A PROJEKTÍV SÍK ALAKJA – RÁTZ LÁSZLÓ VÁNDORGYŰLÉS 2018

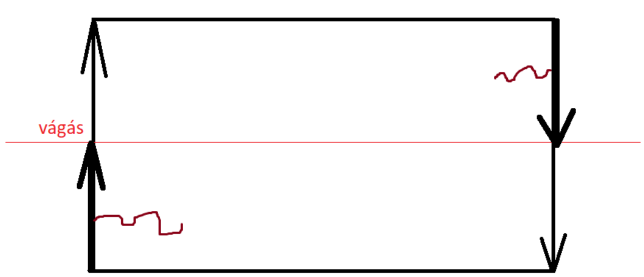
Jelölések. $\mathbb{R}^n$ az n-dimenziós Euklideszi tér. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ az *n-dimenziós gömbfelület*, azaz az origótól 1 távolságra lévő pontok halmaza. $\bar{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ (ill. B^n) az *n dimenziós zárt (ill. nyílt) golyó*, az origótól legfeljebb (ill. kevesebb, mint) 1 távolságra lévő pontok halmaza, $\bar{B}^n = B^n \cup S^{n-1}$. $\mathbb{P}^n$ az *n-dimenziós projektív tér*, M^2 a *(zárt) Möbius-szalag*, K^2 a *Klein-kancsó*, T^2 a tórusz, H^2 a (zárt) hengerpalást (körgyűrű). $A = B$ jelöli most azt, hogy az A és B terek topologikusan megegyeznek, azaz homeomorfak. $A \cup_C B$ az A és B terek összeragasztása C mentén, például $S^n = \bar{B}^n \cup_{S^{n-1}} \bar{B}^n$.

1. Gömb, tórusz, Möbius, Klein

1.1. Vágj szét egy Möbiusz-szalagot a középvonala mentén (körbe). Mit tapasztalsz? Mit kaptál? És ha újra megismétled a mutatványt azzal, amit kaptál?

Első észrevétel, hogy nem esik ketté, azaz összefüggő marad az első vágás után, egy többszörösen (páros sokszor) megcsavarodott valamit kapunk. Ez a valami topológiailag egy henger, hiszen egy téglalapból kiindulva ugyanúgy kell összeragasztani egy szemközti élpárt, mint a henger esetében. Miért tűnik mégis másmilyennek, mint a szokásos henger? Mert más a *beágyazása* a 3-dimenziós térbe. A hengert két körvonal határolja: az egyik a Möbius-szalag eredeti peremvonala, a másik a vágás során keletkezik a középvonalból.

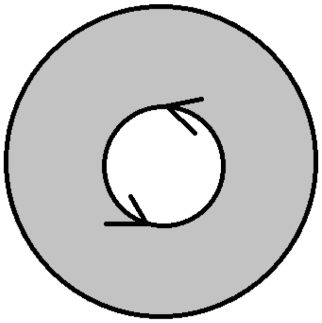
Hogy miért nem esik ketté, az jobban látható, ha az absztrakt Möbius-szalagon mutatjuk meg:



Ha a keletkező csavarodott hengert is szétvágjuk, két henger lesz belőle, mint minden hengerből. Ám mindkét henger csavarodott és hurkolódnak egymással.

1.2. Színezz ki egy Möbius-szalagot szívárványszerűen körbe. Majd vágd szét a középvonala mentén. Mit tapasztalsz?

Az összetartozó pontok (azonos színek) a vágás során keletkezett perem átellenes pontjai, összhangban a Möbius-szalagnak azzal a diagramjával, amit a projektív síkhoz használtunk:



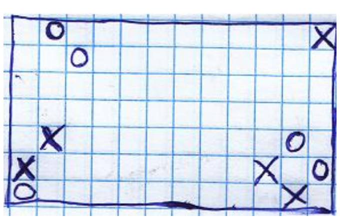
1.3. Mondj egy indokot arra, hogy a 2-dimenziós gömbfelület és a tóruszfelület topológiailag különbözőek (azaz nem homoemorfak egymással)!

