Magasdimenziós geometria feladatsor

Definíciók

$\mathbb{R}^d = \{\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d) \ : \ v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{R}\}$.
Skaláris szorzás: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + \ldots + u_d v_d$.
Norma: $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + \ldots + u_d^2$.
Távolság: $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$.
Szög: $\cos \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$, feltéve, hogy $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
Hipersík: Adott $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor a

$$H = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \ : \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \lambda\}$$

halmaz egy $\mathbf{n}$ normálvektorú hipersík. Másképp: H az $n_1 v_1 + \ldots + n_d v_d = \lambda$ lineáris, d-ismeretlenes (ismeretlenek: $v_1, \ldots, v_d$) egyenlet megoldáshalmaza.

Zárt féltér: Adott $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor az

$$F = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \ : \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \leq \lambda\}$$

halmaz egy $\mathbf{n}$ külső normálvektorú féltér.

Skaláris szorzás, távolság, szög

1. $\mathbb{R}^3$-ban: Ha egy tetraéder két-két szemközti éle merőleges egymásra, akkor a harmadik élpár tagjai is azok. *Segítség:* 1. megoldás: a bennfoglaló parallelepipedon élei azonos hosszúak. 2. megoldás: Ha $\mathbf{a}(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$ és $\mathbf{b}(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$, akkor $\mathbf{c}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$.

2. Legyen $P_1, \ldots, P_n$ síkbeli konvex sokszög, O tetszőleges pont. Igazoljuk, hogy az $[O, P_i]$ szakaszok Thálesz-köreinek uniója fedi a sokszöget. *Segítség:* Ha Q nincs a körök uniójában, akkor az OQP_i szög hegyesszög minden i-re, így az összes P_i a Q-ra illeszkedő, OQ normálvektorú egyenes által határolt O-t tartalmazó félsíkban van.

3. Mondjuk ki és igazoljuk a Thálesz-tételt d-dimenzióban. *Segítség:* A $[-\mathbf{a}, \mathbf{a}]$ szakasz Thálesz-gömbje: $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \ : \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}\}$. Másrészt a $-\mathbf{ava}$ szög pontosan akkor derékszög, ha $(\mathbf{a} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{v}) = 0$.

4. Igazoljuk d dimenzióban a háromszög-egyenlőtlenséget. *Segítség:* Fel kell használni a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget, amely szerint $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.

5. $\mathbb{R}^d$-ben hány egy pontból induló félegyenest lehet úgy felvenni, hogy a páronkénti szögek megegyezzenek? *Segítség:* Dimenzió szerinti indukció. $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ egységvektorok. Vetítsünk a $\mathbf{v_n}$-re merőleges hipersíkra: $\mathbf{v_i}' := \mathbf{v_i} - \mathbf{v_n}(\mathbf{v_i} \cdot \mathbf{v_n})$ (ez nagyon fontos: a skaláris szorzásnak ez a képlet a geometriai jelentése). Ekkor a $\mathbf{v_i}'$-k azonos hosszúak, és a páronkénti skaláris szorzataik (így a szögeik is) megegyeznek (számolás, használjuk: $\mathbf{v_i} \cdot \mathbf{v_j} = \mathbf{v_k} \cdot \mathbf{v}_\ell$, ha $i \neq j$ és $k \neq \ell$).

Hipersík

6. Írjuk fel a kör/gömb adott pontbeli érintő-egyenesének/síkjának az egyenletét.

7. Legyen K konvex halmaz $\mathbb{R}^d$-ben, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d \setminus K$. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{q} \in K$ pont a K halmaz $\mathbf{p}$-hez legközelebbi pontja. Belátandó, hogy a $\mathbf{q}$-ra illeszkedő, $\mathbf{qp}$ egyenesre merőleges hipersík támasz-hipersíkja K-nak, azaz K az ezen hipersík által határolt egyik (zárt) féltérben van. *Segítség:* Ha lenne olyan $\mathbf{z} \in K$ pont, amelyre $\mathbf{z} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}) > \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q})$, akkor elegendően kicsi $t > 0$ számra $\mathbf{q}' := \mathbf{q} + t(\mathbf{z} - \mathbf{q}) \in K$ teljesülne, de $\mathbf{q}'$ közelebb lenne $\mathbf{p}$-hez, mint $\mathbf{q}$.

Egyebek

8. Mennyi az $\mathbb{R}^3$-beli szabályos egység élhosszú tetraéder körülírt gömbjének a sugara? *Segítség:* 1. megoldás: Ágyazzuk be $\mathbb{R}^4$-be. 2. megoldás: Ágyazzuk be a kockába.

