Egy-két hasznos geometriai lemmácska

Rátz László Vándorgyűlés, Gödöllő, 2019. július 3-6.

Győry Ákos, Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc

1. Készítsünk ábrát a 2. feladathoz, és vizsgáljuk meg az E pont helyét. Szedjük össze az ezzel kapcsolatos ismereteinket.

2. Legyen $ABCD$ egy egyenlő szárú trapéz, ahol $AB \parallel CD$. A BCD háromszög beírt köre érintse CD-t az E pontban. Legyen F a $DAC\sphericalangle$ belső szögfelezőjének azon pontja, melyre $EF \perp CD$. Messe az ACF háromszög köré írt köre a CD egyenest C-n kívül még a G pontban. Mutassuk meg, hogy az AFG háromszög egyenlő szárú. (USAMO, 1999)

3. Adott a síkon egy O középpontú C kör, C egy l érintőegyenese, és l-nek egy M pontja. Határozzuk meg azoknak a P pontoknak a halmazát, amelyekre teljesül a következő feltétel:

   Létezik l-en két pont: Q és R úgy, hogy M a QR szakasz felezőpontja, és C a PQR háromszög beírt köre. (IMO, 1992/4.) **(HF)**

4. Az ABC háromszögről tudjuk, hogy $AB + BC = 3AC$. Jelölje I a háromszög beírt körének középpontját. A beírt kör érintse az AB, illetve a BC oldalt rendre a D és az E pontban, melyek I-re való tükörképe legyen K és L. Bizonyítsuk be, hogy az $ACKL$ négyszög húrnégyszög. (IMO Shortlist, 2005)

5. Tekintsük az ABC háromszöget, melynek beírt köre legyen ω. Jelölje D_1, illetve E_1 az ω kör érintési pontjait rendre a BC, valamint az AC oldallal. Legyen D_2, illetve E_2 a BC, illetve az AC oldal egy-egy olyan pontja, hogy $CD_2 = BD_1$, továbbá $CE_2 = AE_1$. Az AD_2 és BE_2 szakaszok metszéspontját jelöljük P-vel. Az AD_2 szakasz és az ω kör A-hoz közelebbi metszéspontja legyen Q. Mutassuk meg, hogy $AQ = D_2P$. (USAMO, 2001/2.)

6. Az 5. feladat alapján mutassuk meg, hogy a háromszög beírt körének I középpontja, S súlypontja és N Nagel-pontja egy egyenesre esik, továbbá S az IN szakasz I-hez közelebbi harmadolópontja. A szóban forgó egyenest a háromszög *Nagel-egyenesének* hívjuk.

7. Tegyük fel, hogy előzetesen már ismertük az I, S és N pontok speciális helyzetét. Ennek ismeretében oldjuk meg az 5. feladatot. **(HF)**

8. Legyen az ABC háromszög beírt körének középpontja I, körülírt körének középpontja pedig O. Jelölje K a beírt kör és a BC oldal közös pontját. Tükrözzük K-t a BC oldal felezőpontjára; a kapott pont legyen K'. Bizonyítsuk be, hogy ha az IO egyenes párhuzamos a BC oldallal, akkor O rajta van az AK' egyenesen.

9. Legyen az ABC háromszög magasságpontja M, beírt körének középpontja I, körülírt körének középpontja pedig O. Jelölje K a beírt kör és a BC oldal közös pontját. Igazoljuk, hogy ha az IO egyenes párhuzamos a BC oldallal, akkor az AO és az MK egyenes párhuzamos. (Tournamet of Towns, 2003) **(HF)**

10. Legyen $ABCD$ konvex négyszög, amelyben $AB \neq BC$. Jelölje ω_1, illetve ω_2 rendre az ABC, illetve ADC háromszögek beírt körét. Tegyük fel, hogy létezik olyan ω kör, amelyik érinti a BA félegyenes A-n túli részét és a BC félegyenes C-n túli részét, továbbá az AD és CD egyeneseket. Bizonyítsuk be, hogy az ω_1 és ω_2 körök közös külső érintői az ω körön metszik egymást. (IMO, 2008/6.) **(HF)**

