Alternáló utas algoritmus particsákókkal

Kornai Júlia
julia.kornai@gmail.com

Szeszlér Dávid
szeszler@cs.bme.hu

58. Rátz László Vándorgyűlés

Győr, 2018. július 6.

Az ELTE Radnóti Gimnázium ósükösdi táborai

- tehetséges és nyitott, de többségében *nem* matekos gyerekek (Azóta: vegyész, orvos, közgazdász, filozófus, költő, pszichológus, politológus,. . . – illetve: matematikus)

Az ELTE Radnóti Gimnázium ósüködsi táborai

- tehetséges és nyitott, de többségében *nem* matekos gyerekek (Azóta: vegyész, orvos, közgazdász, filozófus, költő, pszichológus, politológus,. . . – illetve: matematikus)
- A foglalkozások célja:
  - betekintést adni a „kortárs” matematikába
  - megmutatni a felfedezés élményét, örömét
  - vonzó, élményszerű matek a kevésbé matekosoknak
  - újdonságok, gondolkodnivalók a matekosoknak

Az ELTE Radnóti Gimnázium ósüközsdi táborai

- tehetséges és nyitott, de többségében *nem* matekos gyerekek (Azóta: vegyész, orvos, közgazdász, filozófus, költő, pszichológus, politológus,. . . – illetve: matematikus)
- A foglalkozások célja:
    - betekintést adni a „kortárs” matematikába
    - megmutatni a felfedezés élményét, örömét
    - vonzó, élményszerű matek a kevésbé matekosoknak
    - újdonságok, gondolkodnivalók a matekosoknak
- összesen 2-szer/3-szor 90-120 perc matek

1. Plüssállatos játék

- 10-12 fős csoportok

1. Plüssállatos játék

- 10-12 fős csoportok
- Hozzávalók minden *n* fős csoportban:
  - *n* különböző plüssállat
  - 3*n* kártya, minden plüssállat neve pontosan három kártyán

1. Plüssállatos játék

- 10-12 fős csoportok
- Hozzávalók minden *n* fős csoportban:
  - *n* különböző plüssállat
  - 3*n* kártya, minden plüssállat neve pontosan három kártyán
- mindenki húz 3 kártyát: a „kedvenc” állatai
  (ha van ismétlődés, akkor 3-nál kevesebb kedvence is lehet)

1. Plüssállatos játék

- 10-12 fős csoportok
- Hozzávalók minden *n* fős csoportban:
  - *n* különböző plüssállat
  - 3*n* kártya, minden plüssállat neve pontosan három kártyán
- mindenki húz 3 kártyát: a „kedvenc” állatai
  (ha van ismétlődés, akkor 3-nál kevesebb kedvence is lehet)
- Cél: mindenki kezében legyen egy a kedvencei közül

1. Plüssállatos játék

Szabályok:

- Tilos a kártyákat egymásnak megmutatni.
- Tilos a kommunikáció minden formája (beszéd, írás, mutogatás).
- A csapatok egymással időre versenyeznek.

1. Plüssállatos játék

Szabályok:

- Tilos a kártyákat egymásnak megmutatni.
- Tilos a kommunikáció minden formája (beszéd, írás, mutogatás).
- A csapatok egymással időre versenyeznek.

Lejátszás:

- Először azonnal, a szabályismertetés után közvetlenül.

1. Plüssállatos játék

Szabályok:

- Tilos a kártyákat egymásnak megmutatni.
- Tilos a kommunikáció minden formája (beszéd, írás, mutogatás).
- A csapatok egymással időre versenyeznek.

Lejátszás:

- Először azonnal, a szabályismertetés után közvetlenül.
- A második kör előtt a csapatok kapnak időt stratégiát egyeztetni.

1. Plüssállatos játék — Célok és tapasztalatok

A stratégiák közös megbeszélése. Tipikus:

- Ha nincs állatom, de van az asztalon nekem tetsző, akkor felkapom.
- Ha nekem van állatom, de van olyan csapattárs, akinek nincs és van az asztalon nekem tetsző, akkor kicserélem.

1. Plüssállatos játék — Célok és tapasztalatok

A stratégiák közös megbeszélése. Tipikus:

- Ha nincs állatom, de van az asztalon nekem tetsző, akkor felkapom.
- Ha nekem van állatom, de van olyan csapattárs, akinek nincs és van az asztalon nekem tetsző, akkor kicserélem.

Feladatkitűzés:

- Adott: n darab izé, n darab bizé, megengedett (izé, bizé) párok
- Cél: Párbaállítani egymással az izéket és bizéket

1. Plüssállatos játék — Célok és tapasztalatok

A stratégiák közös megbeszélése. Tipikus:

- Ha nincs állatom, de van az asztalon nekem tetsző, akkor felkapom.
- Ha nekem van állatom, de van olyan csapattárs, akinek nincs és van az asztalon nekem tetsző, akkor kicserélem.

Feladatkitűzés:

- Adott: n darab izé, n darab bizé, megengedett (izé, bizé) párok
- Cél: Párbaállítani egymással az izéket és bizéket
- Opcionális: pontos terminológia (páros gráf, teljes párosítás)

1. Plüssállatos játék — Célok és tapasztalatok

Milyen gyakorlati alkalmazásai vannak ennek a feladatnak (a plüssboldogságon kívül)?

1. Plüssállatos játék — Célok és tapasztalatok

Milyen gyakorlati alkalmazásai vannak ennek a feladatnak (a plüssboldogságon kívül)?

- fiúk, lányok, szalagavató bál (, társkereső, . . .)

