapját, utána édesanyját is, így került be az esslingeni árvaházba.
- Ott a tüzérség egyik tisztje felfigyelt a 14 éves gyerek rajztehetségére és vele rajzoltatta meg a helyi kórház építészeti rajzait. 16 éves korában Esslingen és környékének térképét készítette el.
- Az esslingeni latin iskola matematikából keveset tanított, így autodidakta módon képezte magát .

Tobias Mayer élete és munkássága

- Az esslingeni latin iskola matematikából keveset tanított, így autodidakta módon képezte magát,

  Wolff hallei professzor könyvei alapján.
- 18. születésnapjára megírta az első Geometria könyvét: *Die Anfangsgründe aus der Geometrie,alle Aufgabe aus der Geometrie, vermittels der geometrischen Linien leicht aufzulösen (1741),* amelyben geometriai feladatokat oldott meg analitikus módszerekkel.
- Foglalkozott a körbeírt szabályos sokszögek szerkesztésével.

ERSTLINGE

von

TOBIAS MAYER,

aufs neue herausgegeben

von

J. F. Benzenberg.

Nebst einigen
Nachrichten von seinen Erfindungen und
seinem Leben.

Mensor maris et terrae, et mangni sine limite coeli.

Mit 4 Kupfertafeln.

Düsseldorf bey J. C. SCHREINER, 1812.

Tobias Mayer élete és munkássága

- 1744-1746 között Augsburgban fejlesztette rajztudását, nyelveket tanult, bővítette matematikai ismereteit.
- 22 évesen készítette el a 60 rézmetszetből és 8 kiegészítő lapból álló *Mathematischer Atlas* (Pfeffel, Augsburg, 1745) munkáját, amelyben Wolff Anfangsgründe könyvének felépítését követte.

Mathematischer Atlas (1745)

Mathematischer Atlas

- A Matematikai Atlaszból a német gyűjteményekben 8 példány található,
- a Debreceni Református Kollégium Nagykönyvtárában van a 9. példány,
- A stuttgarti Landesbibliothek-ben és a Debreceni Református Kollégium Nagykönyvtárában színezett példány van.
- 60 táblán rézmetszetekben dolgozta fel a matematika középfokú anyagát és 8 kiegészítő táblában foglalta össze a felsőbb matematikát.

Mathematischer Atlas

- számolás összeadás, kivonás, szorzás, osztás, gyökvonás , prímszámok, különböző mértékek (hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom), arányosság, logaritmus fogalma és alkalmazásai, sík- és térgeometria elemei,
- geodéziai alkalmazások, földterületek felosztása,
- *geometriai eszközök(Tab.XI.)*,
- lencsék és tükrök, a képalkotás szabályai,
- súlymérés, hordó űrtartalmának meghatározása,
- különböző objektumok (torony, épület) magasságának a meghatározása trigonometria segítségével,
- szférikus trigonometria, csillagászat, kilenc különböző napóra, a naptárkészítés problémái (napok, hónapok, évek), Kopernikusz világképe, a Kepler probléma megoldása, holdfogyatkozás, napfogyatkozás, üstökösök, a Hold és a Nap pályája,

TAB. XI.
zeiget,
Die Beschaffenheit der fürnehmsten geometrischen Instrumente an.

§. 1.

Die Geometrische Instrumente gehören entweder zu Aufreißung u. Abmeßung der Lineen, oder der Winckel, u. dieses Beydes entweder auf dem Papier oder im Felde. Zu Aufreißung der Lineen auf dem Papier brauchet man die Lineale, dergl. Fig. 1., ihre Länge ist von ½ Schuh biß 2. Schuh, die Breite nimt man gemeinigl. 1. biß 2 Zoll oder drüber, damit man etl. tausendtheilige Maasstäbe u. d. gl. darauf zeichnen köne, man machet sie von Holz, Elffenbein, Meßing etc. und bestehet ihre fürnehmste Eigenschafft darinnen, daß dieselbe accurat gehobelt, damit die daran gezogene Lineen nicht krum heraus komen; wie dieses zu untersuchen, ist bey eben solcher Figur mit IKLM etc. angedeutet, neml. man reißet erstl. an der Seite des Lineals ML eine Linee o p n, kehret hernach das Lineal um, also daß I auf i, K auf k, zu liegen komt, u. ziehet an eben der vorigen Seite m l wieder eine Linee an die vorgerißene, o q n, wenn nun diese mit der vorigen zusamen in eines fällt, so ist diese Seite des Lineals gut, wo aber nicht als wie hier geschichet, so kan dasselbe keine gerade Linee geben.

§. 2.

Bey Fig. 2. ist ein so genanter Winckelhacken, mit welchem man die perpendicular Lineen reißet, und kan solcher am besten probirt werden, wenn man ihn an eine nach geometrischer Methode gerißene perpendicular Linee appliciret, und siehet ob er mit derselben überall eintrifft. Fig. 3. ist ein parallel=Lineal, nach dem man die parallel Lineen aufreißet, es kan gleichfalls durch etliche mit dem Zirckel gerißene Parallel=Lineen examiniret werden.

§. 3.

Bey Fig. 4. und 5. ist angewiesen, wie mit Hülffe zweyer dreyeckichten Lineale ABC und DEF zu einer Linee GH so wohl parallel= als perpendicular Lineen zu reißen sind; Wen man dieselbe leget wie Fig. 4. zeiget, so kan man durch Schiebung des Lineals DEF an der Seite des Andern BC, mit DE die parallel=Lineen, u. bey Fig. 5. an der Seite EF die perpendicular=Lineen zu GH ziehen.

§. 4.

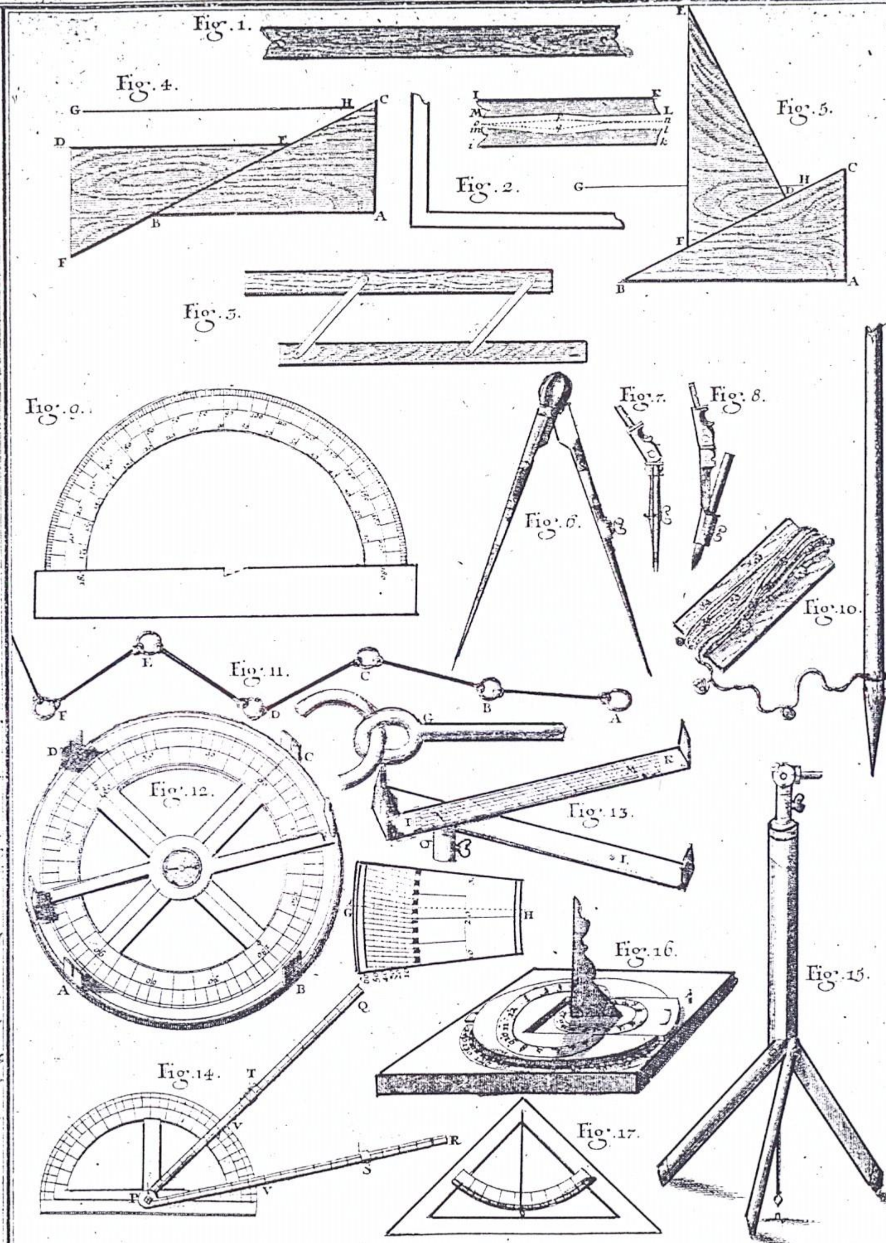
Fig. 6. ist ein Reiss=Zirckel, an welchem der eine Fuß kan ausgenomen u. eine Reiss=Feder, dergl. Fig. 7. oder auch ein Rohr mit einem Bleystifft, wie Fig. 8. ist, dafür kan eingeschraubet werden. sein Gebrauch ist in der gantzen Mathematic bekant genug; Er dienet neml. zu Abmeßung, Auftragung u. Theilung so wohl der geraden als krummen Lineen.

§. 5.

Fig. 9. ist ein Transporteur, welcher zum Abmeßen u. Aufreißen der Winckel gebraucht wird, zu solchem Ende muß derselbe in seine 180 Grade richtig eingetheilet seyn, welches man mit dem Zirckel hernach probiren kan, wenn man 7. 12. 13. 22. u. s. w. grade faßet, solche etliche mal umschläget, und dabey zusiehet, ob der Zirckel jedesmal wieder in einen gantzen Grad eintrifft. Die Größe ist am bequemsten, wenn der Diameter deßelben nicht viel über oder unter 4 gemeine Zoll ausmachet.

§. 6.

Auf dem Felde hat man zum Ausmeßen und Abstecken der Lineen eine Messschnur, dergleichen bey Fig. 10. vorgerißen, dieselbe wird, damit sie bey naßem Wetter sich nicht zusammen ziehe, und kürtzer werde, in einer Mixtur von Leinöhl, Unschlitt und Wachs gesotten, hernach ausgestrecket, und mit Wachs wieder starck gerieben. Die Länge derselben ist gemeiniglich 5. Ruthen, oder 50 gemeine Rheinländische, Frantzösische Schuh u. d. gl. bey jedem Schuh wird ein Gemerck von Rothem Tuch, Blech oder anderm Metall angehänget, auf welchem die Zahl der Schuhe exprimiret ist. an beyden Enden ist ein Ring von Eisen, durch welchen man einen Stab stecken könne, angemacht, u. kan man solche nach dem Gebrauch auf ein darzu gemachtes Bretlein aufwickeln.



§. 7.

Weil man wegen des Ausdehnens und Einziehens diesen Schnüren nicht viel trauen darf, so nimt man an deren Statt eine Messkette, Fig. 11. deren Gelencke AB, BC, CD DE, EF etc. alle durchgehends accurat einen Schuh lang sind, sie werden von Eisen oder Meßing gemeinigl. 50. Schuh lang gemacht, u. deren Gelencke mit Ringen zusamen gehänget. Die Stärcke des Drats, woraus sie gemacht werden, ist bey G ungefähr angedeutet.

§. 8.

Zu dem Abmeßen der Winckel im Felde und zum Auftragē derselben, ist das sogenannte Astrolabium, dergl. Fig. 12. vorstellet, das bequemste Instrument, es wird gemeinigl. von Meßing, bißweilen aber auch von Holz, im Diametro von 8 biß 12. Zoll, gemacht, rings herum ist es in 360 grade, und durch Hülffe der Transversal=Lineen von 10 zu 10, oder auch von 5. zu 5. Minuten, fleißig eingetheilet: bey jedem 90. grad ist ein Absehen oder Dioptra A, B, C, und D befestiget, und um das Centrum ist eine bewegliche Regel EF angemacht, an deren beyden Enden ebenfalls zwey Dioptern E und F stehen, die etwas höher sind als die vorige. Wie die Eintheil. in 10. biß 10 Minuten geschiehet, ist bey GH mit einem Bogen von 20. Graden deutl. angewiesen, da denn z. E. mit der Punctirten Linee GH 22°. 20′ abgeschnitten sind.

§. 9.

Anstatt des astrolabii bedienet man sich auch des Recipiangle, davon die beste Art bey Fig. 13. vorgestellet, es sind 2. Regeln von Meßing, deren die obere etwas kürzer als die untere welche in dem Centro N also in einander gemacht, daß sich die obere über der untern frey bewegen läßet: an allen 4 Enden sind Absehen aufgerichtet, deren Öffnungen just über das Centrum N lauffen müßen. Von I biß K ist ein geradliniger Transporteur aufgerißen, auf welchem die Minuten von 5 zu 5 zufinden. und bey dem Anfang deßelben I, ist ein Stücklein Meßing aufgelöthet, welches so dick als die obere Regel. Die Puncte L und M, müßen von dem Centro N accurat in der Weite von 60 graden abstehen; endlich ist unten bey O noch eine Hülse oder Röhre mit einer Stellschrauben befestiget, damit man das Instrument auf einen Stab oder anderes Stativ aufstellen könne. Wenn man nun im Felde mit diesem Recipiangle einen Winckel abfaßen will, so stellet man daßelbe in den Punct, in welchem der Winckel formiret wird, richtet die untere Regel nach der einen Linee und stellet sie fest, hernach wendet man auch die obere nach der andern Linee, so den Winckel beschließet, und wenn sie recht gestellt, so faßet man mit einem Zirckel die Weite der beyden Puncten M u. N, träget sie auf den geradlinigten Transporteur von I gegen K, so findet sich daselbst, wo der andere Fuß des Zirckels hinfället, die Größe des gegebenen Winckels in Graden und Minuten.

§. 10.

Fig. 14. stellet das Zublerische Instrument vor, mit welchem man so wohl die Winckel, gleich als mit einem andern halben oder gantzen Circul, abfaßen, als auch eine Höhe oder Weite ohne Rechnung abmeßen kan. Es ist ein halber Circul in 180 eingetheilt, in deßen Centro P zwey bewegl. Reguln PQ u. PR welche in 100, 200, oder 300 gleiche Theile eingetheilt, die man in dem Felde für Schuhe, Ruthen, u. d. gl. kan gelten laßen, auf einer jeden solchen Regel ist ein Schieberlein T und S, welches man auf und ab bewegen kan. an statt der Absehen dienen hier drey Spitze, dern die eine im Centro, die beyde andere aber auf denen Schieberlein T und S aufgestellet. Unten bey V ist an beyden Regeln eine Stellschraube, mit welcher man die Regeln an dem halben Circul befestigen kan, endlich hat es unter dem Centro eine Hülse, wie Fig. 12. und 13. auch haben, damit solches bey dem Gebrauch auf ein Stativ, davon bey Fig. 15. die beste Façon angezeiget, könne gestellet werden. Die Structur des Stativs ist aus der Figur, ohne weitere Beschreibung, deutlich abzunehmen.