A tóruszfelületen van olyan (topológiai) körvonal, ami mentén szétvágva összefüggő marad (nem esik darabokra, csak henger lesz belőle). A gömbön nincs ilyen. A gömböt bármilyen körvonal mentén kettévágva két körlapot kapunk. Precízebben: van olyan $S^1 \subset T^2$, hogy $T^2 \setminus S^1$ összefüggő, de $S^2 \setminus S^1$ tetszőleges $S^1 \subset S^2$ választással nem összefüggő (azaz vannak olyan pontjai, melyek között nincs út).

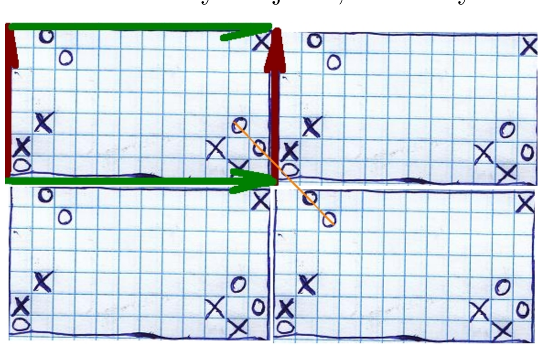
1.4. Az absztrakt és a térbeli Möbius-szalag középvonala mentén körbevitt ábra is megtükröződve tér vissza, ám a térbeli esetben történik még valami: az ábra átkerül a szalag másik oldalára. Mitől van ez a különbség?

Nincs különbség. Egyrészt egy felületnek lokálisan két oldala van a három dimenziós térben, de csak ott: négy dimenziós térbe ágyazva körbe lehetne járni a felületet, akárcsak egy vonalat a három dimenziós térben (aminek pedig síkban szintén két oldala van). A két oldal tehát nem a felület tulajdonsága, hanem az eggyel magasabb dimenziós térbe ágyazásé. Másrészt a felületre (inkább: felületbe) rajzolt minta az nem egyik vagy másik oldalán van a felületnek, hanem része annak. Összehasonlításképp: a térben élünk, amely része az eggyel nagyobb dimenziós téridőnek. Melyik oldalán élünk a térnek, a múlt vagy a jövő felőlin?

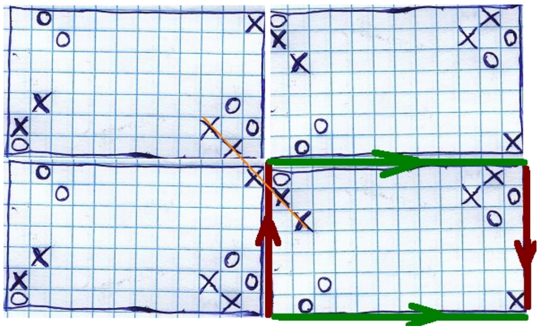
1.5. Olivér és Xavér ötödölőt játszanak, Olivér van a körrel, Xavér az x-szel. Az állást az alábbi ábra mutatja. Olivér és Xavér mindketten azt állítják, hogy győztek. Milyen felületen képzeli el a játékot Olivér és milyenen Xavér?



Ha tóruszon folyik a játék, Olivér nyer:



Ha Klein-kancsón, akkor Xavér:



1.6. Milyen terek közötti homeomorfizmust mutatnak a következő középpontos vetítések?

(a) Egy gömbfelület vetítése egy P pontjából az átellenes pontbeli érintősíkra.

(b) Egy nyílt félgömb vetítése a középpontjából a peremkörével párhuzamos érintősíkra.

(c) Egy zárt félgömb vetítése a középpontjából a peremkörével párhuzamos érintősíkra.

(d) Egy gömbfelület vetítése a középpontjából egyik érintősíkjára.

(a) $S^2 \setminus P = \mathbb{R}^2$.

(b) $B^2 = \mathbb{R}^2$.

(c) A zárt körlap peremén fekvő szemközti pontpárokat azonosítva projektív síkot kapunk.

(d) S^2 szemközti pontjait azonosítva a $\mathbb{P}^2$ projektív síkot kapjuk.

Jegyezzük meg, hogy mindegyik konstrukció működik más dimenziókban is, érdemes átgondolni az 1 dimenziós esetet.

1.7. Mutasd meg, hogy $S^2 \setminus P = S^2 \setminus \bar{B}^2 = B^2$, ahol $P \in S^2$ tetszőleges pont, és $S^2 \setminus \{P, Q\} = H^2$ ($P, Q \in S^2$, $P \neq Q$).