9. Hogy szólhat a d-dimenziós *Euler-formula*? Nézzük meg szimplexre (tetraéder), kockára, kereszt-politópra (oktaéder). *Segítség:* Tétel: Minden d-dimenziós konvex poliéderre, ha $f_0, f_1, \ldots, f_{d-1}$ jelöli a csúcsok, élek,..., hiperlapok számát, és (mesterségesen) bevezetjük az $f_{-1} = f_d = 1$ jelöléseket, akkor $\sum_{i=-1}^{d}(-1)^i f_i = 0$. (Kis csalás: nem definiáltuk az i-dimenziós lapokat, nem is lenne könnyű, ezért muszáj a háromdimenziós szemléletre bízni.)
A képlet igazolása szimplexre: $f_i = \binom{d+1}{i+1}$, ezt el kell hinni. Így $\sum_{i=-1}^{d}(-1)^i f_i = (1-1)^{d+1}$.
Igazolás kockára dimenzió szerinti indukcióval: Lássuk be, hogy $f_i^d = f_{i-1}^{d-1} + 2f_i^{d-1}$, ahol a felsőindex a kocka dimenziója.
Igazolás keresztpolitópra hasonlóan: $f_i^d = 2f_{i-1}^{d-1} + f_i^{d-1}$.

10. Fejezzük ki az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorokkal az $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ szakasz felezőpontjának a helyvektorát. Fejezzük ki a szakaszt $3 : 4$ arányban osztó, $\mathbf{a}$-hoz közelebbi pont helyvektorát. Fejezzük ki az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ csúcsvektorokkal a háromszög $\mathbf{c}$-ből induló súlyvonalát $2 : 5$ arányban osztó, $\mathbf{c}$-hez közelebbi pont helyvektorát. *Megjegyzés:* Cél a konvex kombináció bevezetése.

11. Igazoljuk, hogy a d-dimenziós egységgömb konvex halmaz. *Segítség:* Háromszögegyenlőtlenség.

Helly tétele

12. Adott a síkon négy pont. Igazoljuk, hogy kettéoszthatók úgy, hogy a két rész konvex burka metszi egymást.

13. Adott a térben öt pont. Igazoljuk, hogy kettéoszthatók úgy, hogy a két rész konvex burka metszi egymást. (nehéz) *Segítség:* Feltehető, hogy P_4 és P_5 a $P_1P_2P_3$ sík, H, két különböző oldalán van. Vetítsük P_5-öt P_4-ből középpontosan H-ra: P_5'. A H síkot a $P_1P_2P_3$ háromszög oldalegyenesei 7 részre partícionálják. Esetszétválasztás: nézzük meg melyik részbe esik P_5'.

Radon-lemma: Adott $\mathbb{R}^d$-ben $d+2$ pont. Ekkor kettéoszthatók úgy, hogy a két rész konvex burka metszi egymást. (Erre nem ismerek szép középiskolás igazolást.)

14. A Radon-lemma segítségével igazoljuk *Helly tételét*: Adott $\mathbb{R}^d$-ben véges sok konvex halmaz, $K_1, \ldots, K_n$, ahol $n \geq d+1$. Tegyük fel, hogy bárhogy választunk ki közülük $d+1$-et, ezek metszete nem üres. Ekkor $K_1 \cap \ldots \cap K_n \neq \emptyset$.

Segítség: Először lássuk be, hogy elég az állítást az $n = d+2$ esetben igazolni. Másodszor adott $K_1, \ldots, K_{d+2}$. Legyen $P_i \in \cap_{j=1, j\neq i}^{d+2} K_j$, alkalmazzuk a Radon-lemmát.

15. Tegyük fel, hogy az $F_1, \ldots, F_n$ félterek fedik $\mathbb{R}^d$-t, azaz az uniójuk az egész tér. Lássuk be, hogy kiválasztható közülük $d+1$, amelyek fedik $\mathbb{R}^d$-t. *Segítség:* Helly tétele a félterek komplementereire.

16. Adott véges sok pont $\mathbb{R}^d$-ben, amelyek közül bármely $d+1$ lefedhető egy egységgömbbel. Igazoljuk, hogy az összes is. *Segítség:* Cél: olyan pont találása, amely benne van a pontok körüli egységgömbök metszetében.

17. Adott véges sok pont $\mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_n} \in \mathbb{R}^d$ és egy konvex halmaz, K. Tegyük fel, hogy a pontok közül bármely $d+1$ lefedhető K egy eltoltjával. Igazoljuk, hogy az összes is. *Segítség:* Észrevétel: a $\mathbf{t} + K := \{\mathbf{t} + \mathbf{k} \ : \ \mathbf{k} \in K\}$ eltolt fedi a $\mathbf{p_i}$ pontot $\Leftrightarrow$ $\mathbf{t} \in \mathbf{p_i} - K := \{\mathbf{p_i} - \mathbf{k} \ : \ \mathbf{k} \in K\}$. Így a cél: $\cap_{i=1}^{n}(\mathbf{p_i} - K) \neq \emptyset$.