§. 11.

Fig. 16. stellet ein Instrument vor mit dem die Mittags=Linee u. Plagæ mundi bey Soñenschein geschwind u. leicht kan gefunden u. auch zur Noth ein Feld kan in Grund gelegt werdē, es sind eigentl. zwey Sonnen=Uhren, neml. eine horizontale, und ein azimuthale, deren Verfertigung unten in der Gnomonic soll gezeiget werden.

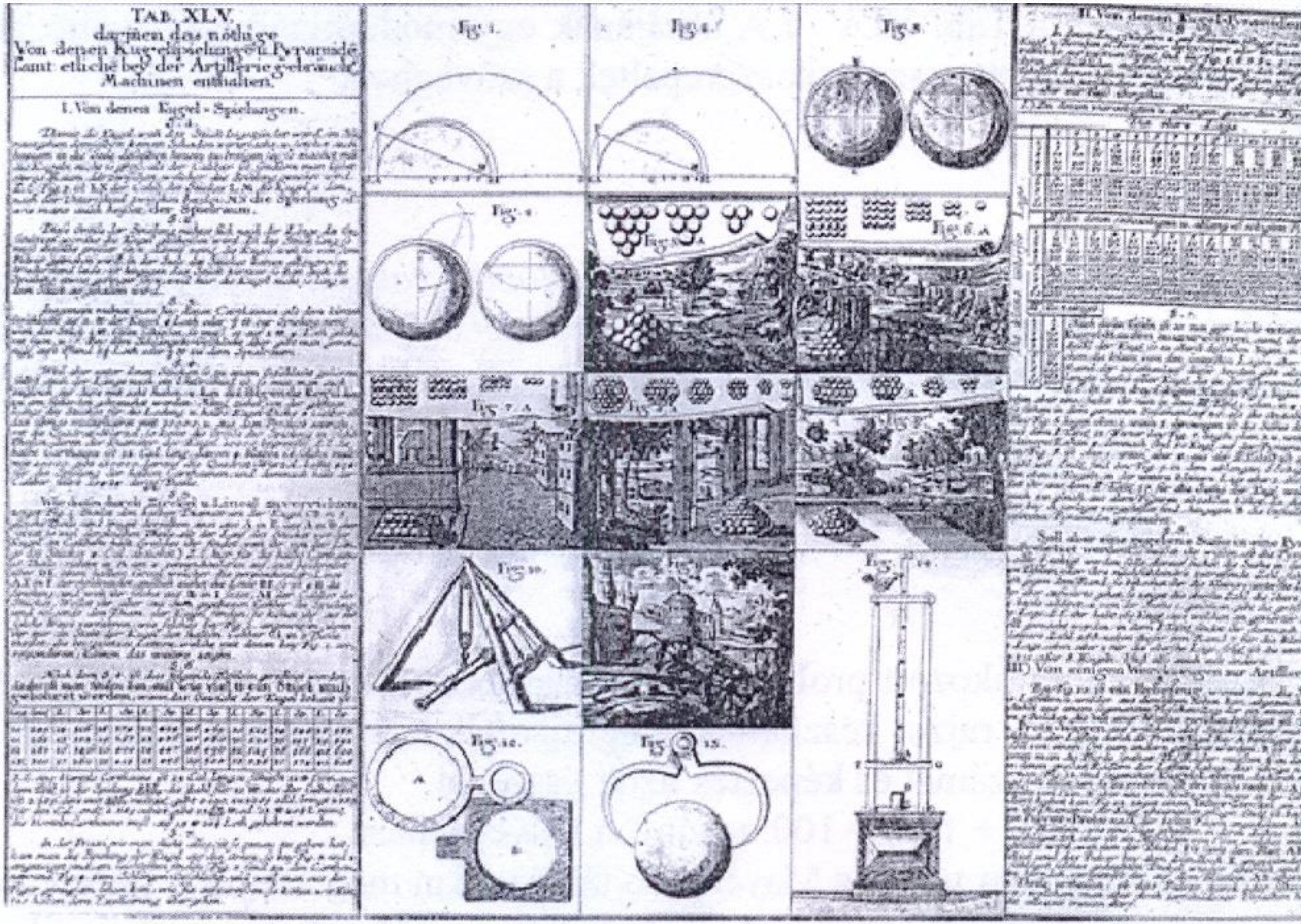
§. 12.

Endlich ist bey Fig. 17. eine gemeine Bleywag abgebildet, die man zu dem horizontal u. vertical=Richten der Instrumente gebrauchet, deren Beschaffenheit aus der Figur am beste zuersehē ist.

Mathematischer Atlas

- a térképkészítés elvei, sztereografikus projekció,
- vonalak és görbék felhasználása erődítmények építésénél, a csillag alakú erődítmény,
- *katonai problémák, fegyverek és geometriai konstrukciójuk, ágyú, ágyúgolyó, kézigránát, petárdák, bombák (Tab. XLV.),*
- különféle ballisztikai problémák, a röppálya matematikai elemzése, optimalizálási feladatok a tüzérségnél,
- lakóház építése, az oszlopok és a tetők különböző alakja, a komfortos épület jellemzői, az épület alaprajza, az építés elvei,
- a perspektíva, a perspektivikus képek és árnyékaik, néhány fizikai probléma.

1


TAB. XLV.
darinnen das nöthige
Von denen Kugel-Spielungen u. Pyramide
samt etliche bey der Artillerie gebräuchl.
Machinen enthalten.
I. Von denen Kugel-Spielungen.
II. Von denen Kugel-Pyramiden
III. Von einigen Werckzeugen zur Artillerie

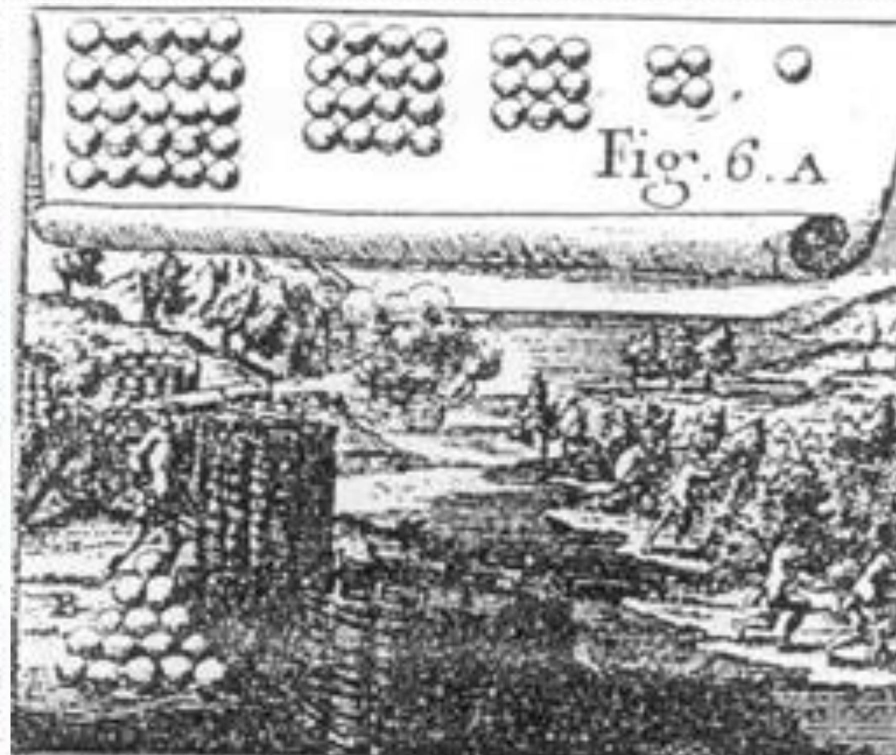
Mathematischer Atlas

- A felsőbb matematikából algebra, geometria, differenciál- és integrálszámítás található benne.
- Sajátos, nagyon szemléletes módszerei voltak Minden tábla három részből áll. A két szélső rész (1/4-1/4 rész) tartalmazta a matematikai fogalmakat, a szükséges tulajdonságok és ismeretek leírását.
- Az elméleti magyarázatra a tábla egyik fele, a gyakorlati alkalmazásokra a tábla másik fele jut .
- A középső részben találjuk az ábrákat, a szemléltető anyagot. A középső rész rajzai igen szépek, látványosak és tanulságosak.

Tab. XLV.

- Igen érdekes a Tab. XLV. mely egy tüzérségi problémát tárgyal, az ágyúgolyók optimális elhelyezésének kérdését. Ma is érdekes ez a probléma, igaz nem ágyúgolyókkal fogalmazva.
- Több szinten is találkozhatunk vele a középiskolában is,sőt a tudományban is,mint pakolási problémákkal.
- Az alsóbb szinten az egyik szint konkrét, a másik szint absztrakt, mert a fogalmakat, a problémákat a matematika nyelvén fogalmazza meg, vagyis a síkbeli, illetve a térbeli figurális számok elnevezést használja.
- Ez emelt szintű középiskolai feladat vagy egyetemi szinten elemi matematika feladat lehet.

Tab XIV



Tab. XLV.

- A Fig. 5.A ábra egy háromszög alapú golyókból álló piramist ábrázol. A feladat a piramisban elhelyezett golyók összeszámolása (enaktív sík). A golyók összeszámolásának megkönnyítésére rétegenként lerajzolta a golyókat (ikonikus sík), így az összeg könnyen adódik:
- S = (4+3++2+1) +(3+2+1) + (2+ 1) + 1 = 20.
- Ebben az esetben megtaláljuk a szimbolikus síkot is, mert az elméleti részben van egy táblázat, és onnan leolvasható az 1 és 5 értékéhez tartozó S = 20 eredmény (szimbolikus sík).

Tab.XLV

- A Fig. 6.A ábra egy négyzet alapú piramist mutat be, amelynek alapja 5 golyóból álló és négyzet alakú, a piramis 1 golyóban végződik (enaktív sík). A piramisban elhelyezett golyók összegének meghatározására hasonló módszert használ. Először lerajzolja az egyes rétegeket (ikonikus sík), utána számolja össze az egyes rétegekben szereplő golyókat.
- S= 25+ 16+ 9+ 4+ 1 = 55.
- Ebben az esetben is megtaláljuk a szimbolikus síkot, mert az elméleti részben a négyzet alapú piramisok is benne vannak a táblázatban és onnan leolvasható az S = 55 eredmény.

Tab. XLV.

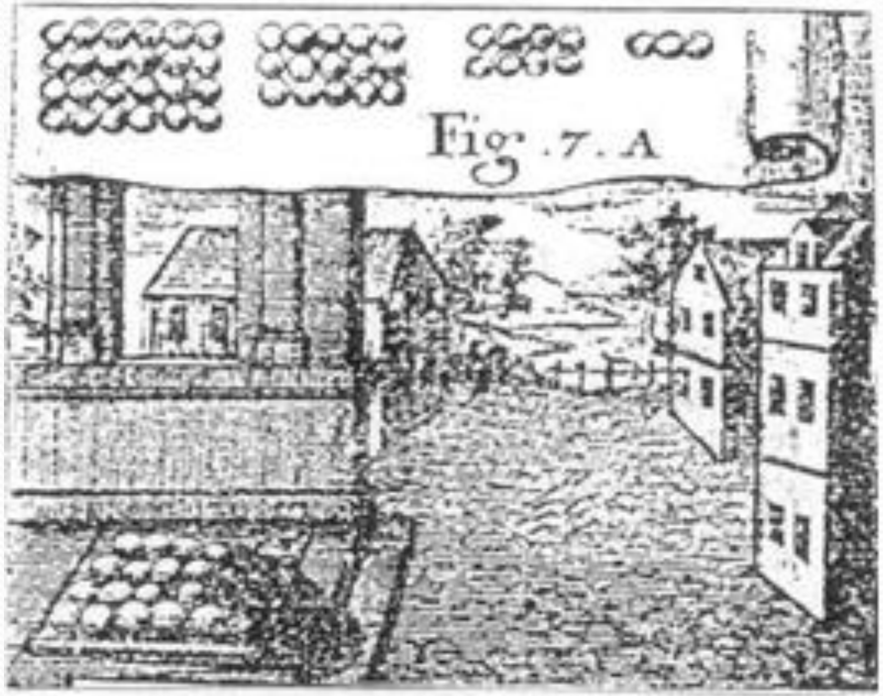
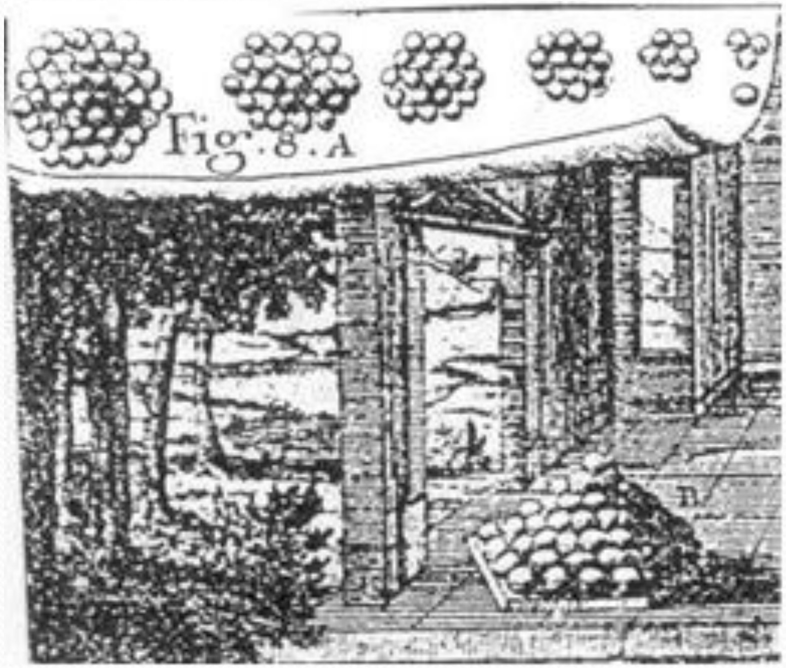
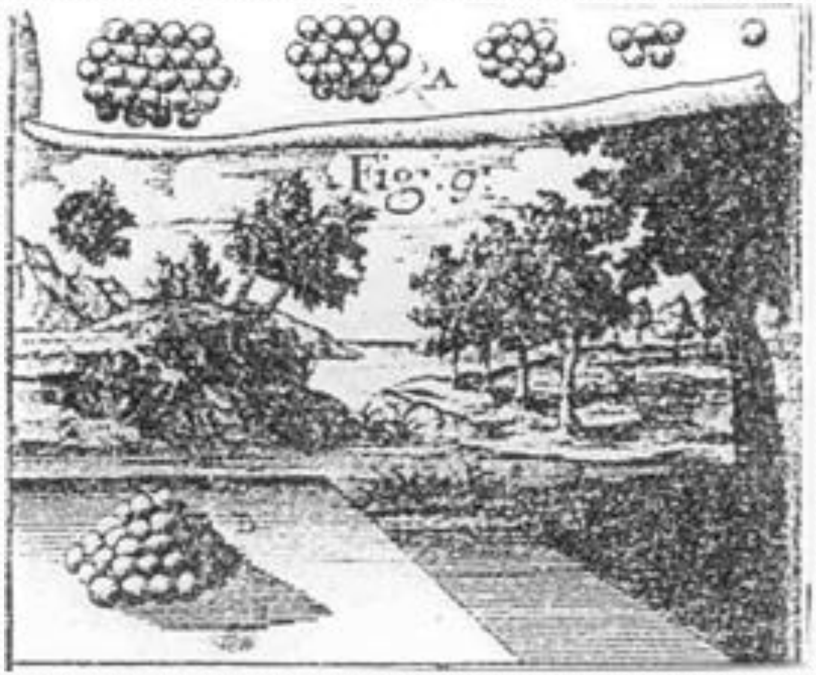


Fig.7A

- Fig.7.A téglalap alakú piramis, amelynek legfelső sorában három golyó van (enaktív sík). A módszere itt is azonos, lerajzolja az egyes rétegeket, amiből már nem nehéz a golyók összeszámlálása. Az alaptéglalap oldalain 5, illetve 3 golyó van.
- $S = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 50.$
- A táblázatból az adatok megadásával itt is megkapjuk a megfelelő értéket.