11. Tegyük fel, hogy az A, B, C pontok ebben a sorrendben egy egyenesre illeszkednek. Legyen k egy A-ra és C-re illeszkedő tetszőleges kör, azzal a megszorítással, hogy a középpontja nem esik az AC szakaszra. Jelölje P a k körhöz A-ban, illetve C-ben húzott érintők metszéspontját. A PB szakasz messe k-t a Q pontban. Bizonyítsuk be, hogy az $AQC\sphericalangle$ szögfelezője az AC egyenest a k kör megválasztásától függetlenül mindig ugyanabban a pontban metszi. (IMO Shortlist, 2003)

12. A síkon messe egymást két tetszőleges kör az A és B pontokban. Az egyik közös érintőjük érintse a köröket a P, illetve a Q pontokban. Vegyük fel az APQ háromszög körülírt körének P-, illetve Q-beli érintőit. Ezek metszéspontja legyen S. Tükrözzük a B pontot a PQ egyenesre; a kapott pontot jelölje H. Mutassuk meg, hogy az A, S, H pontok kollineárisak. (Vietnám TST, 2001) (A második eset **HF**.)

13. Legyen az ABC háromszög körülírt köre ω. A B-beli és C-beli érintői ω-nak messe egymást T-ben. Állítsunk merőlegest A-ban AT-re, és tegyük fel, hogy ez a BC félegyenest S-ben metszi. Vegyük fel az ST félegyenesen a B_1 és C_1 pontokat úgy, hogy $B_1T = BT = C_1T$ teljesüljön, és C_1 kerüljön T és S közé. Igazoljuk, hogy az ABC és az AB_1C_1 háromszögek hasonlóak. (USA TST, 2007)

14. Tekintsük az ABC egyenlő szárú háromszöget, melyben $AC = BC$. Vegyük fel a háromszög belsejében a P pontot úgy, hogy $PAB\sphericalangle = PBC\sphericalangle$ teljesüljön. Legyen F az AB oldal felezőpontja. Mutassuk meg, hogy $APF\sphericalangle + BPC\sphericalangle = 180°$. (Lengyelország, 2000) **(HF?)**

15. Tekintsük az ABC háromszöget. Legyen X annak a forgatva nyújtásnak a centruma, mely B-t A-ba, A-t pedig C-be viszi. Bizonyítsuk be, hogy X rajta van az ABC háromszög A csúcsából induló szimmediánjának egyenesén.

16. Tekintsük az ABC háromszöget, melynek súlypontja legyen S. Legyen P a BC szakasz egy tetszőleges belső pontja. Vegyük fel a CA oldalon a Q, az AB oldalon pedig az R pontot úgy, hogy $PQ \parallel AB$ és $PR \parallel CA$. Mutassuk meg, hogy a P pont helyétől függetlenül az AQR háromszög körülírt köre mindig áthalad a sík egy olyan adott X pontján, melyre $BAS\sphericalangle = CAX\sphericalangle$. (USA TST, 2008)

17. Legyen ABC egy hegyesszögű, nem szabályos háromszög. Jelölje rendre F_a, F_b, F_c a BC, CA, illetve AB oldalak felezőpontját. Az AF_a súlyvonalat messe az AB oldal felezőmerőlegese a D, míg a CA oldal felezőmerőlegese az E pontban. A BD és CE egyenesek metszéspontját jelölje F. Igazoljuk, hogy A, F_c, F és F_b egy körön vannak. (USA, 2008) **(HF)**

Ajánlott irodalom, források:

1. Dobos Sándor, Reiman István: Nemzetközi matematikai diákolimpiák (1959-2003), Typotex Kiadó, 2003
2. POON Wai Hoi Bobby (St. Paul's College): Several Proofs of Ceva's Theorem by Students, 數學教育第二十五期 (Matematikai Oktatás 25. sz., 12/2007)

   (URL: http://www.hkame.org.hk/uploaded_files/magazine/25/409.pdf; utolsó letöltés: 2019. 06. 15.)
3. Surányi László: A háromszög kevésbé ismert nevezetes pontjairól I. rész

   (URL: http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=198411; utolsó letöltés: 2019. 06. 15.)
4. Surányi László: A háromszög kevésbé ismert nevezetes pontjairól II. rész

   (URL: http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=198412; utolsó letöltés: 2019. 06. 15.)
5. Titu Andreescu, Sam Korsky, Cosmin Pohoata: Lemmas in Olympiad Geometry, XYZ Press, 2016
6. Yufei Zhao: Three Lemmas in Geometry (Winter Camp 2010)

   (URL: http://yufeizhao.com/olympiad/three_geometry_lemmas.pdf; utolsó letöltés: 2019. 06. 15.)