Milyen gyakorlati alkalmazásai vannak ennek a feladatnak (a plüssboldogságon kívül)?

- fiúk, lányok, szalagavató bál (, társkereső, . . .)
- munkák, dolgozók, cél: minden munkát elvégezni

1. Plüssállatos játék — Célok és tapasztalatok

Milyen gyakorlati alkalmazásai vannak ennek a feladatnak (a plüssboldogságon kívül)?

- fiúk, lányok, szalagavató bál (, társkereső, . . .)
- munkák, dolgozók, cél: minden munkát elvégezni

Kevésbé kiforrott, de érdekes ötletek:

- egyetemi/középiskolai jelentkezések és felvétel

1. Plüssállatos játék — Célok és tapasztalatok

Milyen gyakorlati alkalmazásai vannak ennek a feladatnak (a plüssboldogságon kívül)?

- fiúk, lányok, szalagavató bál (, társkereső, . . .)
- munkák, dolgozók, cél: minden munkát elvégezni

Kevésbé kiforrott, de érdekes ötletek:

- egyetemi/középiskolai jelentkezések és felvétel ($\longrightarrow$*stabil párosítás*)

1. Plüssállatos játék — Célok és tapasztalatok

Milyen gyakorlati alkalmazásai vannak ennek a feladatnak (a plüssboldogságon kívül)?

- fiúk, lányok, szalagavató bál (, társkereső, . . .)
- munkák, dolgozók, cél: minden munkát elvégezni

Kevésbé kiforrott, de érdekes ötletek:

- egyetemi/középiskolai jelentkezések és felvétel ($\longrightarrow$*stabil párosítás*)
- órarendtervezés

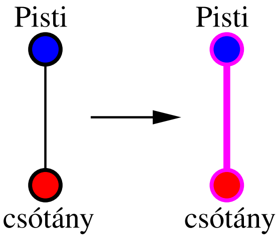
2. Javító út

Hogyan nőtt a párok száma a plüssjátékos stratégiát követve?

2. Javító út

Hogyan nőtt a párok száma a plüssjátékos stratégiát követve?

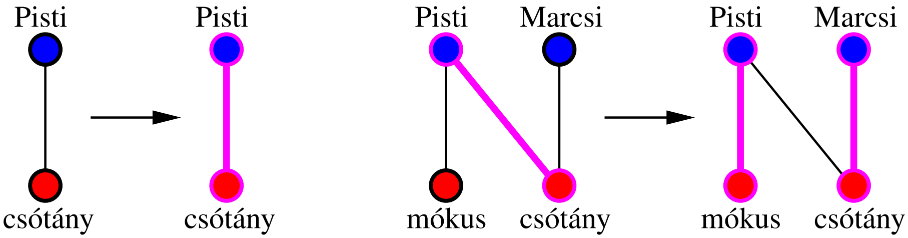
- Ha nincs állatom, de van az asztalon nekem tetsző, akkor felkapom.



- „Pistinek tetszett az asztalon fekvő csótány, ezért felvette."

Hogyan nőtt a párok száma a plüssjátékos stratégiát követve?

- Ha nincs állatom, de van az asztalon nekem tetsző, akkor felkapom.
- Ha nekem van állatom, de van olyan csapattárs, akinek nincs és van az asztalon nekem tetsző, akkor kicserélem.

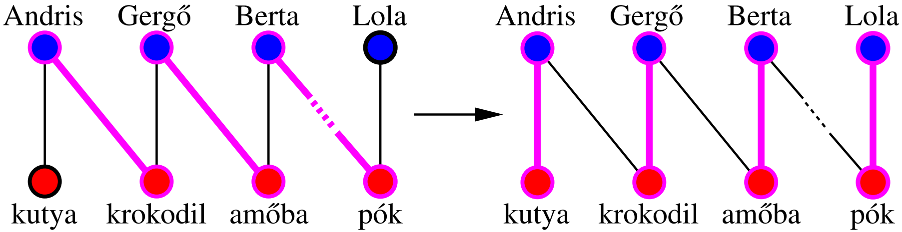


- „Pistinek tetszett az asztalon fekvő csótány, ezért felvette.”
- „Pisti a csótányát mókusra cserélte. Az így felszabadult csótány Marcsinak tetszett, ezért felvette.”

2. Javító út

Hogyan nőtt a párok száma a plüssjátékos stratégiát követve?

- Ha nincs állatom, de van az asztalon nekem tetsző, akkor felkapom.
- Ha nekem van állatom, de van olyan csapattárs, akinek nincs és van az asztalon nekem tetsző, akkor kicserélem.



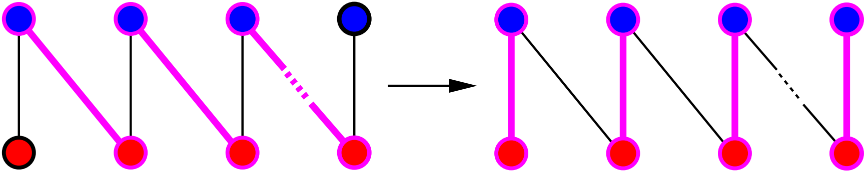
- „Pistinek tetszett az asztalon fekvő csótány, ezért felvette.”
- „Pisti a csótányát mókusra cserélte. Az így felszabadult csótány Marcsinak tetszett, ezért felvette.”
- „Andris a krokodilt kutyára cserélte, majd Gergő az amőbát krokodilra cserélte, stb. Végül Lola felvette a pókot.”

2. Javító út

Milyen szerencsés konstelláció esetén tudtunk több párt csinálni?