Az első állítás következik az előző feladat (a) és (b) pontjaiból. A második teret vetítve láthatjuk, hogy megegyezik a $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}^2 = \mathbb{R}^2 \setminus P$ térrel. Általában is, egy felületből egy zárt körlap elhagyása egyenértékű egy pont elhagyásával, azaz egy lyuk mérete egyetlen pontttá csökkenthető.

1.8. Vegyél egy k dimenziós golyót és egy j dimenziós gömbfelületet! Mit kapsz ezek direkt szorzataiként $k = 0, 1, 2$ és $j = 0, 1, 2$ esetén?

A golyók (D^k) 0, 1, 2 dimenziós változatai: egy pont, egy szakasz, egy körlap. A gömbök (S^j) 0, 1, 2 dimenziós változatai: két pont, egy körvonal, egy gömbfelület. Pár példa:

$D^1 \times$ akármi: az az akármi.

$S^0 \times D^1$: kettő darab szakasz.

$S^0 \times S^0$: négy pont.

$S^0 \times S^1$: két körvonal.

$D^1 \times D^1$: egy négyzetlap, vagyis D^2.

$D^1 \times S^1$: hengerpalást, vagyis körgyűrű.

$D^1 \times S^2$: gömbhéj (egy golyóból kihagyunk egy kisebb sugarú golyót).

$D^2 \times D^1$: tömör henger (hengertest), vagyis D^3.

$D^2 \times S^1$: tömör tórusz (tórusztest).

$S^1 \times S^1$: tóruszfelület.

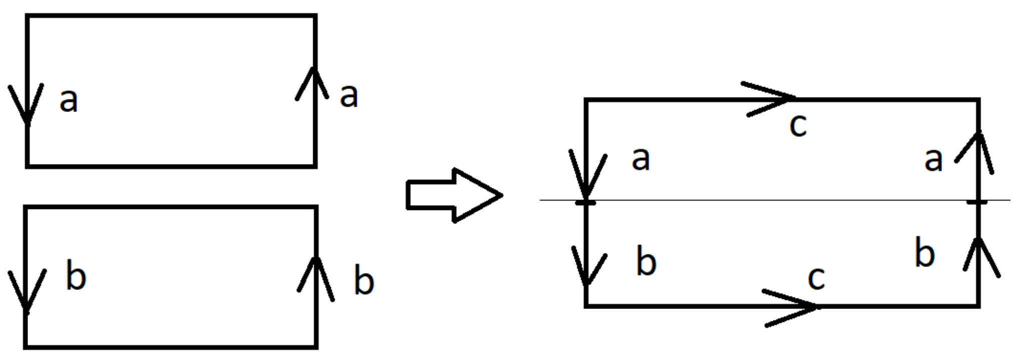
Megfigyelhetjük, hogy $D^k \times D^n = D^{k+n}$, de az S-ekre ez nem teljesül.

1.9. A földrajzi hosszúsági és szélességi körök koordinátázzák a gömbfelületet. Miért nem következik ebből az, hogy a gömbfelület egy körvonal és egy szakasz direkt szorzata?

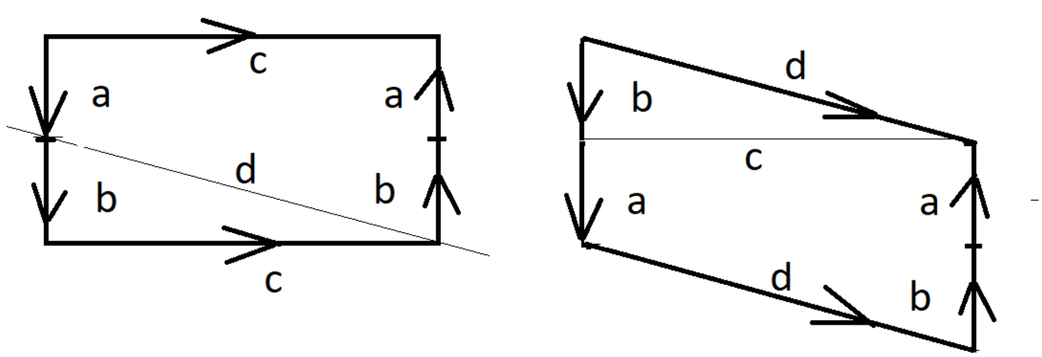
Mert a szélességi és hosszúsági koordináták nem egyértelműek: az északi és a déli pólus mindegyik hosszúsági körön rajta van. Ezzel összhangban a $\pm 90°$-os szélességi körök nem is körök, csak egy-egy pont. Egy körvonal és egy szakasz direkt szorzata hengerpalást, és ha az alapkört és a fedőkört összecsípjük egy-egy ponttá, akkor valóban gömbfelületet kapunk.