Tab.XLV.





II. Von denen Kugel-Pyramiden.

§ 8.

In denen Zeug-Häusern u. auf Batterien pfleget man die Canon-Kugl. u. Bomben in Form einer drey, vier oder sechseckigten Pyramide aufzusetzen. Dergl. sind bey Fig. 5. 6. 7. 8 u. 9 vorgebildet; zu deren geschicklichen Aufsetzung und Berechnung dan̄ einige besondere Tabellen dienen kön̄en; die ich so gleich hieher setzen will; ob man wohl sonsten noch verschiedene arithmetische und algebraische Wege hat, die wir aber mit Fleiß übergehen.

I.) Zu denen viereckigten u. ablangen gevierdten Pyramiden.

Die obere Lage.

Die unterste Lage.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50
3	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98	104
4	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
5	55	70	85	100	115	130	145	160	175	190	205	220	235	250	265	280
6	91	112	133	154	175	196	217	238	259	280	301	322	343	364	385	406
7	140	168	196	224	252	280	308	336	364	392	420	448	476	504	532	560
8	204	240	276	312	348	384	420	456	492	528	564	600	636	672	708	744
9	285	330	375	420	465	510	555	600	645	690	735	780	825	870	915	960
10	385	440	495	550	605	660	715	770	825	880	935	990	1045	1100	1155	1210

II.) Zu denen sechseckigten u. ablang-6. eckigten Pyramiden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101
3	42	57	72	87	102	117	132	147	162	177	192	207	222	237	252	267
4	106	134	162	190	218	246	274	302	330	358	386	414	442	470	498	526
5	215	260	305	350	395	440	485	530	575	620	665	710	755	800	845	890
6	381	447	513	579	645	711	777	843	909	975	1041	1107	1173	1239	1305	1371
7	616	707	798	889	980	1071	1162	1253	1344	1435	1526	1617	1708	1799	1890	1981
8	932	1052	1172	1292	1412	1532	1652	1772	1892	2012	2132	2252	2372	2492	2612	2732
9	1341	1494	1647	1800	1953	2106	2259	2412	2565	2718	2871	3024	3177	3330	3483	3636
10	1855	2045	2235	2425	2615	2805	2995	3185	3375	3565	3755	3945	4135	4325	4515	4705

A feladatok megoldása

- Fig.5.A: A háromszög számok összege:

  $S = 10 + 6 + 3 + 1 = 20.$(III)
- Fig.6.A: A négyzetszámok összege:

  $S = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$(I)
- Fig.7.A megoldása:
- $S = 4\cdot6 + 3\cdot5 + 2\cdot4 + 1\cdot3 = 50.$(I)
- Fig.8A: obere Lage:1, die kleine unterste Lage:4,S= 106 (II)
- 2004. évi AMC10 verseny 7.feladat megoldása:

  $S = 5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 100.$ (C)

  obere Lage:4, kleine unterste Lage:5 (II).

Figurális számok a tanításban

- A magyar matematika tanterv nem tartalmazza ezt a témát. A középiskolában matematikai táborokban, szakköri szinten, versenyeken és a KöMalban találkozunk vele, illetve az egyetemi elemi matematika kurzusokon. Az enaktív sík a hétköznapi életben kedvelt (piacon, vendéglőben a tárgyak elrendezése). A legújabb kísérleti általános iskolai tanterv is tartalmaz ilyet.

Figurális számok a matematika történetében

- A figurális számok vizsgálata a görögöktől származik. Nichomachos foglalkozott azzal, hogy a téglalap számokra direkt formulát találjon.
- A Pythagoreusok a figurális számokat grafikusan ábrázolták. A tetrakys egy szent szimbólumuk volt (enaktív sík).
- Pontok segítségével mutatták be a háromszög, négyzet téglalap , ötszög számokat (vizuális sík).

Figurális számok a matematika történetében

- Euler a *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770) könyvében a háromszög számokat először pontok segítségével ábrázolta (ikonikus sík), majd megadta a háromszög, a négyzet számokra vonatkozó formulákat és általánosította a polygon számokra is (szimbolikus sík).
- Hasonló ábrák Sain Márton: Nincs királyi út könyvében találhatók.

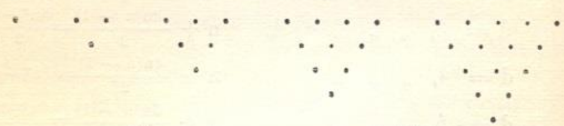
Euler: Háromszögszámok

Glied beständig 1 ist, so entsteht daher die arithmetische Reihe = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ꝛc. Nimmt man nun in derselben die Summe von einem, zweien, dreien, vieren ꝛc. Gliedern, so entsteht daraus diese Reihe von Zahlen:

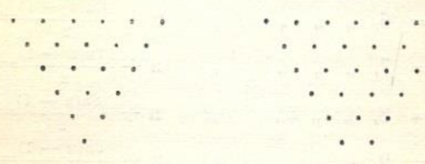
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 ꝛc.

so daß $1=1$, $3=1+2$, $6=1+2+3$, $10=1+2+3+4$ ꝛc. Diese Zahlen werden dreieckige Zahlen genannt, weil sich so viel Punkte als eine solche Zahl anzeigt, durch ein Dreieck darstellen lassen, wie aus folgendem zu ersehen.

1. 3. 6. 10. 15.



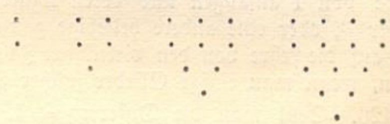
21. 28.



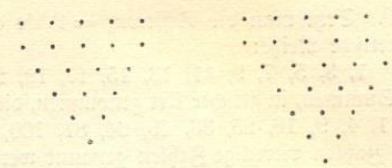
ꝛc.

427. In jedem dieser Dreiecke sieht man, wie viel Punkte jede Seite hat. Im ersten ist nur 1, in dem zweiten 2, in dem dritten 3, in dem vierten 4, u. s. w. Also nach der Anzahl der Punkte in einer Seite, welche schlechtweg die Seite genannt wird, verhalten sich die dreieckigen Zahlen, oder die Anzahl aller Punkte, welche schlechtweg ein Dreieck genannt wird, in folgender Art:

Seite
Dreieck



Seite
Dreieck



428. Hier entsteht die Frage, wie aus der gegebenen Seite das Dreieck gefunden werden soll? Diese Frage ist leicht zu beantworten, durch Anwendung der in 421 gegebenen Regel.

Denn es sei die Seite = n, so wird das Dreieck sein $1+2+3+4+\dots . n$, deren Summe $= \frac{n^2+n}{2}$, folglich wird das Dreieck $\frac{n^2+n}{2}$. Ist also $n = 1$, so wird das Dreieck = 1.

Ist $n = 2$ so ist das Dreieck = 3.
$n = 3$ " " " " = 6.
$n = 4$ " " " " = 10 u. s. w.

Nimmt man $n = 100$, so wird das Dreieck = 5050 ꝛc.

429. Diese Formel $\frac{n^2+n}{2}$ wird nun die Generalformel für alle dreieckigen Zahlen genannt, weil sich aus derselben für jede Seite, die durch n angedeutet wird, die dreieckige Zahl finden läßt.

Dieselbe Formel kann auch also dargestellt werden $\frac{n(n+1)}{2}$, was zur Erleichterung der Rechnung dient, weil entweder n oder $n+1$ eine gerade Zahl ist und sich durch 2 theilen läßt.

Also wenn $n = 12$, so ist das Dreieck $= \frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$. Ist $n = 15$, so ist das Dreieck $= \frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 8 = 120$ ꝛc.

Euler: Négyzetszámok

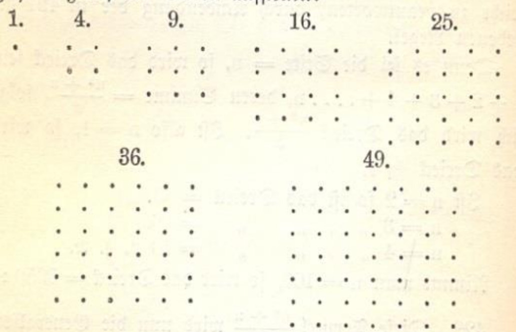
430. Setzt man die Differenz $= 2$, so hat man diese arithmetische Reihe:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 ꝛc.,

deren Summen, in gleicher Art genommen, die Reihe bilden:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 ꝛc.,

welche Zahlen viereckige Zahlen genannt werden, und eben diejenigen sind, welche oben (115) Quadrate genannt wurden. Es lassen sich nämlich so viel Punkte, als eine solche Zahl angiebt, als Viereck aufstellen:



431. Hier sieht man, daß die Seite eines solchen Vierecks ebenso viel Punkte enthält, als die Quadratwurzel davon angiebt. Also ist von der Seite 5 das Viereck 25, und von der Seite 6 das Viereck 36; überhaupt aber wenn die Seite n ist, wodurch die Anzahl der Glieder dieser Reihe 1, 3, 5, 7 ꝛc. bis n angedeutet wird, so ist das Viereck die Summe derselben Glieder, welche oben (422) gefunden worden $= n^2$. Von diesem Viereck oder Quadrat aber ist schon oben (115) ausführlich gehandelt worden.

432. Setzt man die Differenz $= 3$ und nimmt in gleicher Art die Summen, so werden dieselben fünfeckige Zahlen genannt, obgleich sich dieselben nicht mehr so gut

durch Punkte darstellen lassen. Dieselben schreiten demnach folgendermaßen fort.

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11
Arith. Reihe	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	28,	31
Fünfeck	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117,	145,	176

u. s. w., und der Zeiger giebt die Seite jedes Fünfecks an.

433. Wenn also die Seite n gesetzt wird, so ist nach der in 423 angegebenen Formel die fünfeckige Zahl $= \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$. Wenn z. B. $n = 7$, so ist das Fünfeck 70. Will man die fünfeckige Zahl von der Seite 100 wissen, so setzt man $n = 100$ und bekommt 14950.

434. Setzt man die Differenz $= 4$, so erhält man auf diese Art die sechseckigen Zahlen, welche also fortschreiten.

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Arith. Reihe	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29,	33,	37.
Sechseck	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120,	153,	190.

Der Zeiger giebt wiederum die Seite jedes Sechseckes an.

435. Wenn also die Seite n ist, so wird die sechseckige Zahl nach der in 424 gegebenen Formel $= 2n^2 - n = n(2n-1)$, wobei zu bemerken, daß alle diese sechseckigen Zahlen zugleich dreieckige Zahlen sind. Denn wenn man in diesen immer eine überspringt, so erhält man die sechseckige.

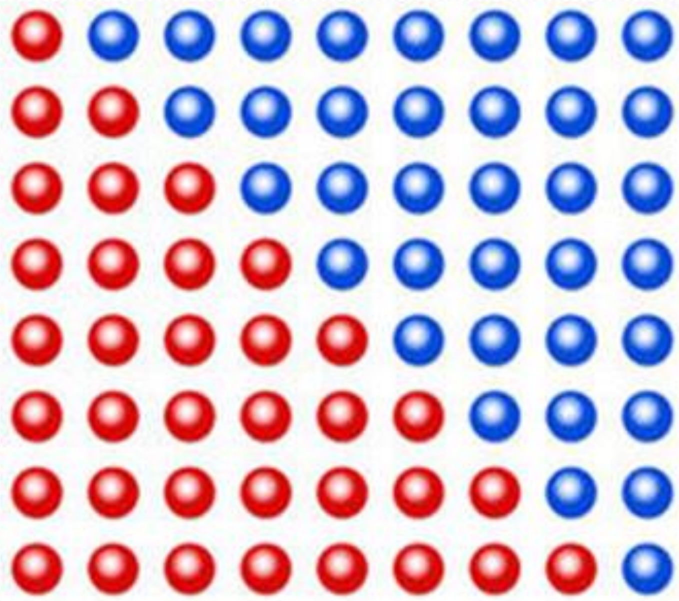
436. Auf gleiche Weise findet man die siebeneckigen, achteckigen, neuneckigen Zahlen u. s. w., deren Generalformeln wir hier sämmtlich angeben wollen. Wenn also die Seite n ist, so wird sein:

das Dreieck $= \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Viereck $= \frac{2n^2 + 0n}{2} = n^2$

Fünfeck $= \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$

Háromszögszám



S(n)= 1+2+3+ …+(n−2)+(n−1)+n= (n+1)n/2

Két n-edik háromszögszám „összefordításával” kapott n-edik téglalapszám segítségével
S(n)= (n(n+1))/2

Térbeli figurális számok

- A konkrét iskolai szinten a 2004. évi AMC 10 versenyen (Amerikai Matematikai Verseny) a 7. feladatban a Tab XLV. 7A ábrájának egy konkrét modernizált változatát tűzték ki, ahol az ágyúgolyók helyett narancsok szerepeltek a szövegben.