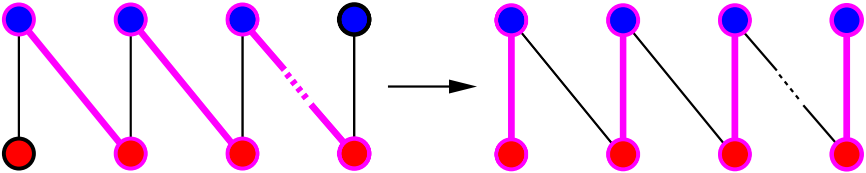
Milyen szerencsés konstelláció esetén tudtunk több párt csinálni?

Javító út:
- párosítatlan izéből indul
- párosítatlan bizébe érkezik
- minden második lépés alkot jelenleg párt



Milyen szerencsés konstelláció esetén tudtunk több párt csinálni?

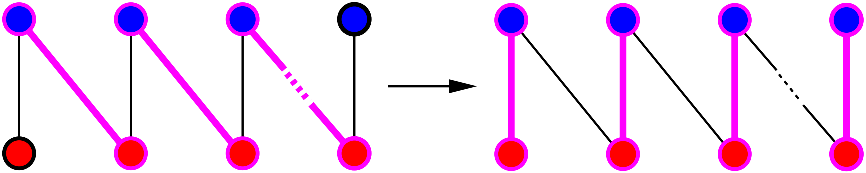
Javító út:
- párosítatlan izéből indul
- párosítatlan bizébe érkezik
- minden második lépés alkot jelenleg párt



Hogyan tudnánk ebből teljes párosítást kereső módszert (algoritmust) építeni?

Milyen szerencsés konstelláció esetén tudtunk több párt csinálni?

Javító út:
- párosítatlan izéből indul
- párosítatlan bizébe érkezik
- minden második lépés alkot jelenleg párt



Hogyan tudnánk ebből teljes párosítást kereső módszert (algoritmust) építeni?

- Induljunk bármilyen párosításból.
- Keressünk javító utat és ha találtunk, ementén csereberélve növeljük a párosítást.
- Ezt ismételjük, amíg már nincs több javító út.

3. Párosítós játék

- Két egyenlő, 10-12 fős csoport („fiúk” és „lányok”)

- Két egyenlő, 10-12 fős csoport („fiúk” és „lányok”)
- Hozzávalók:
  - pókemberes, illetve hello kittys particsákók
  - mindenkinek egy kártya: ki szimpatikus az ellenkező neműek közül (A szimpátiaviszonyok kölcsönösek.)

3. Párosítós játék

- Két egyenlő, 10-12 fős csoport („fiúk” és „lányok”)
- Hozzávalók:
  - pókemberes, illetve hello kittys particsákók
  - mindenkinek egy kártya: ki szimpatikus az ellenkező neműek közül (A szimpátiaviszonyok kölcsönösek.)
- Közös cél: mindenki találjon olyan párt, aki szimpatikus.

3. Párosítós játék

- Két egyenlő, 10-12 fős csoport („fiúk” és „lányok”)
- Hozzávalók:
  - pókemberes, illetve hello kittys particsákók
  - mindenkinek egy kártya: ki szimpatikus az ellenkező neműek közül (A szimpátiaviszonyok kölcsönösek.)
- Közös cél: mindenki találjon olyan párt, aki szimpatikus.
- Hogyan? Használjuk az algoritmust!

- Nem működik, káosz alakul ki, nem lesz teljes párosítás. (Legalábbis remélhetőleg. . .)

3. Párosítós játék — Célok és tapasztalatok

- Nem működik, káosz alakul ki, nem lesz teljes párosítás. (Legalábbis remélhetőleg...)
- Miért?
  - Ha már van egy (elég nagy) párosítás, hogyan keressünk javító utat?
  - Honnan tudjuk, ha már nincs több javító út?

3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben

- Hozzávalók: Szent Pázsit, egy (részleges) párosítás
- A párok mindig kézenfogva állnak, együtt mozognak.

3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben

- Hozzávalók: Szent Pázsit, egy (részleges) párosítás
- A párok mindig kézenfogva állnak, együtt mozognak.
- Szabályok:
  - Kezdetben csak a facér lányok állnak a pázsiton.
  - Ha egy lány a pázsiton áll (akár facér, akár nem), a pázsitra hív minden neki szimpatikus fiút. (Ha egy fiúnak van párja, persze hozza magával.)

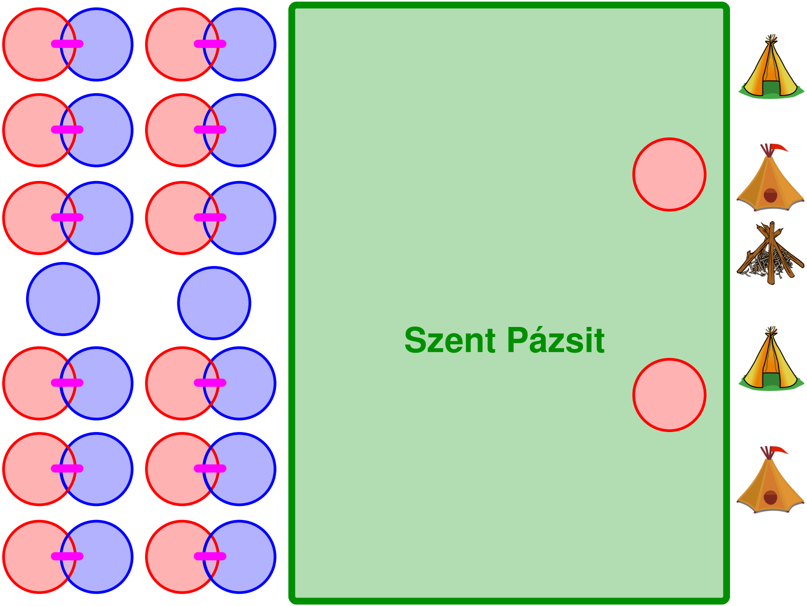
3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben

- Hozzávalók: Szent Pázsit, egy (részleges) párosítás
- A párok mindig kézenfogva állnak, együtt mozognak.
- Szabályok:
  - Kezdetben csak a facér lányok állnak a pázsiton.
  - Ha egy lány a pázsiton áll (akár facér, akár nem), a pázsitra hív minden neki szimpatikus fiút. (Ha egy fiúnak van párja, persze hozza magával.)
  - ???