1.10. Ha két Möbius-szalagot összeragasztunk a peremkörvonalaik mentén, akkor Klein-kancsót kapunk, azaz $M^2 \cup_{S^1} M^2 = K^2$.

A ragasztást a perem egyik részén elvégezve, másik részén kijelölve:



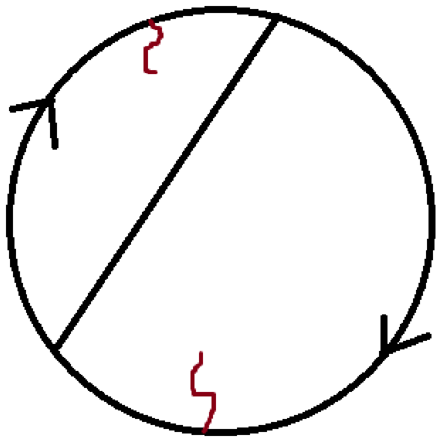
erről azonban még nem látszik kapásból, hogy a Klein-kancsó, a jobb és a bal oldali él ragasztása nem stimmel. Egy d vágást eszközölve a c menti ragasztást el tudjuk végezni, és így már szó szerint a Klein-kancsó diagramját kapjuk:



2. A projektív sík

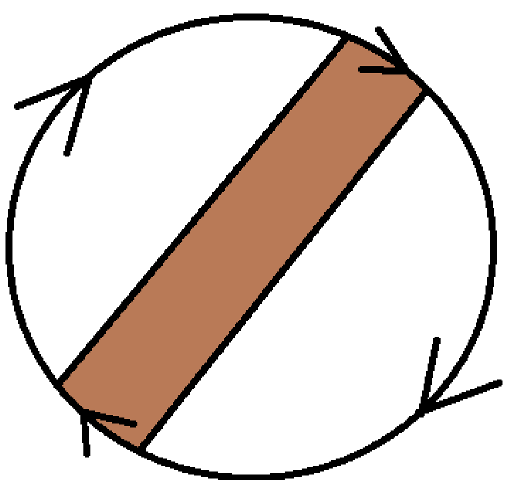
2.1. $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{P}^1$ összefüggő.

A projektív egyenes "megvastagítása" a projektív síkon egy Möbius-szalag, aminek az egyenes a középvonala. A Möbius-szalag összefüggő marad, ha eltávolítjuk a középvonalát. Ez közvetlenül is látszik a projektív sík diagramján: az egyik körszeletből a peremen kilépve a másik körszeletbe jutunk, vagyis összefüggő marad.



Ha $\mathbb{P}^1$-nek az ideális egyenest választjuk, ami a diagramon a körlap pereme, akkor jól látható, hogy $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{P}^1 = B^2 = \mathbb{R}^2$. (Ez természetesen bármelyik egyenessel működik, az ideális nincs kijelölve, az választásunk kérdése.)

2.2. Hogyan néz ki az ideális egyenessel kibővített síkon a projektív sík diagramján bejelölt Möbius-szalag alakú sáv?



Két párhuzamos egyenes közötti sáv, gondolhatnánk elsőre, de ez nem jó, hiszen a párhuzamos egyenesek ugyanabban a pontban metszik az ideális egyenest. Egy hiperbola két ága által közrezárt síkrész viszont megfelel, az aszimptoták által meghatározott ideális pontokba futnak be az ágak.

2.3. Mi a kapcsolat a projektív sík különböző konstrukciói között?

(a) Ideális egyenessel kibővített sík.

(b) Zárt körlap, peremén a szemközti pontok azonosítva.

(c) Gömbfelület, a szemközti pontok azonosítva.

(d) $\mathbb{R}^3$ origón átmenő egyeneseinek halmaza.

(e) Az $[x : y : z]$ homogén koordináta-hármasok halmaza ($[x : y : z] = [rx : ry : rz]$, ha $0 \neq r \in \mathbb{R}$, és $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$).