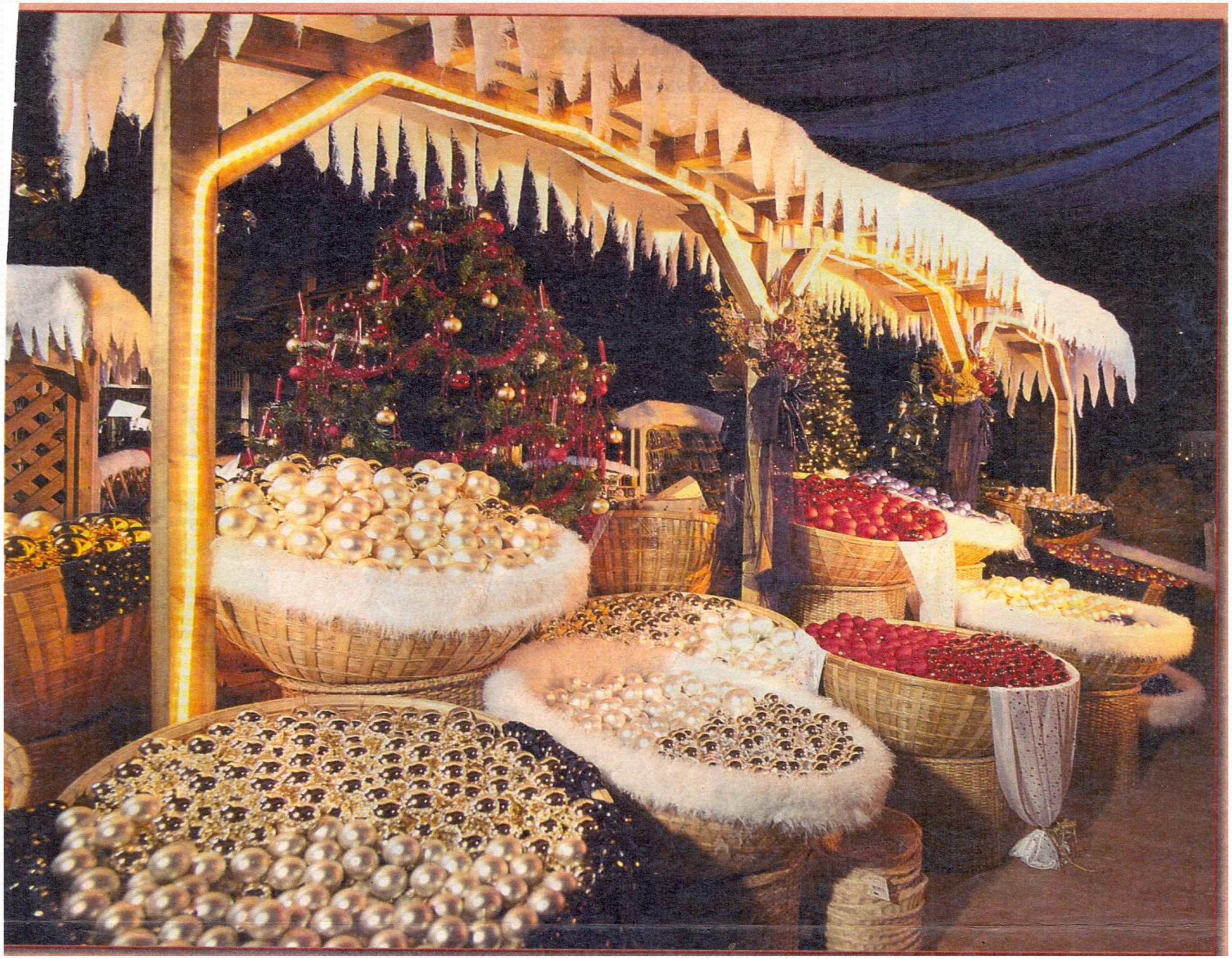
2004. évi AMC 10 verseny 7. feladat

- A zöldségesnél a narancsokat olyan piramis alakú halomba rakják, amelyeknek az alapja egy téglalap, oldalai 5 és 8 narancsból állnak.
- Az első szint fölött levő narancsok négy alsó szintbeli narancson nyugszanak. A halmot a narancsok egy sora zárja. Hány narancsból áll a halom?
- (A)96 (B) 98 (C) 100 (D)101 (E)134

A feladatok megoldása

- 2004. évi AMC10 verseny 7.feladat megoldása:
  $S = 5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 100.$
- A helyes válasz: (C)
- A tanulók számára nem okozott problémát az esetek összeszámolása

Karácsonyi vásárban



Mason feladata

1. feladat

□ ○ ◿ □ ○ ◿

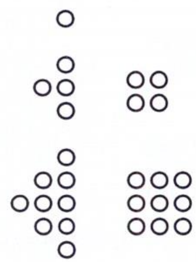
Folytassa a sorozatot a 17. elemig! Mi lesz a 243. helyen? Próbáljon felírni egy általános formulát a négyzetek, körök, háromszögek elhelyezkedésére! Például a huszonötödik kör hányadik helyen fog állni?

2. feladat

1. sor: 1 =

2.sor: 1 + 3 =

3. sor: 1 + 3 + 5 =



4. sor: …………

5. sor: ………….

10. sor: ……………

n-edik sor: ……………………

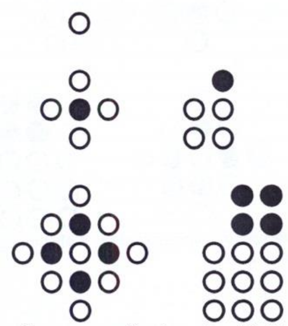
Igazolja az n-edik sorra megfogalmazott sejtését! Algebrai és geometriai okoskodást is használhat! (Ha tudja, mindkét féleképpen bizonyítsa be a sejtését!)

3. feladat

1. sor: 1 =

2.sor: 1 + 3 + 1=

3.sor: 1 + 3 + 5 + 3 + 1=



4. sor: ……………..

5. sor: ……………….

n-edik sor: ……………

Igazolja, bizonyítsa az n-edik sorra megfogalmazott sejtését! Algebrai és geometriai okoskodást is használhat! (Ha tudja, mindkét féleképpen bizonyítsa be a sejtését!)

Mason feladata

- Ez a feladat idegen volt a magyar diákok és tanárok számára. A konkrét esetben a feltételezett szabály alapján történő folytatást megcsinálták, de a bizonyítást csak abban az esetben készítették el, ha ismert volt a számukra a számtani sorozat, vagy a pozitív páratlan számokra vonatkozó összegzési szabály, illetve a teljes indukció.

Mason feladata

- A feladatot megoldottuk az Elemi Matematika kurzuson is, de előbb előkészítettük az ikonikus szintet, és utána láttunk neki az ikonikus és szimbolikus síkon a bizonyításnak.
- A 2018/19. tanévben két osztályban megismételtük a Mason feladat megoldatását.
- Eredményünk az, hogy a tanulók a konkrét eseteket meg tudják csinálni, azok alapján felírják az általános szabályt, de nem bizonyítanak, nincs igényük a bizonyításra.

$x\triangle = x \cdot 3$
$x\bigcirc = x \cdot 3 - 1$
$x\square = x \cdot 3 - 2$

Medvék + Netti

1. feladat

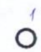
□ ○ ◿ □ ○ ◿ □ ○ ◿ □ ○ ◿ □ ○ ◿ □ ○

Folytassa a sorozatot a 17. elemig! Mi lesz a 243. helyen? Próbáljon felírni egy általános formulát a négyzetek, körök, háromszögek elhelyezkedésére! Például a huszonötödik kör hányadik helyen fog állni?

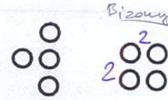
17. ○ 243. ◿ 25. kör = $25 \cdot 3 - 1$

2. feladat

1. sor: 1 =



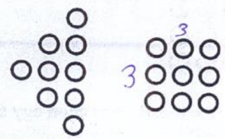
2.sor: 1 + 3 =



Bizonyítás:)

$1 \cdot 2 = 4 = 2^2$

3. sor: 1 + 3 + 5 =



$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$

4. sor: 1+3+5+7

5. sor: 1+3+5+7+9

10. sor: 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19

$1+3+5=9=3^2$

n-edik sor: n^2

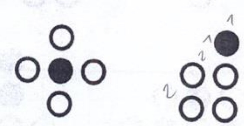
Igazolja az n-edik sorra megfogalmazott sejtését! Algebrai és geometriai okoskodást is használhat! (Ha tudja, mindkét féleképpen bizonyítsa be a sejtését!)

3. feladat

1. sor: 1 =

Bizonyítás:)

2.sor: 1 + 3 + 1=



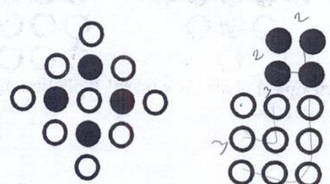
1^2 + $2 \cdot 2 = 2^2$ } $2^2 + 1^2$

3.sor: 1 + 3 + 5 + 3 + 1=

4. sor: $4^2 + (4-1)^2 = 25$

5. sor: $5^2 + (5-1)^2 = 41$

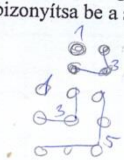
n-edik sor: $n^2 + (n-1)^2$



$2 \cdot 2 = 2^2$ + $3 \cdot 3 = 3^2$ } $3^2 + 2^2 = 13$

$2 = 3 - 1$

Igazolja, bizonyítsa az n-edik sorra megfogalmazott sejtését! Algebrai és geometriai okoskodást is használhat! (Ha tudja, mindkét féleképpen bizonyítsa be a sejtését!)

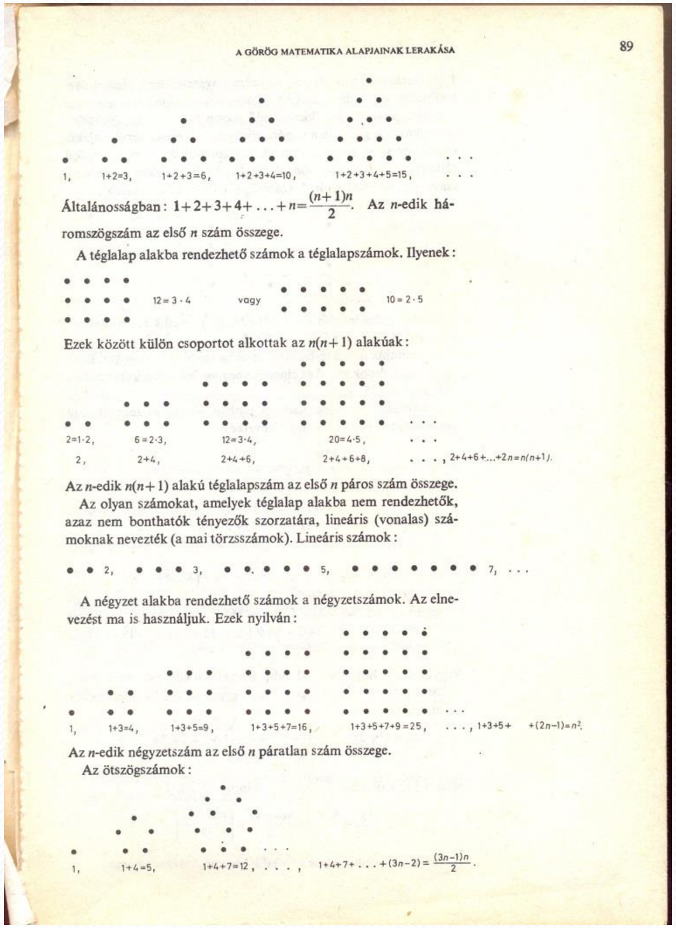


$1+3+5+3+1 = 13$

Kérdések és útmutatások tanárok számára

Ossza be osztályát kiscsoportokba (3 - 4 tanuló csoportonként), hagyja a tanulókat dolgozni egymás között a csoportban. Járjon körbe, és esetenként adjon segítő információkat, de maximum „irányított felfedezés legyen" ne direkt ötletadás. Adjon legalább 30 percet a csoportoknak az önálló munkára. Utána legyen osztálydiszkusszió, ahol megbeszélik az egyes csoportok megoldásait. Emlékezhetnek a tanulók általános iskolából a számtani sorozatra, oldják meg annak segítségével is, de a rajzok alapján is találják meg a megoldást. A csoportok részletesen írják le megoldásaikat!

Sain Márton: Nincs királyi út!



1, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$, $1+2+3+4+5=15$, . . .

Általánosságban: $1+2+3+4+\ldots+n=\frac{(n+1)n}{2}$. Az n-edik háromszögszám az első n szám összege.

A téglalap alakba rendezhető számok a téglalapszámok. Ilyenek:

$12=3\cdot4$ vagy $10=2\cdot5$

Ezek között külön csoportot alkottak az $n(n+1)$ alakúak:

$2=1\cdot2$, $6=2\cdot3$, $12=3\cdot4$, $20=4\cdot5$, . . .

2, $2+4$, $2+4+6$, $2+4+6+8$, . . . , $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$.

Az n-edik $n(n+1)$ alakú téglalapszám az első n páros szám összege.

Az olyan számokat, amelyek téglalap alakba nem rendezhetők, azaz nem bonthatók tényezők szorzatára, lineáris (vonalas) számoknak nevezték (a mai törzsszámok). Lineáris számok:

2, 3, 5, 7, . . .

A négyzet alakba rendezhető számok a négyzetszámok. Az elnevezést ma is használjuk. Ezek nyilván:

1, $1+3=4$, $1+3+5=9$, $1+3+5+7=16$, $1+3+5+7+9=25$, . . . , $1+3+5+ \quad +(2n-1)=n^2$.

Az n-edik négyzetszám az első n páratlan szám összege.

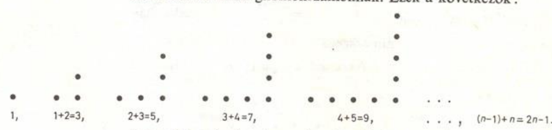
Az ötszögszámok:

1, $1+4=5$, $1+4+7=12$, . . . , $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\frac{(3n-1)n}{2}$.

Sain Márton: Nincs királyi út!

Következhetnék a többi sokszögszám a végtelenségig. Ezeket összefoglaló néven síkszámoknak is nevezték.

A síkszámok között kiemelkedő szerep jutott az ún. gnómónszámoknak. A gnómón a napóra görög neve. Legegyszerűbb alakja egy földbe szúrt bot és az árnyéka. A görögök az ilyen L formájú alakzatot általában gnómónnak hívták. Az ilyen alakba rendezhető számokat nevezték gnómónszámoknak. Ezek a következők:



Az n-edik gnómónszám az $(n-1)$-edik és az n-edik szám összege. Ezek voltaképpen a páratlan számok.

Megemlítjük még a térbeli alakzatokba rendezett számokat. Ezek közül a térszámok közül az elnevezésben ma is élnek a köbszámok: 1, 8, 27, 64, 125, ...

A köbszámok összegezésére a püthagoreusok észrevettek egy ügyes eljárást. Ennek menete a következő:

$$1^3=1$$
$$2^3=3+5$$
$$3^3=7+9+11$$
$$4^3=13+15+17+19$$
$$5^3=21+23+25+27+29$$
$$\dots$$

ezért:

$$1^3=1 \qquad \text{(A jobb oldalon 1 tag)}$$
$$1^3+2^3=1+3+5 \qquad \text{(3 tag)}$$
$$1^3+2^3+3^3=1+3+5+7+9+11 \qquad \text{(6 tag)}$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 \qquad \text{(10 tag)}$$
$$\dots$$

Vegyük észre, hogy ha a bal oldalon az első n köbszám összege áll, akkor a jobb oldalon a tagok száma éppen az n-edik háromszögszám, tehát:

$$S_n=1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+n^3=1+3+5+7+\dots+ \\ +(n^2+n-1),$$

ahol a jobb oldalon $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ számú tag áll. Így:

$$S_n=\frac{n^2+n}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Az első n köbszám összege az n-edik háromszögszám négyzete

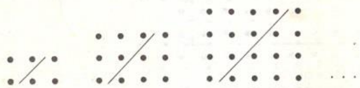
Sain Márton: Nincs királyi út!