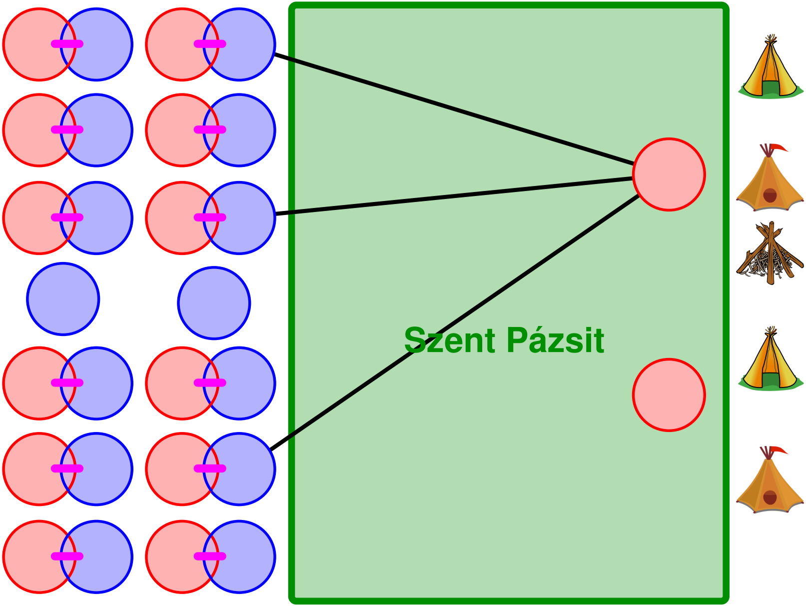
3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben

- Hozzávalók: Szent Pázsit, egy (részleges) párosítás
- A párok mindig kézenfogva állnak, együtt mozognak.
- Szabályok:
  - Kezdetben csak a facér lányok állnak a pázsiton.
  - Ha egy lány a pázsiton áll (akár facér, akár nem), a pázsitra hív minden neki szimpatikus fiút. (Ha egy fiúnak van párja, persze hozza magával.)
  - Ha egy facér fiú meglát egy neki szimpatikus lányt a pázsiton, felkiált: „JAVÍTÓ ÚT!”.

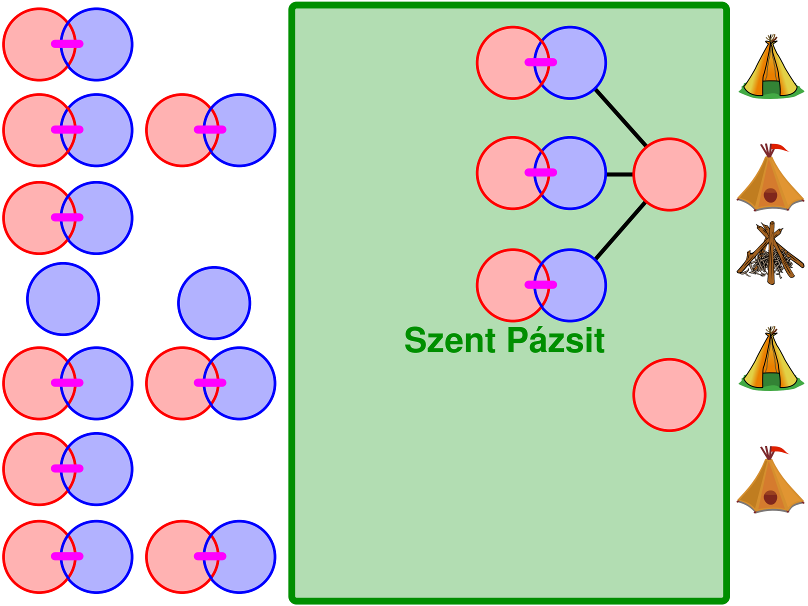
3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben



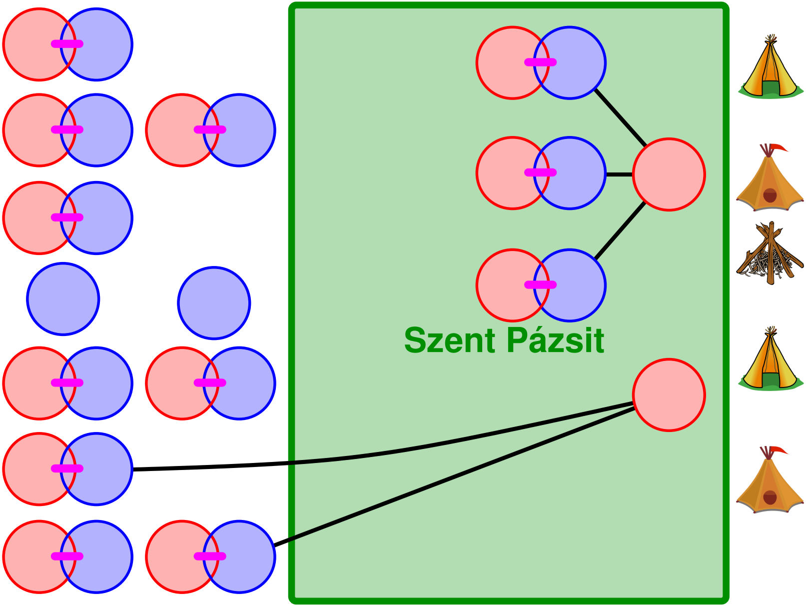
3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben



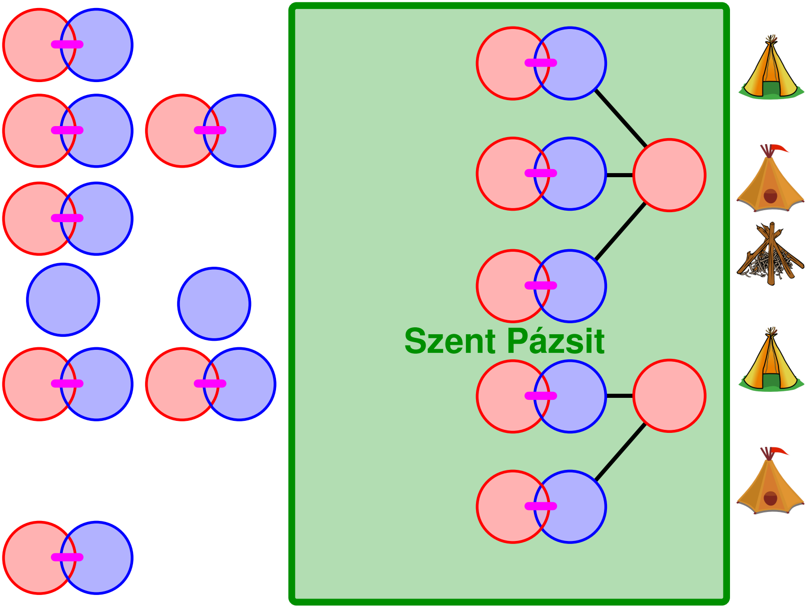
3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben



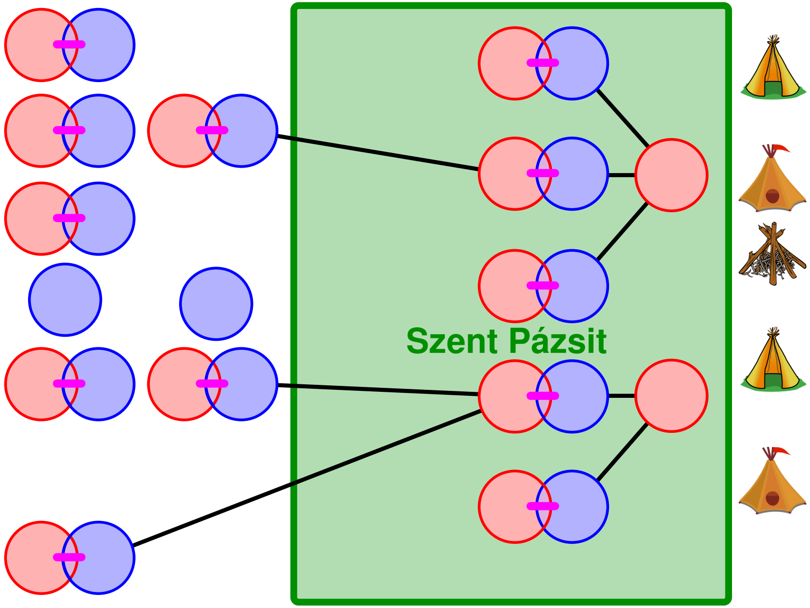
3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben



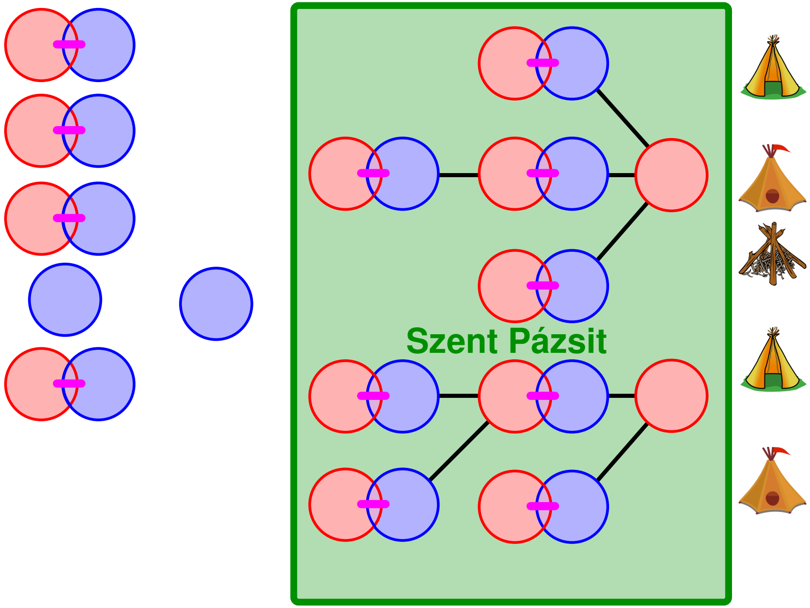
3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben



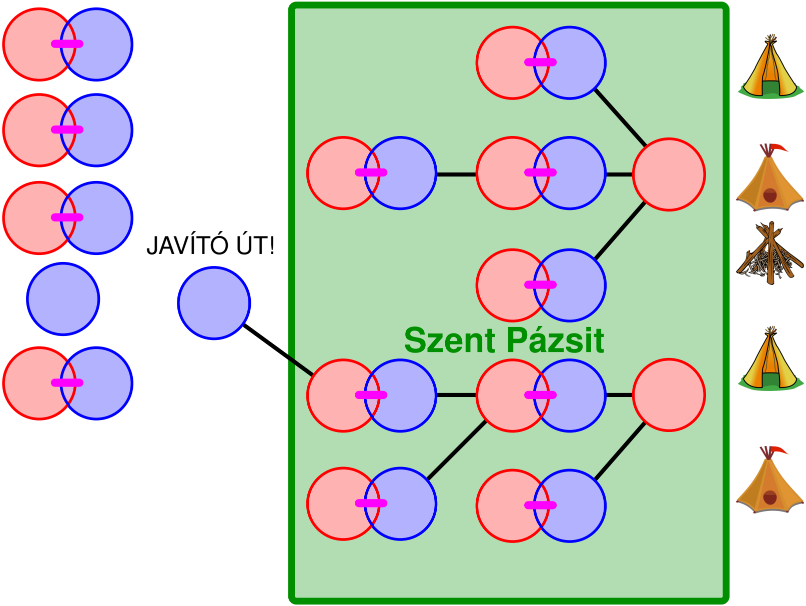
3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben



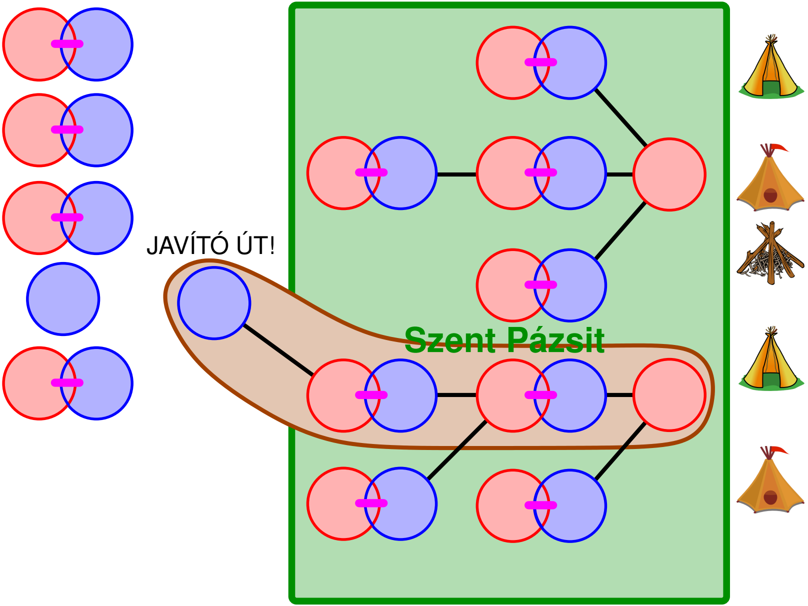
3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben



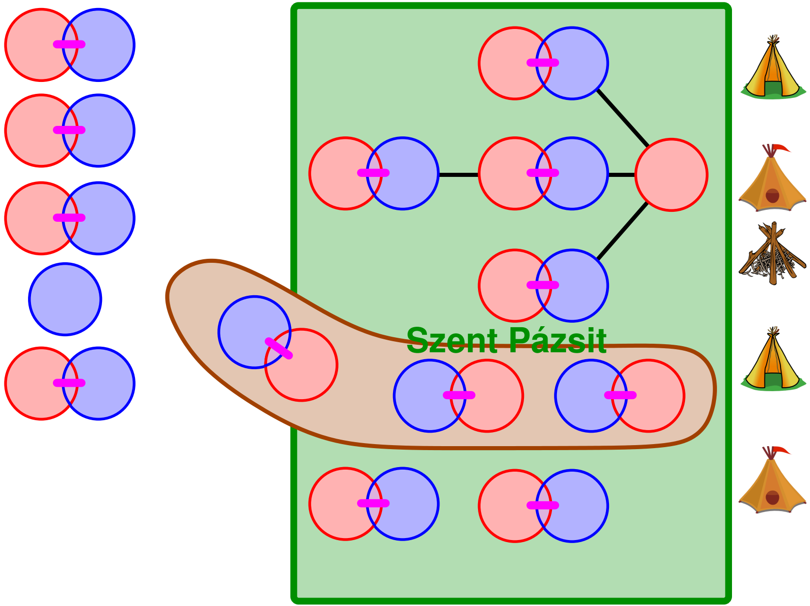
3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben



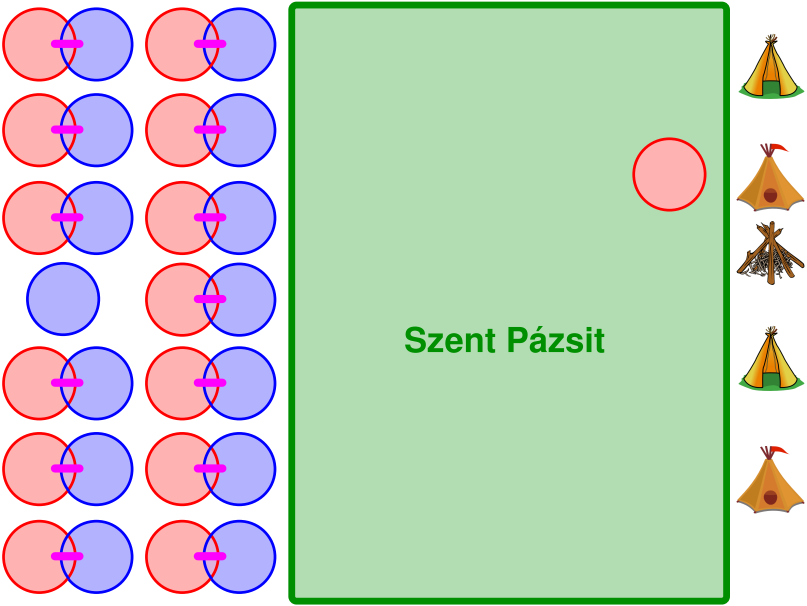
3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben



