Magasdimenziós geometria feladatsor

Definíciók

$\mathbb{R}^d = \{\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d) \ : \ v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{R}\}$.
Skaláris szorzás: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + \ldots + u_d v_d$.
Norma: $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + \ldots + u_d^2$.
Távolság: $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$.
Szög: $\cos \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$, feltéve, hogy $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
Hipersík: Adott $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor a

$$H = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \ : \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \lambda\}$$

halmaz egy $\mathbf{n}$ normálvektorú hipersík. Másképp: H az $n_1 v_1 + \ldots + n_d v_d = \lambda$ lineáris, d-ismeretlenes (ismeretlenek: $v_1, \ldots, v_d$) egyenlet megoldáshalmaza.

Zárt féltér: Adott $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor az

$$F = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \ : \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \leq \lambda\}$$

halmaz egy $\mathbf{n}$ külső normálvektorú féltér.

Skaláris szorzás, távolság, szög

1. $\mathbb{R}^3$-ban: Ha egy tetraéder két-két szemközti éle merőleges egymásra, akkor a harmadik élpár tagjai is azok.

2. Legyen $P_1, \ldots, P_n$ síkbeli konvex sokszög, O tetszőleges pont. Igazoljuk, hogy az $[O, P_i]$ szakaszok Thálesz-köreinek uniója fedi a sokszöget.

3. Mondjuk ki és igazoljuk a Thálesz-tételt d-dimenzióban.

4. Igazoljuk d dimenzióban a háromszög-egyenlőtlenséget.

5. $\mathbb{R}^d$-ben hány egy pontból induló félegyenest lehet úgy felvenni, hogy a páronkénti szögek megegyezzenek?

Hipersík

6. Írjuk fel a kör/gömb adott pontbeli érintő-egyenesének/síkjának az egyenletét.

7. Legyen K konvex halmaz $\mathbb{R}^d$-ben, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d \setminus K$. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{q} \in K$ pont a K halmaz $\mathbf{p}$-hez legközelebbi pontja. Belátandó, hogy a $\mathbf{q}$-ra illeszkedő, $\mathbf{qp}$ egyenesre merőleges hipersík támasz-hipersíkja K-nak, azaz K az ezen hipersík által határolt egyik (zárt) féltérben van.

Egyebek

8. Mennyi az $\mathbb{R}^3$-beli szabályos egység élhosszú tetraéder körülírt gömbjének a sugara?

9. Hogy szólhat a d-dimenziós *Euler-formula*? Nézzük meg szimplexre (tetraéder), kockára, kereszt-politópra (oktaéder).

10. Fejezzük ki az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorokkal az $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ szakasz felezőpontjának a helyvektorát. Fejezzük ki a szakaszt $3 : 4$ arányban osztó, $\mathbf{a}$-hoz közelebbi pont helyvektorát. Fejezzük ki az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ csúcsvektorokkal a háromszög $\mathbf{c}$-ből induló súlyvonalát $2 : 5$ arányban osztó, $\mathbf{c}$-hez közelebbi pont helyvektorát.

11. Igazoljuk, hogy a d-dimenziós egységgömb konvex halmaz.

Helly tétele

12. Adott a síkon négy pont. Igazoljuk, hogy kettéoszthatók úgy, hogy a két rész konvex burka metszi egymást.

13. Adott a térben öt pont. Igazoljuk, hogy kettéoszthatók úgy, hogy a két rész konvex burka metszi egymást. (nehéz)

Radon-lemma: Adott $\mathbb{R}^d$-ben $d+2$ pont. Ekkor kettéoszthatók úgy, hogy a két rész konvex burka metszi egymást. (Erre nem ismerek szép középiskolás igazolást.)

14. A Radon-lemma segítségével igazoljuk *Helly tételét*: Adott $\mathbb{R}^d$-ben véges sok konvex halmaz, $K_1, \ldots, K_n$, ahol $n \geq d+1$. Tegyük fel, hogy bárhogy választunk ki közülük $d+1$-et, ezek metszete nem üres. Ekkor $K_1 \cap \ldots \cap K_n \neq \emptyset$.

15. Tegyük fel, hogy az $F_1, \ldots, F_n$ félterek fedik $\mathbb{R}^d$-t, azaz az uniójuk az egész tér. Lássuk be, hogy kiválasztható közülük $d+1$, amelyek fedik $\mathbb{R}^d$-t.

16. Adott véges sok pont $\mathbb{R}^d$-ben, amelyek közül bármely $d+1$ lefedhető egy egységgömbbel. Igazoljuk, hogy az összes is.

17. Adott véges sok pont $\mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_n} \in \mathbb{R}^d$ és egy konvex halmaz, K. Tegyük fel, hogy a pontok közül bármely $d+1$ lefedhető K egy eltoltjával. Igazoljuk, hogy az összes is.