A püthagoreusok a figurális számok között sok más, érdekes kapcsolatot is felfedeztek. Ezek közül ismertetünk néhányat:

Két egymás utáni háromszögszám összege négyzetszám. Szemléletesen:

$1+3=2^2$, $3+6=3^2$, $6+10=4^2$, $\ldots$, $\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=n^2$

Minden háromszögszám kétszerese téglalapszám.

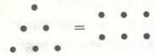


$2\cdot3=6$, $2\cdot6=12=3\cdot4$, $2\cdot10=20=4\cdot5$, $\ldots$, $2\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$.

Érdekes szám a 6, nemcsak azért, mert tökéletes szám, tehát egyenlő a nála kisebb osztóinak az összegével, hanem azért is, mert ugyanezen osztók szorzatával is egyenlő:

$$1+2+3=6=1\cdot2\cdot3.$$

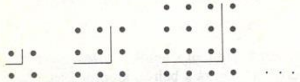
A 6 az egyetlen szám, amely háromszögszám is és $n(n+1)$ alakú téglalapszám is:



$1+2+3=2\cdot3=6$.

A 6 egységnyi élű kocka az egyetlen olyan kocka, amelynél a felület mérőszáma megegyezik a térfogat mérőszámával. Csakugyan, ha az ilyen kocka élét x betűvel jelöljük, akkor kell hogy $6x^2=x^3$ legyen. Innen $x=6$.

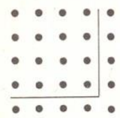
Egy négyzetszám meg a hozzá „illeszkedő” gnómónszám ismét négyzetszám:

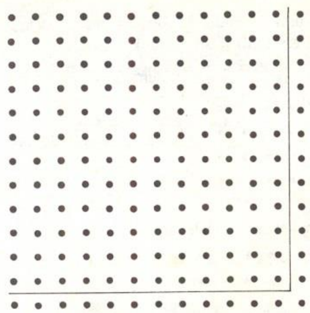


$1^2+3=2^2$, $2^2+5=3^2$, $3^2+7=4^2$, $\ldots$, $n^2+(2n+1)=(n+1)^2$.

Alkalmazzuk most ezt a törvényt azokra az esetekre, amelyeknél a gnómónszám maga is négyzetszám, tehát:

Sain Márton: Nincs királyi út!





$4^2+9=5^2$,
$4^2+3^2=5^2$,
ahol $3^3=4+5$,

$12^2+25=13^2$,
$12^2+5^2=13^2$,
$5^2=12+13$,

$24^2+49=25^2$, ...
$24^2+7^2=25^2$, ...
$7^2=24+25$, ...

Általánosságban, ha a $2n+1$ páratlan számot m^2-tel jelöljük, akkor:

$$\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2+m^2=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2.$$

Ha tehát m páratlan szám, akkor az

$$x=\frac{m^2-1}{2}, \quad \text{az} \quad y=m \quad \text{és a} \quad z=\frac{m^2+1}{2}$$

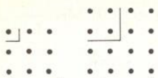
pitagoraszi számok, azaz kielégítik az $x^2+y^2=z^2$ egyenletet. A pitagoraszi számhármasoknak ezt a gyártási módját a püthagoreusok valóban ismerték. Ez a magyarázata a következő mechanizált eljárásnak: Írjuk fel a négyzetszámok és a páratlan számok sorozatát az

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, ...
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, ...

elrendezésben. Valahányszor a páratlan számok sorozatában négyzetszámhoz érkezünk, csatoljuk hozzá a balról, jobbról felette álló kettőt. Az így nyert négyzetszámok alapjai pitagoraszi számhármast alkotnak.

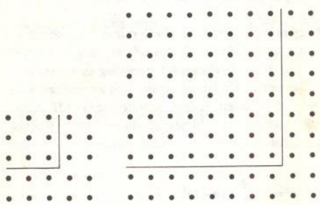
A módszer általánosítható, ugyanis ha egy négyzetszámhoz hozzáadjuk a hozzá illeszkedő két következő gnómónszámot, akkor is négyzetszámot nyerünk:

Sain Márton: Nincs királyi út!



$1^2+(3+5)=3^2$, $2^2+(5+7)=4^2$, . . . , $n^2+(2n+1+2n+3)=(n+2)^2$.

Válasszuk ki ezek közül ismét azokat az eseteket, amelyeknél a két gnómónszám összege négyzetszám, például: $7+9=16$, $17+19=$ $=36$, $31+33=64$ stb. Szemléletesen:



$3^2+(7+9)=5^2$, $8^2+(17+19)=10^2$, . . .

$3^2+4^2=5^2$, $8^2+6^2=10^2$, . . .

$4^2=2(3+5)$, $6^2=2(8+10)$, . . .

Általánosságban, ha a $(2n+1)+(2n+3)=4n+4=4(n+1)$ négyzetszám, azaz az $(n+1)$ négyzetszám, és bevezetjük az $n+1=a^2$ jelölést, amikor is $n=a^2-1$, akkor

$$(a^2-1)^2+4a^2=(a^2+1)^2.$$

Így az (a^2-1), a $2a$ és az (a^2+1) pitagoraszi számok. Az előbbi két sorozatból álló sablon most is használható, a bekeretezett számokból pitagoraszi számhármasok olvashatók le.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, . . .

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, . . .

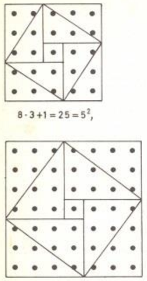
Az általánosítás természetesen a bemutatott irányban folytatható. Lehetséges tehát, hogy három szomszédos páratlan szám összege négyzetszám, például: $25+27+29=81$. Ekkor mivel

$$n^2+(2n+1+2n+3+2n+5)=(n+3)^2,$$

azért az $n=12$ esetén $12^2+81=15^2$, ami a kettős számsorozat szaggatott vonallal bekerített részéből is leolvasható.

Plutarkhosz szerint a püthagoreusok igazolták, hogy minden

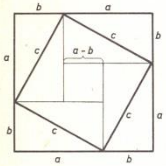
Sain Márton: Nincs királyi út!



$8 \cdot 3+1=25=5^2,$

$8 \cdot 6+1=49=7^2,$

20. ábra



21. ábra

A kocsihajtó feje (i. e. 470)

háromszögszám eggyel nagyobbított nyolcszorosa négyzetszám. A tétel igaza könnyen belátható, hiszen

$$8 \cdot \frac{n(n+1)}{2}+1=2n^2+4n+1=(2n+1)^2.$$

E szabályból meglepő módon lehet eljutni a Pitagorasz-tételhez is. Nem állítom, hogy a püthagoreusok ezt meg is tették, bár a saját kirakós módszerükkel bizonnyal megtehették, talán így: A tételt szemléltessük „kavicsokkal". Például: a második háromszögszám 3, a harmadik pedig 6. Ezekkel készült a 20. ábra.

Úgy vélem, hogy már ez a két szemléltető rajz is megadhatja azt az ötletet, hogy a sokszögszámoktól elbúcsúzva, csupán a rajzot vizsgáljuk, amelyben 8 kis derékszögű háromszög és egy négyzet tölt ki egy nagy négyzetet. Általánosságban tehát az az ábra, amelyet a háromszögszámok idézett tétele ihletett, így néz ki *(21. ábra)*:

A rajz tanúsága szerint a c oldalú négyzet összeállítható 4 egybevágó derékszögű háromszögből és az általuk közrefogott kis négyzetből, tehát:

$$c^2=4 \cdot \frac{ab}{2}+(a-b)^2=a^2+b^2.$$

A Pitagorasz-tételt nyerjük akkor is, amikor a rajzot úgy tekintjük, mint amelyen az $(a+b)$ oldalú négyzetet 4 derékszögű háromszög és a c oldalú négyzet tölti ki. Ekkor is:

$$(a+b)^2=c^2+4 \cdot \frac{ab}{2},$$

azaz

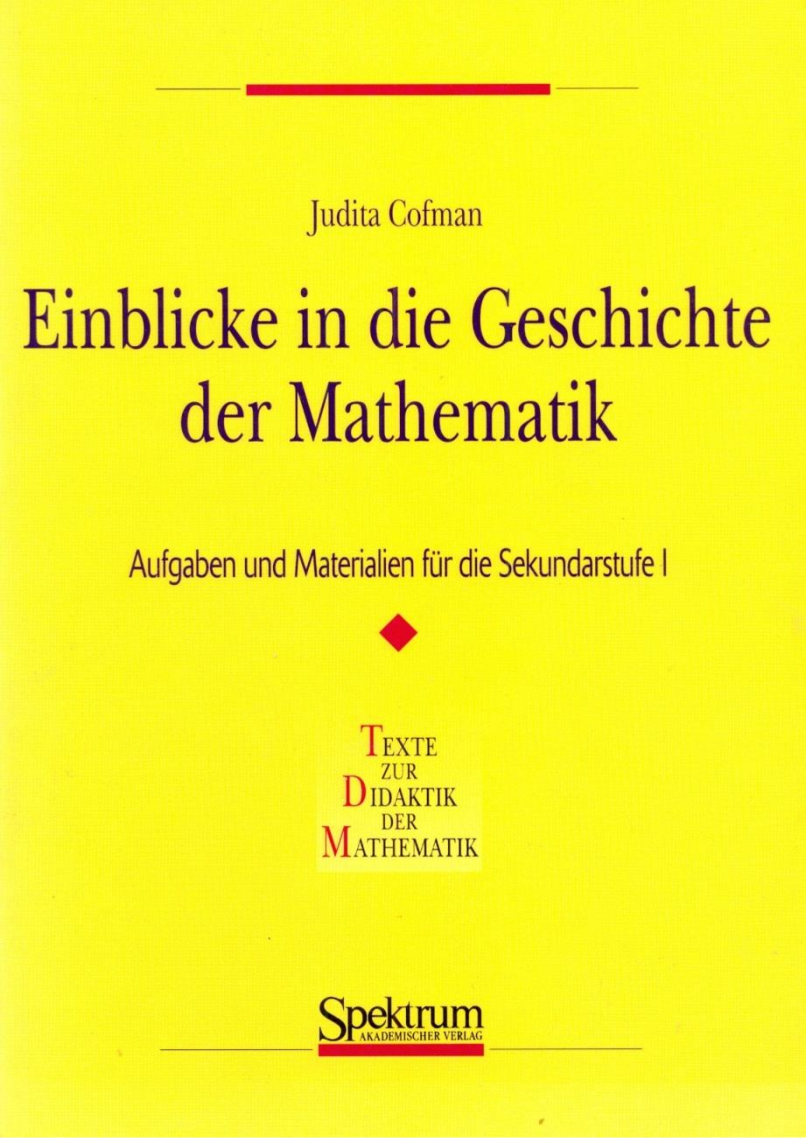
$$a^2+b^2=c^2.$$

A PÜTHAGOREUSOK GEOMETRIÁJA

Az előző fejezet végén már át is léptünk a számelméletből a geometria területére. A Pitagorasz-tételt, amely leginkább tette ismertté PÜTHAGORASZ nevét, nem ő fedezte fel; Babilonban, Egyiptomban, Kínában már előtte is ismerték. A püthagoreusok magát a geometriát nem is értékelték annyira, mint a számok tudományát. Ez megnyilvánult az elnevezésben is. A számelméletet mathémának, tanulmánynak hívták, ebből származik a matematika szó. A geometria hisztorié volt, amely a hisztoreo (tapasztal, kérdez, tudakoz) igéből származik, tehát kimondottan tapasztalati jellegű tudományt jelent.

A már említett JAMBLIKHOSZ neoplatonista filozófus és matematikus azt állítja, hogy volt egy *Püthagorasz hagyatéka* címen ismert geometriai tankönyv, amelyet a püthagoreusok adtak közre

Cofman: Einblicke in die Geschichte der Mathematik



Figurális számok Cofman Judit könyvében

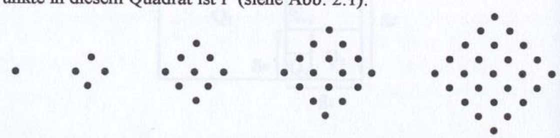
Teil II: Lösungen

Kapitel 1: Aufgaben über natürliche Zahlen

§ 1.1 Figurierte Zahlen

Aufgabe 1

(a) Die Punkte auf dem i-ten Brett bilden ein *Quadrat*. Die Anzahl der Punkte in diesem Quadrat ist i^2 (siehe Abb. 2.1).



1 4 9 16 25

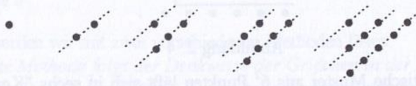
Abbildung 2. 1

(b) Die Punkte auf dem i-ten Brett bilden ein *Dreieck*. Die Anzahl der Punkte in diesem Dreieck ist gleich der Summe $1 + 2 + 3 + \ldots + i$. (Abb. 2.2)

1 $1+2$ $1+2+3$ $1+2+3+4$ $1+2+3+4+5$

Abbildung 2. 2

(c) Die Punkte bilden verschiedene Muster, je nachdem ob i eine gerade oder ungerade Zahl ist.
Für $i = 1, 3, 5$ ist die Anzahl der Punkte in dem Muster eine Quadratzahl: 1, 4 bzw. 9. Dabei erkennt man, wenn man die Anzahl der Punkte in diesen Mustern entlang der gestrichelten Geraden in Abb. 2.3 addiert, daß $4 = 1 + 3$ und $9 = 1 + 3 + 5$.
Für $i = 2, 4, 6$ ist die Anzahl der möglichen Landungspunkte 2, 6 bzw. 12.



1 2 $1+3=4$ $2+4$ $1+3+5=9$

Abbildung 2. 3

Bemerkungen:
Die Zahlen 1, 4, 9, 16, 25, ... stellen die Anzahl der Punkte in quadratischen Figuren aus $1 \cdot 1$ bzw. $2 \cdot 2$, $3 \cdot 3$, $4 \cdot 4$, $5 \cdot 5$, ... Punkten dar (wie in Abb. 2.1). Deshalb nennt man diese Zahlen *Quadratzahlen*.
Die Dreiecksfiguren in Abb. 2.2 enthalten 1 bzw. $1 + 2$, $1 + 2 + 3$, $1 + 2 + 3 + 4$, ..., das heißt 1 bzw. 3, 6, 10, ... Punkte.
Die Zahlen 1, 3, 6, 10, ..., die die Summen 1, $1 + 2$, $1 + 2 + 3$, $1 + 2 + 3 + 4$, ... ergeben, nennt man *Dreieckszahlen*.
Die Quadratzahlen und die Dreieckszahlen wurden schon von den Griechen in der Antike (um 600 Jahre v. Chr.) mit quadrat- bzw. dreiecksförmigen Figuren aus Steinen oder Punkten dargestellt. Das taten sie auch mit anderen Arten von Zahlen (siehe Aufgaben 4,5 und 6).
Solche Zahlen, die die Griechen mit geometrischen Figuren aus Punkten darstellten, nennen wir figurierte Zahlen.
Die Griechen konnten mit Hilfe von Figuren aus Punkten manche Eigenschaften von figurierten Zahlen entdecken (siehe Aufgaben 2, 3).