3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben



3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben



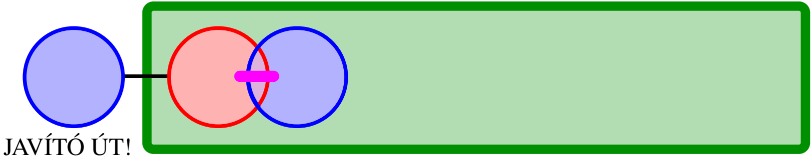
3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben

- Hozzávalók: Szent Pázsit, egy (részleges) párosítás
- A párok mindig kézenfogva állnak, együtt mozognak.
- Szabályok:
  - Kezdetben csak a facér lányok állnak a pázsiton.
  - Ha egy lány a pázsiton áll (akár facér, akár nem), a pázsitra hív minden neki szimpatikus fiút. (Ha egy fiúnak van párja, persze hozza magával.)
  - Ha egy facér fiú meglát egy neki szimpatikus lányt a pázsiton, felkiált: „JAVÍTÓ ÚT!!!”.

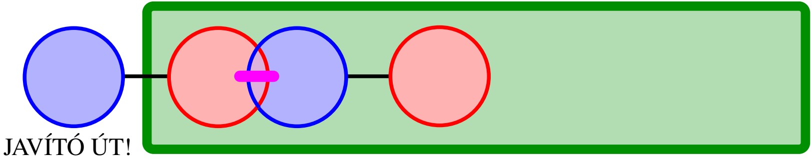
- Hozzávalók: Szent Pázsit, egy (részleges) párosítás
- A párok mindig kézenfogva állnak, együtt mozognak.
- Szabályok:
  - Kezdetben csak a facér lányok állnak a pázsiton.
  - Ha egy lány a pázsiton áll (akár facér, akár nem), a pázsitra hív minden neki szimpatikus fiút. (Ha egy fiúnak van párja, persze hozza magával.)
  - Ha egy facér fiú meglát egy neki szimpatikus lányt a pázsiton, felkiált: „JAVÍTÓ ÚT!!!”.

3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben

- Hozzávalók: Szent Pázsit, egy (részleges) párosítás
- A párok mindig kézenfogva állnak, együtt mozognak.
- Szabályok:
  - Kezdetben csak a facér lányok állnak a pázsiton.
  - Ha egy lány a pázsiton áll (akár facér, akár nem), a pázsitra hív minden neki szimpatikus fiút. (Ha egy fiúnak van párja, persze hozza magával.)
  - Ha egy facér fiú meglát egy neki szimpatikus lányt a pázsiton, felkiált: „JAVÍTÓ ÚT!!!”.

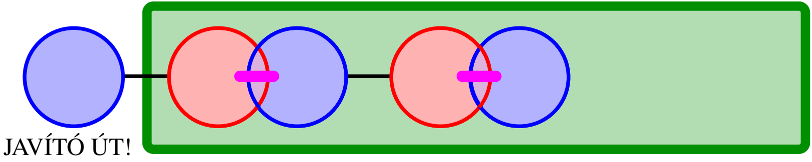


- Hozzávalók: Szent Pázsit, egy (részleges) párosítás
- A párok mindig kézenfogva állnak, együtt mozognak.
- Szabályok:
  - Kezdetben csak a facér lányok állnak a pázsiton.
  - Ha egy lány a pázsiton áll (akár facér, akár nem), a pázsitra hív minden neki szimpatikus fiút. (Ha egy fiúnak van párja, persze hozza magával.)
  - Ha egy facér fiú meglát egy neki szimpatikus lányt a pázsiton, felkiált: „JAVÍTÓ ÚT!!!”.

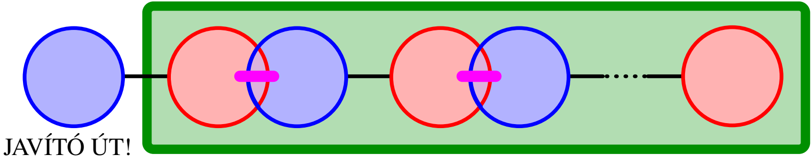


3. Javítóút-kereső rítus a dzsungelben

- Hozzávalók: Szent Pázsit, egy (részleges) párosítás
- A párok mindig kézenfogva állnak, együtt mozognak.
- Szabályok:
  - Kezdetben csak a facér lányok állnak a pázsiton.
  - Ha egy lány a pázsiton áll (akár facér, akár nem), a pázsitra hív minden neki szimpatikus fiút. (Ha egy fiúnak van párja, persze hozza magával.)
  - Ha egy facér fiú meglát egy neki szimpatikus lányt a pázsiton, felkiált: „JAVÍTÓ ÚT!!!”.