(f) $\mathbb{P}^2 = \bar{B}^2 \cup_{S^1} M^2$.

(a)–(c)-t összekapcsolja az 1.6. (c) pontban leírt vetítés. (f)-fel való kapcsolat látszik például az 1.2. vagy a 2.2. feladat ábrájából.

A projektív sík azonosítható a vetítési egyenesek halmazával is, ami éppen (d), ha a vetítési középpont az origó. Minden egyenest meghatároz az irányvektora, ami egy nem 0 vektor, skalárszorzó erejéig jól definiált: így kapjuk az (e) pontban leírt homogén koordinátázását a projektív síknak.

(e) és (a) kapcsolatához érdemes úgy gondolni, hogy $\mathbb{R}^3$-ban a $z = 1$ egyenletű sík az xy sík, ekkor $z \neq 0$ esetén $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2$ az $(x/z, y/z, 1) \in \mathbb{R}^2$ pontnak felel meg a síkon. A $z = 0$ koordinátájú pontok alkotják az ideális egyenest. De ez persze csak egy lehetséges választás!

(f) kivételével az összes konstrukció működik más dimenziókban is, érdemes átgondolni a $\mathbb{P}^1 = S^1$ projektív egyenes esetére, vö. 1.6.

Érdemes átgondolni mindegyik konstrukciónál azt is, hogy hogyan helyezkednek el a projektív egyenesek abban a modellben.

2.4. Vegyünk a projektív síkon egy e (projektív) egyenest, egy rajta kívüli P pontot és P körül egy D nyílt körlapot. Definiálhatunk egy $\mathbb{P}^2 \setminus D \to e$ vetítést: egy Q pont képe a PQ egyenes és e metszéspontja. Minek felel meg ez a leképezés topológiailag?

$\mathbb{P}^2 \setminus D = M^2$, a P ponton átmenő egyenesek D-n kívüli részei tekinthetők az alkotóinak, e a középvonala, D lezártjának pereme a Möbius-szalag pereme, a vetítés a Möbius-szalag vetítése a középvonalára. Látjuk, hogy a peremkör pontjai duplán vetülnek, azonosítva egyúttal az $e = \mathbb{P}^1$ projektív egyenest a peremkörrel, ha annak átellenes pontjait azonosítjuk.

2.5. (a) Hány ideális pontja van az $x^2 + y^2 = 9$, $y = x^2$ illetve $xy = 1$ egyenletű görbéknek?

(b) Mutasd meg, hogy az $h(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ egyenletű nemelfajuló kúpszelet típusa a $D = b^2 - 4ac$ diszkrimináns előjelétől függ: ha $D > 0$ akkor a kúpszelet egy hiperbola, ha $D = 0$, akkor parabola, ha $D < 0$, akkor ellipszis.

Szemléletesen világos, hogy a hiperbola 2, a parabola 1, az ellipszis 0 pontban metszi az ideális egyenest. A konkrét egyenletekre ezt ki is lehet próbálni a (b) pontra alább közölt számolási eljárással.

Az egyenlet által meghatározott kúpszelet típusát úgy lehet megállapítani, hogy megnézzük, hány metszéspontja van az ideális egyenessel. Ehhez ki kell terjeszteni a kúpszeletet a projektív síkra, meg kell adni az egyenletét homogén koordinátákban. $z \neq 0$ esetén $[x : y : z]$ az $(x/z, y/z, 1)$ ponttal egyezik meg, tehát akkor van rajta a kúpszeleten, ha $h(x/z, y/z) = 0$ teljesül. Az egyenletet felszorozva z^2-tel homogén egyenletet kapunk, minden tag másodfokú, és immár $z = 0$-ra is értelmes a kifejezés: ez a kúpszelet projektivizáltjának az egyenlete. Ezt kell elmetszeni az ideális egyenessel, vagyis $z = 0$-t kell helyettesíteni, így a $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ egyenlet marad, ennek megoldásával kapjuk a képszelet $[x : y : 0]$ végtelen távoli pontjait, de csak x és y aránya számít. Vagyis elég meghatároznunk x-et y függvényében ($y = 0$ esetén fordítva), a megoldások száma D előjelétől függ.

Összeállította: Pintér Gergő
pinter.gergo@renyi.mta.hu
matemorfozis.hu
matemorfozis@gmail.com