Aufgabe 2

(a)

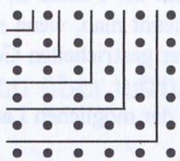


Abbildung 2. 4

Das quadratische Muster aus 6^2 Punkten läßt sich in sechs "Korridore" mit bzw. 3, 5, 7, 9 und 11 Punkten zerlegen. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11.$$

(b) Die ersten zehn ungeraden Zahlen stellen die Anzahl der Punkte in den zehn "Korridoren" des quadratischen Punktemusters aus 10 Punkten dar. Deshalb ist

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 10^2 = 100.$$

(c) Ähnlich wie in (b) stellt man fest, daß die Summe der ersten hundert ungeraden Zahlen gleich 100^2=10000 beträgt.

(d)

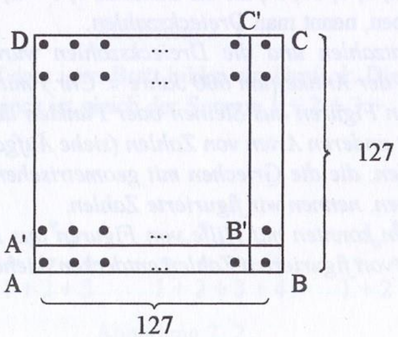


Abbildung 2. 5

Abb. 2.5 zeigt die Zahlen 127^2 und 126^2 als die Anzahlen der Punkte in den quadratischen Mustern ABCD, bzw. A'B'C'D. Die Differenz $127^2 - 126^2$ ist die Anzahl der Punkte in dem "Korridor" zwischen diesen Mustern. In diesem "Korridor" gibt es 126 + 1 + 126 Punkte. Folglich ist

$$127^2 - 126^2 = 2 \cdot 126 + 1 = 253.$$

Aufgabe 3

(a) werden wir mit zwei verschiedenen Methoden lösen:

Die erste Methode folgt der Denkweise der Griechen in der Antike: Die n - te Dreieckszahl läßt sich als Dreiecksmuster mit 1 + 2 + ... + n Punkten darstellen. Zwei dieser Muster schieben wir zu einem Parallelogramm zusammen, wie in Abb. 2.6. Die Anzahl der Punkte in dem Parallelogramm beträgt n(n + 1). *Folglich ist die n-te Dreieckszahl gleich* $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

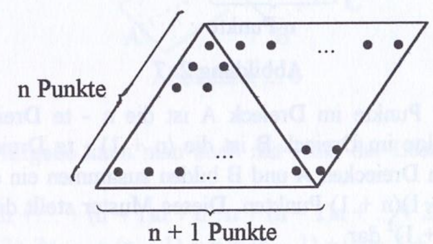


Abbildung 2. 6

Die zweite Methode benutzt keine Figur:

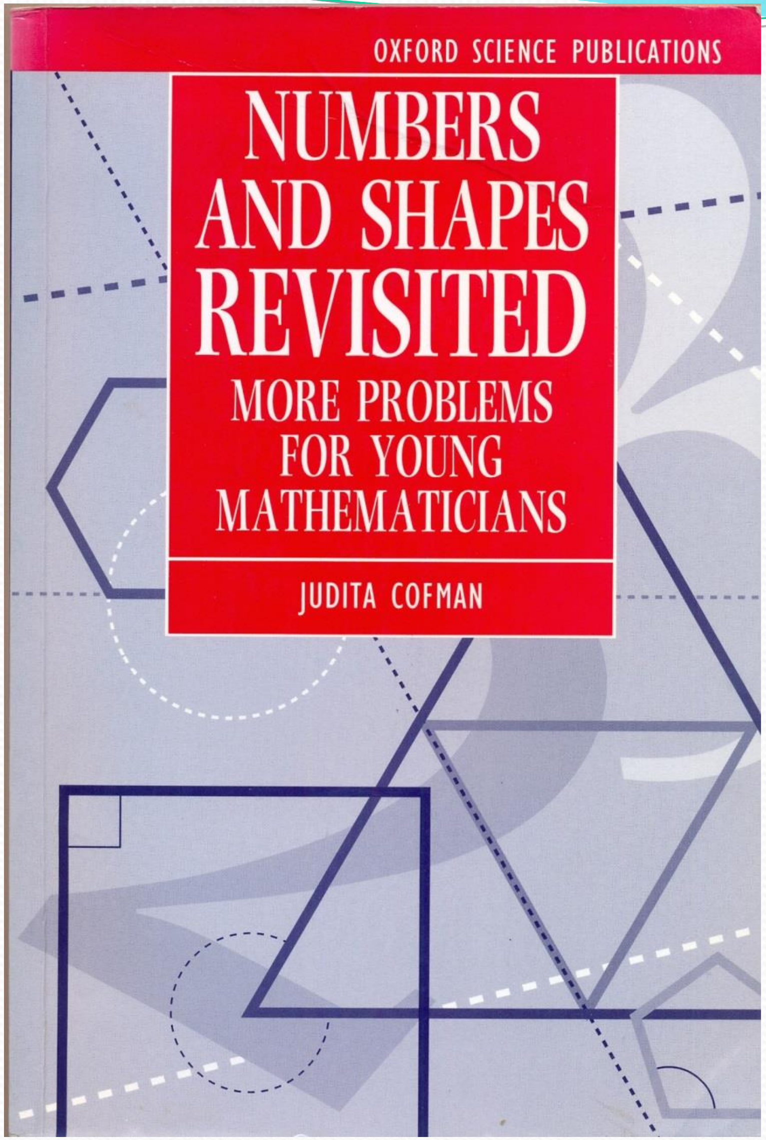
Sei $x = 1 + \;\; 2 \;\; + \ldots + (n-1) + n$; ebenfalls ist

$ x = n + (n-1) + \ldots + \;\; 2 \;\; + 1$

Durch Addieren der beiden Gleichungen folgt

$$2x = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)}_{n\text{ - mal}}$$

Folglich ist $x = \dfrac{n(n+1)}{2}$.


OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS
NUMBERS AND SHAPES REVISITED
MORE PROBLEMS FOR YOUNG MATHEMATICIANS
JUDITA COFMAN

Figurális számok Cofman Judit könyvéből

II Patterns of dots and partitions of integers

Introduction

Since antiquity patterns of dots have played an important role in the theory of numbers. The followers of Pythagoras (around 540 BC) represented certain integers by sets of dots arranged in the shape of polygons or polyhedra; such integers are nowadays called *figurate numbers*.

Examples of figurate numbers are

the *triangular numbers* t_n	1,3,6,10,. . . ,
the *square numbers* s_n	1,4,9,16,. . . , and
the *pentagonal numbers* p_n	1,5,12,22,. . .

represented by triangular, square, respectively pentagonal arrays of dots for $n = 1,2,3,\dots$ (see Fig. 1.11).

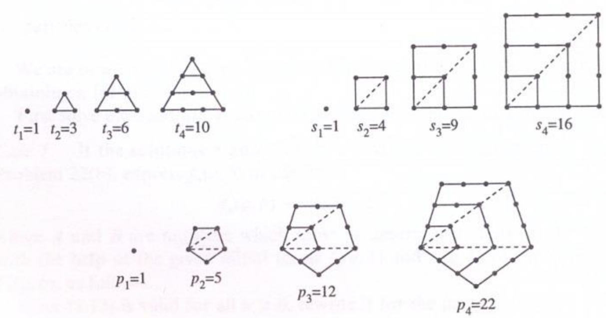


Fig. 1.11

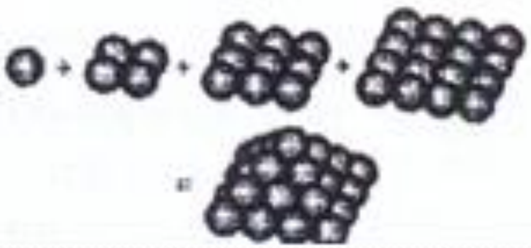
The geometrical representation of figurate numbers affords a quick insight into the structure of these integers. Here are a few examples:

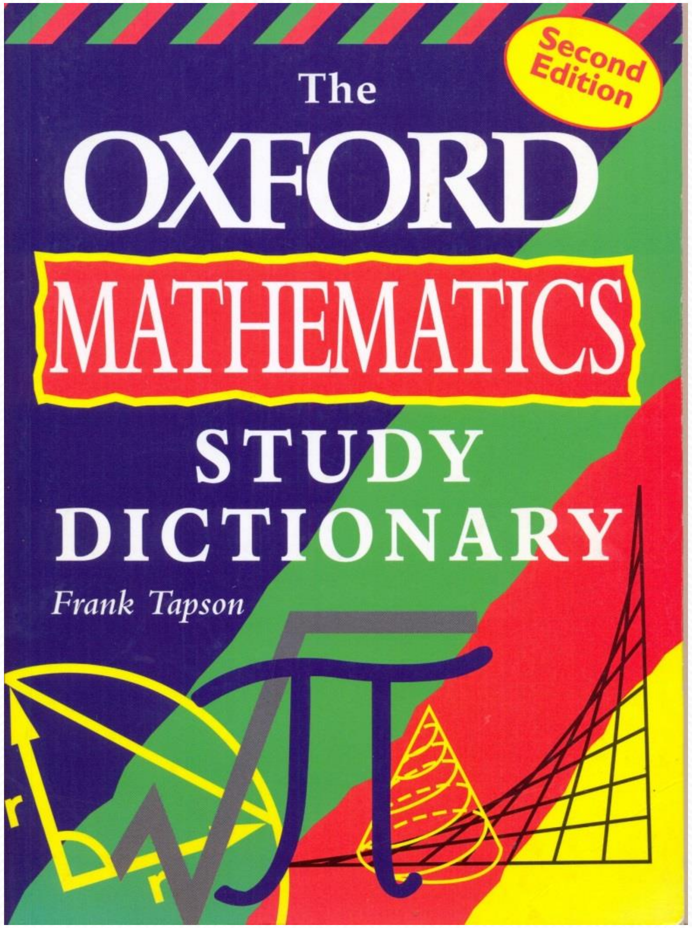
(i) By placing next to one another two triangular arrays — one 'upside down' — representing the same triangular number t_n, we obtain a

Figurális számok a Nagy Károly Diáktalálkozón

- Fejér Szabolcs, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium tanára, gyűjtött össze 15 feladatot a figurális számok témaköréből középiskolás tehetséggondozó foglalkozásra szlovákiai, szerbiai, romániai és magyarországi diákok számára.
- A diákoknak újszerű volt a téma, és szívesen foglalkoztak vele, illetve nem okozott problémát a megoldása(ikonikus sík).

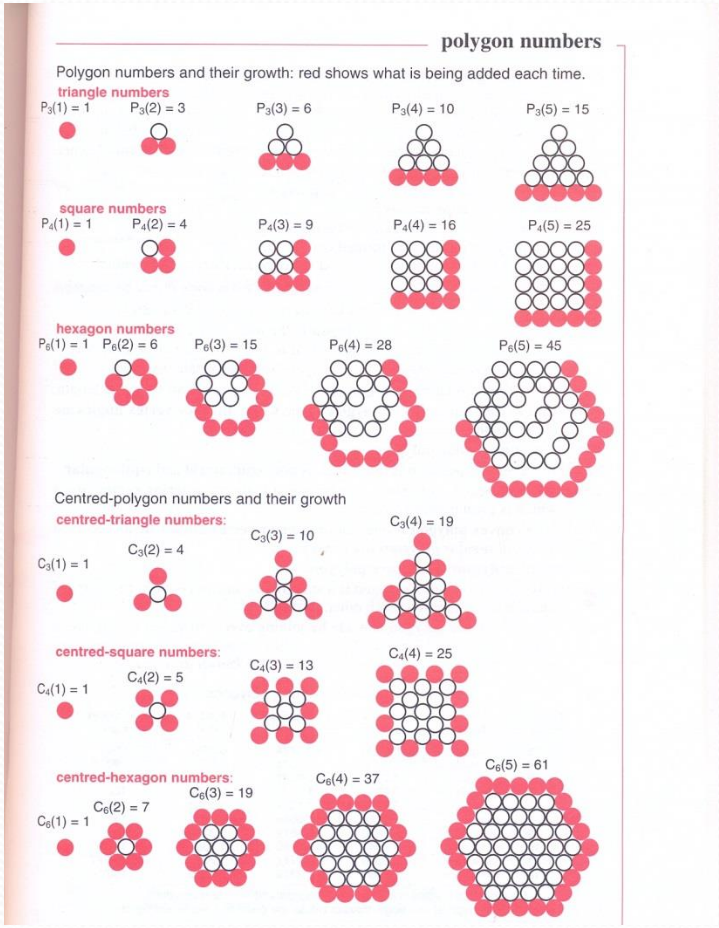
15) Nagy áruházakban gyakran láthatunk olyan építményeket, amelyeket azonos méretű árukból építettek. Ez nagyon sok esetben lehet konzervdoboz is. Képzeljünk el egy ilyen dobozokból felépített négyzet alapú piramist. Bármely rétegét nézzük, az ott lévő dobozok száma négyzetszám. Hány doboz lehet az építményben, ha 25 sor van? Az utolsó, a legfelső sorban egy doboz található. Mi a helyzet, ha az alap háromszög?





Second Edition
The
OXFORD
MATHEMATICS
STUDY
DICTIONARY
Frank Tapson

Figurális számok angol nyelvű tankönyvben



Figurális számok angol nyelvű tankönyvben

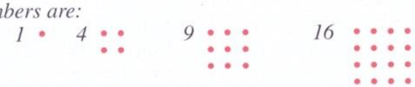
polygon numbers

polygon numbers A polygon number is a number which states the quantity of objects needed for the objects to be arranged in the shape of a **regular polygon** with all the possible smaller similar polygons included in it. These polygons are made, starting with 1, as shown opposite. *The number is named after the shape, and a sequence can be formed of all the numbers which make that shape.*

figurate numbers ≡ **polygon numbers**

triangle numbers are **polygon numbers** having 3 edges.
The sequence begins 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, . . .
The nth triangle number is given by $n(n + 1) \div 2$

square numbers are those numbers that can be represented by the correct amount of dots laid out in rows and columns to make a square. *Some square numbers are:*



$\mathbf{P}_e(n)$ is used here to indicate a polygon number. It makes a polygon having e edges and that gives the number its name (3 = triangle, 4 = square etc.). n is the number of objects along the length of one edge, and is also the position of the number in the sequence.

Some values of $\mathbf{P}_e(n)$ for various values of n and e

		$n =$							
	name	1	2	3	4	5	6	7	8
$e = 3$	triangle	1	3	6	10	15	21	28	36
4	square	1	4	9	16	25	36	49	64
5	pentagon	1	5	12	22	35	51	70	92

The general formula is $\mathrm{P}_e(n) = n\,[\,2 + (e - 2)\,(n - 1)\,] \div 2$

centred-polygon numbers are those numbers made by taking e **triangle numbers** of the same size and adding 1. *As with the polygon numbers, their names are determined by the value of e. In making the actual shape, the 1 goes in the centre, and the triangles are arranged around it.*
Example: When e = 4 then a centred-square number can be made using any 4 triangle numbers (all the same size) plus 1.

$\mathbf{C}_e(n)$ is used here to indicate a centred-polygon number, using the definitions for n and e as given above. *The value of any centred-polygon number for given values of n and e can be found from the formula*

$$\mathrm{C}_e(n) = [en(n - 1) \div 2] + 1$$

The study of polygon numbers goes back as far as 500 BC, but centred-polygon numbers were not devised until the 16th Century. The fascination has always been in discovering relationships between them (there are many) and inventing other types of 'shape-numbers'. There is no standardised notation for representing any of these numbers.

Figurális számok a KöMalban

- A KöMal a 2017. évi 2. számában érettségiző diákok számára közölte a 8. problémát négyzet és háromszög alapú mandarin piramisokról (térbeli figurális számok enaktív és ikonikus reprezentációi), amit más matematikai problémák megoldásával kötött össze.
- Segítségként viszont megadta az első n négyzet- és háromszögszám összegének a képletét.

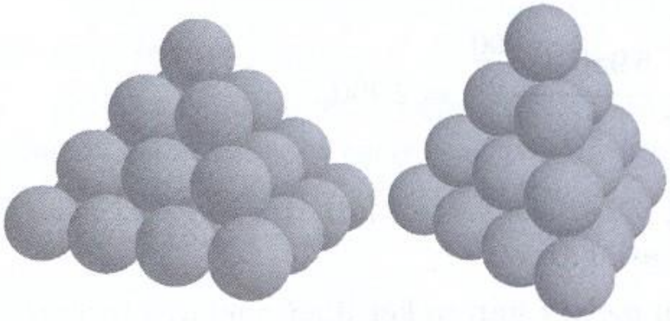
KöMal feladat

8. *Tudjuk, hogy az első n darab négyzetszám összegét az $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ képlet adja, és az n-edik négyzetszám az n^2. Tudjuk, hogy az első n darab háromszögszám összegét az $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ képlet adja, és az n-edik háromszögszám az $\frac{n(n+1)}{2}$.*

a) Igazoljuk, hogy az n-edik és az $(n+1)$-edik háromszögszám összege négyzetszám.

b) Igazoljuk, hogy ha az n-edik háromszögszámhoz hozzáadjuk az $(n+1)$-edik háromszorosát, akkor ismét háromszögszámot kapunk.

A zöldséges a mandarinokból négyzet alapú és háromszög alapú, magas piramist épített. (Az ábra mutat egy-egy négyrétegű ilyen piramist.)



c) Emőke a négyzet alapú piramis tetejéről megvesz néhány rétegnyi mandarint. Egy heti adagot szeretne vásárolni úgy, hogy minden napra ugyanannyi mandarin jusson. Adjuk meg a darabszámoknak azt a sorozatát, ahány réteg mandarint Emőke megvásárolhat.

d) Ha a megvásárolt mandarinok számát Emőke négyszerezné, akkor kétszer olyan magas háromszög alapú piramist tudna építeni, mint amilyen magas négyzet alapú piramis volt eredetileg. Igazoljuk, hogy ez az észrevétel nem függ attól, hogy a boltban a piramis tetejéről hány réteg mandarint vásárolt meg. *(16 pont)*

KöMal feladat

A négyzetszámok összege egész szám. (Vagyis abban biztosak lehetünk, hogy a szán láló osztható 6-tal). A számlálóban lévő tényezők valamelyikének 7-tel oszthatónak ke lenni.

Ezek alapján három eset van:
I. az n osztható 7-tel;
II. az n 7-tel osztva 6 maradékot ad;
III. az n 7-tel osztva 3 maradékot ad.

Vagyis a megvásárolható rétegek darabszámára vonatkozó sorozat: 3; 6; 7; 10; 1 14; ...; $7k+3$; $7k+6$; $7k+7$; ... (ahol k természetes szám).

d) Ha Emőke $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ darab mandarint vásárolt (azaz az n-edik négyzetsz mig végezte el az összegzést), akkor az állítás szerint ennek a darabszámnak a nég szereséből kétszer olyan magas háromszög alapú piramist tudna építeni (azaz a $2n$-edi háromszögszámig tudná az összegzést elvégezni). A $2n$-edik háromszögszámig az össze $\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{6}$.

Az elmondottak alapján azt kell megmutatnunk, hogy a következő összefüggés eg azonosság:

$$4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{6}.$$

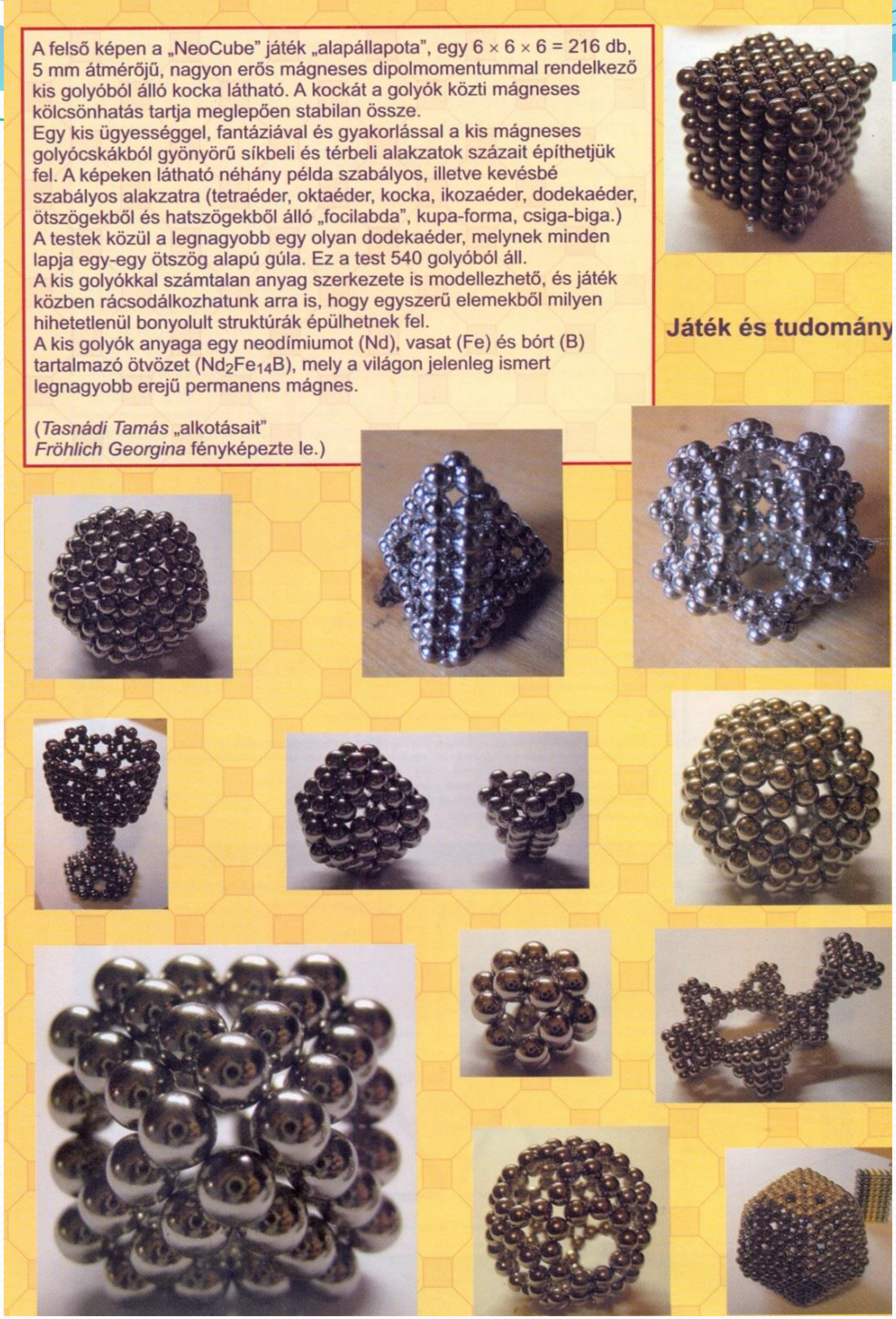
Ez azonnal látható a 4-gyel történő beszorzás után:

$$\frac{2n(2n+2)(2n+1)}{6}=\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{6}.$$

NeoCube játék

- A Kömal 2011. évi 2. számának hátsó borítóján találjuk az ún. NeoCube játékot. Ez a játék nagyon hasonlít a GeoMagic játékhoz.
- Kicsi mágneses golyók alkotnak egy kockát, a golyók áthelyezésével különféle testeket, kristálymodelleket és számos alakzatot lehet építeni (enaktív sík).
- Ennek a játéknak számos közös vonása van Dienes Zoltán és Varga Tamás elképzeléseivel (Játsszunk matematikát!)

NeoCube játék(KöMal)



A felső képen a „NeoCube” játék „alapállapota”, egy 6 × 6 × 6 = 216 db, 5 mm átmérőjű, nagyon erős mágneses dipolmomentummal rendelkező kis golyóból álló kocka látható. A kockát a golyók közti mágneses kölcsönhatás tartja meglepően stabilan össze.
Egy kis ügyességgel, fantáziával és gyakorlással a kis mágneses golyócskákból gyönyörű síkbeli és térbeli alakzatok százait építhetjük fel. A képeken látható néhány példa szabályos, illetve kevésbé szabályos alakzatra (tetraéder, oktaéder, kocka, ikozaéder, dodekaéder, ötszögekből és hatszögekből álló „focilabda”, kupa-forma, csiga-biga.)
A testek közül a legnagyobb egy olyan dodekaéder, melynek minden lapja egy-egy ötszög alapú gúla. Ez a test 540 golyóból áll.
A kis golyókkal számtalan anyag szerkezete is modellezhető, és játék közben rácsodálkozhatunk arra is, hogy egyszerű elemekből milyen hihetetlenül bonyolult struktúrák épülhetnek fel.
A kis golyók anyaga egy neodímiumot (Nd), vasat (Fe) és bórt (B) tartalmazó ötvözet ($Nd_2Fe_{14}B$), mely a világon jelenleg ismert legnagyobb erejű permanens mágnes.

(*Tasnádi Tamás* „alkotásait”
Fröhlich Georgina fényképezte le.)

Játék és tudomány

Mayer ismétlő (recipiens) körzője

- T. Mayer a gyakorlat embere volt.
- Egyik legnagyobb érdeme az új szögmérő eszköz, az ún. *ismétlő (recipiens) körző* elkészítése volt, amit elsősorban a hajózásban alkalmaztak.
- Ez látható a Mathematischer Atlas címlapján és a XI. táblán.
- A fia, *Johann Tobias Mayer,* bemutatta a *Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie* c. könyvében.
- *Delambre*-nak és *Méchain*-nek a standard méter meghatározására szolgáló eszköze nem volt más, mint Mayer ismétlő körzőjének egy díszített változata.

Johann Tobias Mayer (1752-1830)

Gründlicher und ausführlicher

Unterricht

zur

praktischen Geometrie

von

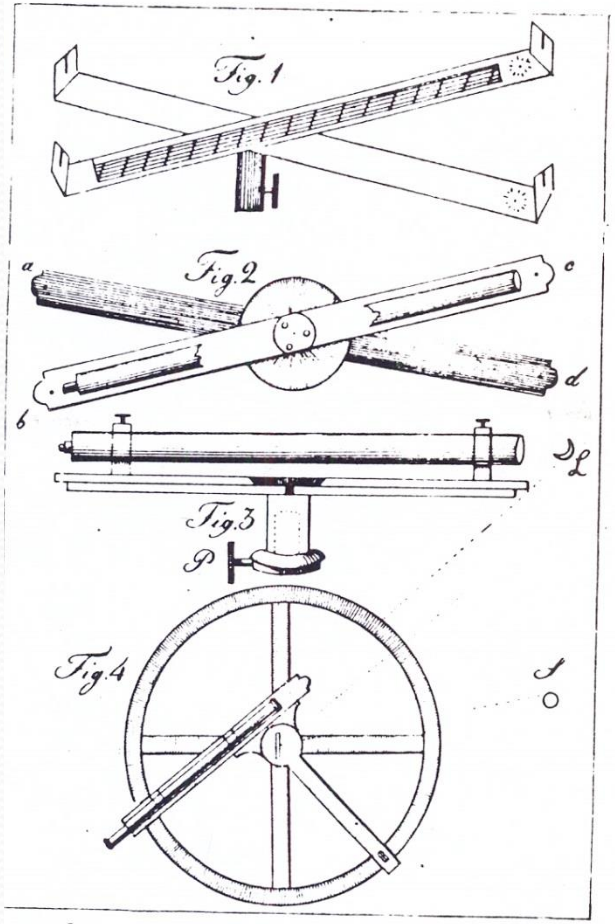
Johann Tobias Mayer,
Königl. Grosbritt. Hofrath und Professor zu Göttingen.

Dritte verbesserte und vermehrte Auflage.

Zweyter Theil,
mit sieben Kupfertafeln.

Göttingen,
im Verlage bey Vandenhoek und Ruprecht.
1802.

Az ismétlő (recipiens) körző



Artificium Multiplicationis oder Tobias Mayers Winkelinstrumente.

Tobias Mayer a térképkészítő

- Tobias Mayer munkássága elsősorban, mint térképkészítő és mint csillagász jelentős. A Homann Kartográfiai Intézet munkatársaként (1746-51) több, mint 30 térképet készített. Leghíresebb térképe a Németországról készített ún. *Mappa critica*. A térképek készítésénél a vetítés új módszereit alkalmazta. A térképek egy része megtalálható az *Atlas Scolasticus sorozatban*.
- A Debreceni Református Kollégium Nagykönyv-tárában is kb. 20 darab T. Mayer által készített térkép van, vannak köztük azonosak is.

Tobias Mayer a csillagász

- A Homann–féle Kartográfiai Intézetben lehetősége volt arra, hogy csillagászati megfigyeléseket végezzen. Tanulmányozta a napfogyatkozást, holdfogyatkozást nagyon sok csillagászati adatot gyűjtött össze.
- Készített egy eszközt, egy üvegmikro-métert, amellyel az 1748. július 25-i napfogyatkozásnál a méréseket végezte.
- A fényes csillagok megfigyelése alapján elméletet állított fel, arról, hogy miért nem lehet a Holdnak légköre.

Tobias Mayer a csillagász

- Kifejlesztette a területmérésre alkalmas projektív módszert, az asztrolábiumot egy precíziós műszerré alakította át.
- Az új göttingeni csillagvizsgálóban ő javította ki és szerelte fel a fali kvadránst.
- A Hold és a Nap táblázatait (*Theorie lunae juxta Systema Newtonianum (London, 1767) és Tabulae motium solis et lunae et correctae (London, 1770)* halála után kerültek kiadásra.

Tobias Mayer

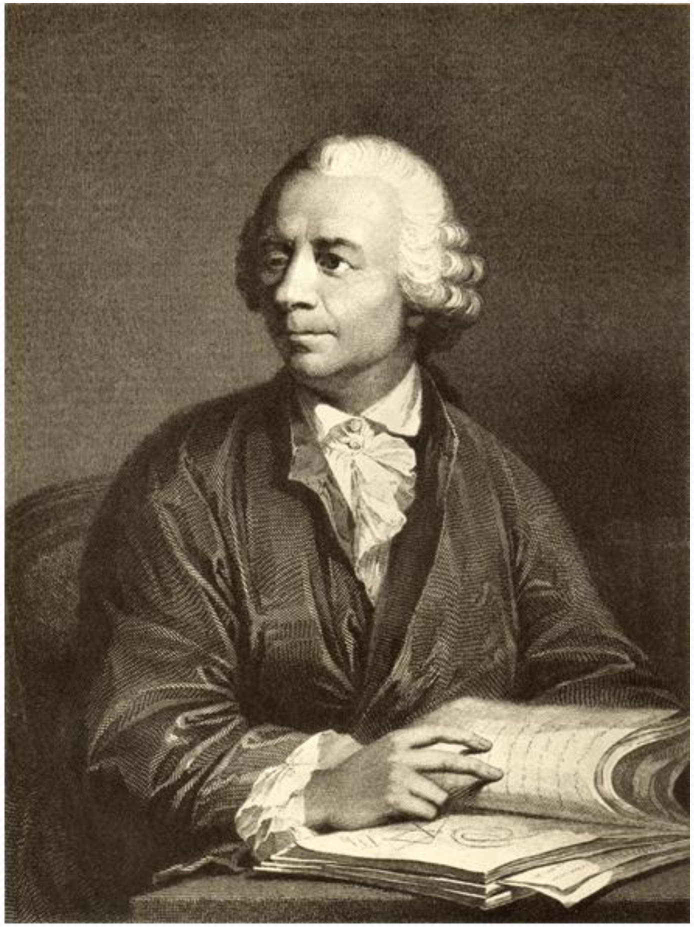
- Göttingeni tudományos kutatásai fizikai és csillagászati jellegűek voltak.
- 25 évvel Coulomb előtt felállította a *mágnességre vonatkozólag egy elméletet*, a Hold elméletéhez hasonlóan, amelyben azt állította, hogy a mágneses kölcsönhatás a távolság négyzetével fordítottan arányos.
- Mayer publikálatlan eredményeit halála után Lichtenberg adta ki Az *Opera inedita Tobiae* (Göttingen, 1775) címmel.
- Ebben a *színkeverésre* és a csillagászati visszaverődésre vonatkozó publikálatlan eredményei találhatók.

Tobias Mayer és kortársai: Segner és Euler

- Tobias Mayer, Segner és Euler kortársak és munkatársak voltak.
- Mind a hárman híres professzorok voltak. Segner és Tobias Mayer egy időben volt göttingeni professzor, míg Euler berlini professzor volt 1741-1766 között.
- Kiemeljük, hogy páronként együtt is dolgoztak, vagyis Euler és Segner, Euler és Tobias Mayer, Segner és Tobias Mayer.
- *Euler* mutatta be Segner-kereket a Berlini Tudományos Akadémián (1750).
- Jó barátságban volt vele, ezt mutatja levelezésük is.

Johann Andreas Segner (1704-1777)

Leonhard Euler (1707-1783)



Euler és Segner

- Euler összefoglaló tanulmányában, A hidraulikus gyakorlatok kötete, ábrákkal (*Fasciculus exercitationum hydaulicarum, cum figuris , 1747*) ismertette a *Segner–kerék* elvét, kiszámította a teljesítményét és méltatta a Segner által feltalált hidraulikus gép jelentőségét. Euler felhasználta Segner eredményeit turbinájának megalkotásakor is.
- Segner tudományos eredményei biztosították az alapot Euler kutatásaihoz a *merev testek és folyadékok mechanikája alapvető törvényeinek*, az ún. *Euler egyenleteknek* a megalkotásához.
- Segner Euler javaslatára került Halléba és kapta meg Ch. Wolff halála után megüresedett professzori széket.

Euler és Segner

- Segner másik jelentős munkája a pörgettyűk elméletére és a merev testek forgására vonatkozott.
- Euler a merev testek három egymásra merőleges tengely körüli forgásáról írt dolgozatának Bevezetésében (*Theoria motus corporum rigidorum, 1765*) Segnert a három főtengely probléma első felvetőjeként idézi.

Euler és Tobias Mayer

- Tobias Mayer csillagászati kutatásainak eredményeit Euler nagyra értékelte, mint ahogy ez a levelezéseikből is látszik, az *elméleti csillagászat csodálatos mesterművének nevezte*.
- 1751 és 1755 között Euler együtt dolgozott Tobias Mayerrel a Hold- táblázatokon.
- Mayer posztumusz kiadású *Theorie lunae juxta Systema Newtonianum (London,1797*) munkái Euler számításait használták fel és a tudományos navigáció alapját képezték.

Euler és Tobias Mayer

- A Mayer által készített ismétlő (recipiens) körző felhasználásával a hajók pontos tartózkodási helyét, a hosszúsági és szélességi fokot lehetett a tengeren meghatározni.
- Mayer halála után özvegye vette át a Brit Parlament jutalmát, ami érdekes elosztást mutat:
- Mayer özvegye 3000 fontot, míg Euler 300 fontot kapott.

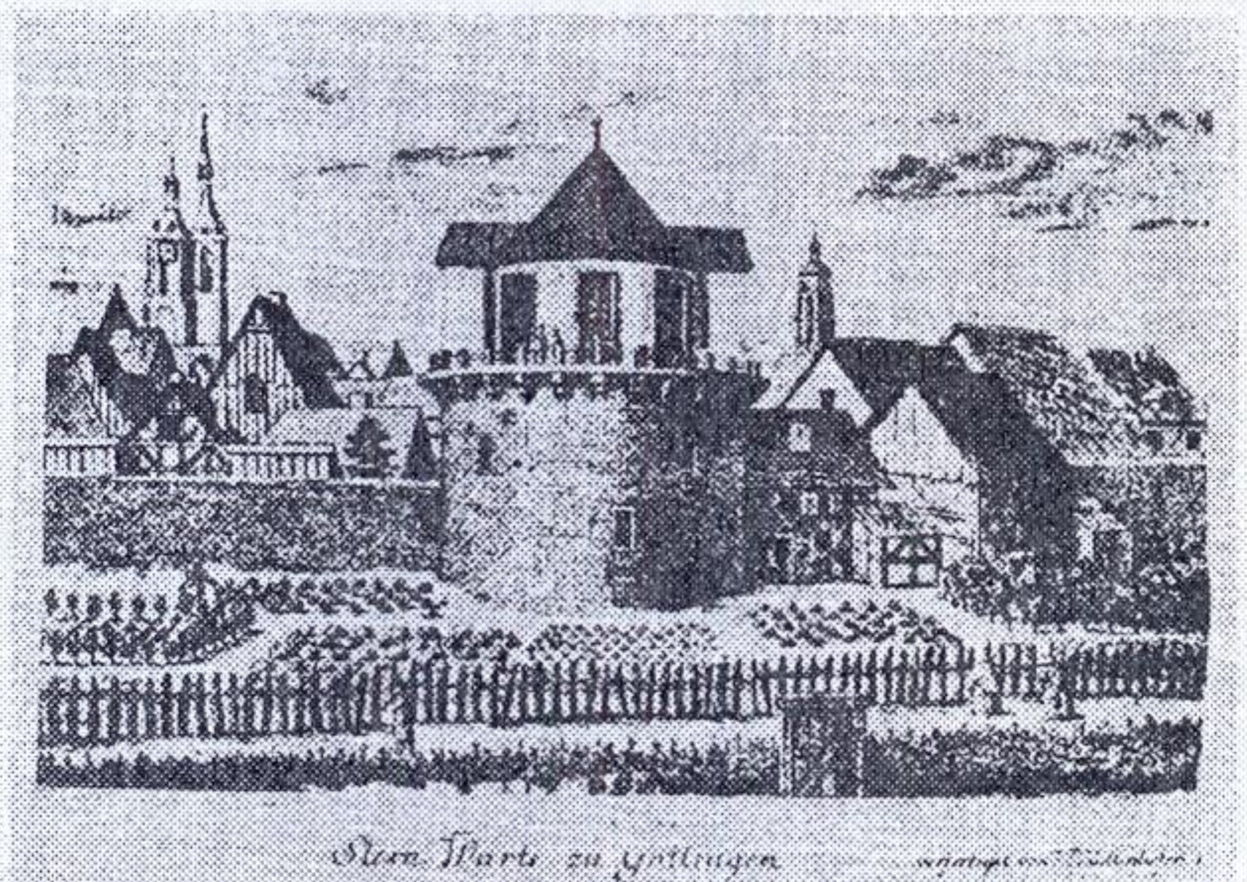
Tobias Mayer és Segner

- A fiatal Tobias Mayer Göttingenben a tapasztalt és tekintélyes Segner mellé került.
- Segner vezetése alatt folyt az új csillagvizsgáló építése és felszerelése. Mayer saját helyzetét igyekezett erősíteni, Segnerrel való kapcsolata vitatható. Ebben sok minden közrejátszott, pl. a politika is.
- Segner tekintélyes, szakmailag elismert professzor volt, de kollégái akadékoskodónak, nehéz természetűnek tartották.
- Érdekes kérdés annak vizsgálata, hogy hogyan kapcsolódik egymáshoz Segner, Tobias Mayer és a göttigeni csillagvizsgáló felállítása.

Tobias Mayer és Segner

- Segner alakja a korabeli dokumentumokban, *Eric G. Forbes* szerint, nem nagyon kedvező, nyakassággal, keserűséggel, sőt még gonoszsággal is vádolták.
- *F. Hund* a göttingeni fizikusokról írt könyvében azt írja, hogy sajnos Segner nem volt jó viszonyban kollégáival, sőt sógorával Hallerrel sem.
- Hollmann professzortól irigyelte a nagyszámú hallgatóságot.
- Tobias Mayerrel, aki többet használta a csillagvizsgálót összeveszett.

A Göttingeni csillagvizsgáló



20 Göttinger Sternwarte (s. 21.2, S. 73)

Tobias Mayer és Segner

- Tobias Mayer azzal vádolta Segnert, hogy elállította az órákat, hogy megzavarja az asztronómiai megfigyeléseit. Mayer azt akarta elérni, hogy ő egy személyben legyen az új csillagvizsgáló igazgatója, nem pedig megosztva Segnerrel.
- A Mayert és Segnert jól ismerő kiváló tudós, *Johann David Michaelis*, 1754. szeptember 16-án *von Münchausenhez írt fontos levelében* dicsérte Mayert és kijelentette, hogy a csillagvizsgáló egyszemélyi igazgatására vonatkozó kitartó szándéka a Segnerrel való állandó összeütközés és együtt működés hiányának eredménye.

Irodalom

- Ambrus, A.,: Bevezetés a matematikai didaktikába ,(1995) ELTE Eötvös Kiadó.
- Anthes, E., Quehl, W., Roth, E.: Tobias Mayer und die Zeit der Aufklärung (1990) Marbach am Neckar, Tobias Mayer Museum e.V.
- Bruner J.: Az oktatás folyamata (1968) Tankönyvkiadó,Bp.
- Cofman, J. : Einblicke in die Geschichte der Mathematik (1999), Spektrum, Akademischer Verlag-Heidelberg-Berlin.
- Dienes professzor játékai (1989) Műszaki Kiadó
- Euler L.: Vollständige Anleitung zur Algebra , Leipzig.
- Forbes, E.G.: The Life and Work of Tobias Mayer (1723-62), Royal Astronomical Society, Vol. 8. No.3. 227-251.
- Forbes, E.G. : Segner, Mayer és a göttigeni csillagvizsgáló, Energia és Atomtechnika, XXV.(1972) 12. szám, 564-569.
- Forbes, E.G.: Pioneer of entlightened science in Germany (1980), Göttingen, Vandenhoeck and Ruprecht.
- Hund, F.: Die Geschichte der Göttingen Physik (1987) Göttingen, Vandenhoeck and Ruprecht.

Irodalom

- Forbes, E.G. : Segner, Mayer és a göttigeni csillagvizsgáló, Energia és Atomtechnika, XXV.(1972) 12. szám, 564-569.
- Forbes, E.G.: Pioneer of entlightened science in Germany (1980), Göttingen, Vandenhoeck and Ruprecht.
- Hund, F.: Die Geschichte der Göttingen Physik (1987) Göttingen, Vandenhoeck and Ruprecht.
- Kästner, A.G.: Gedenkrede auf Tobias Mayer (Göttingen 1762) , Übersetzt und erläutert von Friedrich Seck (1984), Marbach am Neckar Tobias Mayer Museum e.V., Schriftenreihe des Tobias Mayer Museum e.V.

Irodalom

- Kántor Sándorné Varga Tünde: Egy ismeretlen gyöngyszem a Debreceni Református Kollégium nagykönyvtárának ritkaságai közül. Tobias Mayer Matematikai Atlasza (Augsburg, 1745), Könyv és Könyvtár, XXVI. Debrecen (2004), 111-132.
- Kántor Sándorné Varga Tünde: 300 éve született Leonhard Euler, a matematicus acutissimus, Természet Világa, 2007 szeptemberi szám melléklete, CXXIX-CXXXVII.
- Mayer, T.: Die Anfangsgründe aus der Geometrie,alle Aufgabe aus der Geometrie, vermittels der geometrischen Linien leicht aufzulösen (1741).
- Mayer, T.: 1723-1762 Vermesser des Meeres, der Erde und des Himmels(1985), Esslingen in alten und neuen Karten.

Irodalom

- T. Mayer- und Marbach (1994) Erwebungen aus der Sammlung Roth, durch Spenden der Marbacher Bürger, Tobias Mayer Museum e.V. Marbach am Neckar.
- Roth, E.:Tobias Mayer- der Kartograph und seine Landkarten(1988) Ludwigsburg.
- Roth, E.: Über den Mathematischen Atlas von Tobias Mayer (1991) Marbach am Neckar, Schriftenreihe des Tobias Mayer Museum e.V
- Sain Márton. Nincs királyi út!(1986) Gondolat, Bp.
- Varga.T.: Játsszunk matematikát, (1972) Móra Kiadó, Bp.