- Hozzávalók: Szent Pázsit, egy (részleges) párosítás
- A párok mindig kézenfogva állnak, együtt mozognak.
- Szabályok:
  - Kezdetben csak a facér lányok állnak a pázsiton.
  - Ha egy lány a pázsiton áll (akár facér, akár nem), a pázsitra hív minden neki szimpatikus fiút. (Ha egy fiúnak van párja, persze hozza magával.)
  - Ha egy facér fiú meglát egy neki szimpatikus lányt a pázsiton, felkiált: „JAVÍTÓ ÚT!!!”.



3. Párosítós játék dzsungelrítussal

- Első lejátszás: teljes párosítás lesz

3. Párosítós játék dzsungelrítussal

- Első lejátszás: teljes párosítás lesz
- Második lejátszás: új kártyák, nemek cseréje, megint lesz teljes párosítás

3. Párosítós játék dzsungelrítussal

- Első lejátszás: teljes párosítás lesz
- Második lejátszás: új kártyák, nemek cseréje, megint lesz teljes párosítás
- Harmadik lejátszás: új kártyák, nem lesz teljes párosítás, az eljárás „befagy”

3. Párosítós játék dzsungelrítussal

- Első lejátszás: teljes párosítás lesz
- Második lejátszás: új kártyák, nemek cseréje, megint lesz teljes párosítás
- Harmadik lejátszás: új kártyák, nem lesz teljes párosítás, az eljárás „befagy”

Mi most a releváns kérdés?

3. Párosítós játék dzsungelrítussal

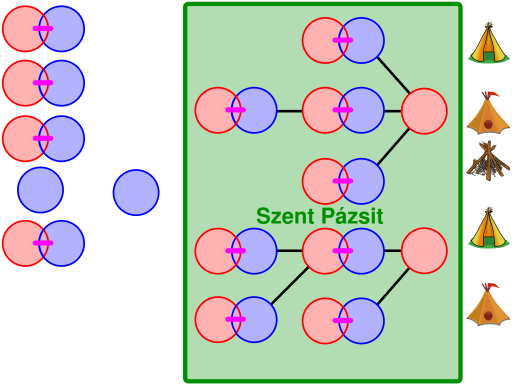
- Első lejátszás: teljes párosítás lesz
- Második lejátszás: új kártyák, nemek cseréje, megint lesz teljes párosítás
- Harmadik lejátszás: új kártyák, nem lesz teljes párosítás, az eljárás „befagy”

Mi most a releváns kérdés?
Tényleg nincs teljes párosítás vagy csak az algoritmus béna?

3. Párosítós játék dzsungelrítussal

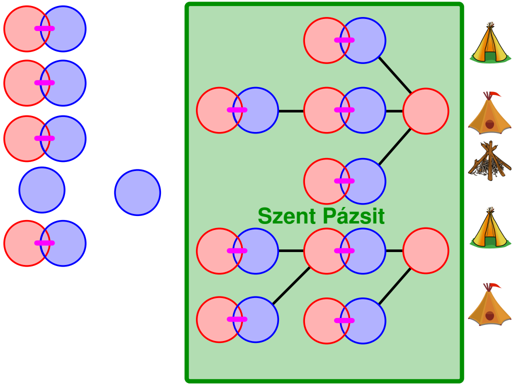
Segítség:

- A kérdésre a válasz a Szent Pázsiton rejlik!



Segítség:

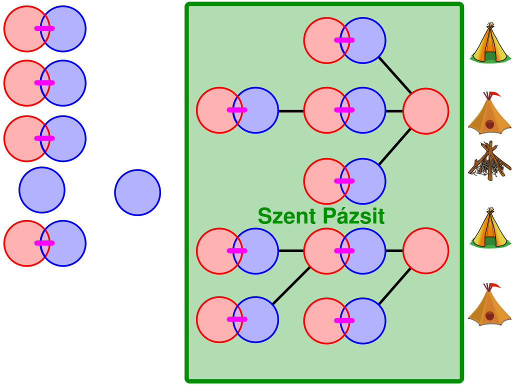
- A kérdésre a válasz a Szent Pázsiton rejlik!
- Mire következtethetünk abból, hogy az eljárás „befagyott”?



3. Párosítós játék dzsungelrítussal

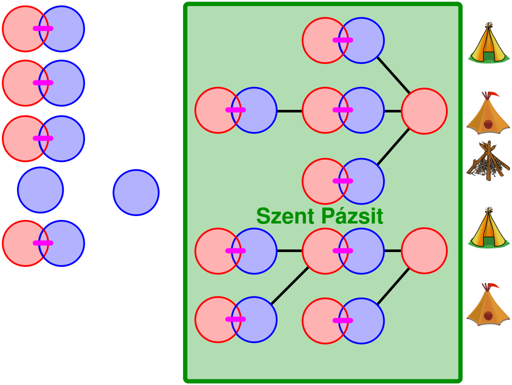
Segítség:

- A kérdésre a válasz a Szent Pázsiton rejlik!
- Mire következtethetünk abból, hogy az eljárás „befagyott”?
- Válasz: A pázsiton álló lányoknak csak pázsiton álló fiúk lehetnek szimpatikusak! Ebből mire következtethetünk?



Segítség:

- A kérdésre a válasz a Szent Pázsiton rejlik!
- Mire következtethetünk abból, hogy az eljárás „befagyott”?
- Válasz: A pázsiton álló lányoknak csak pázsiton álló fiúk lehetnek szimpatikusak! Ebből mire következtethetünk?
- Hogyan viszonyul egymáshoz a pázsiton álló lányok és fiúk száma? Ez hasonló helyzetben mindig így kell legyen?



4. Hall tétele

Azt kérdeztük, hogy n fiú és n lány mikor állítható párba egymással úgy, hogy mindenkinek jusson pár. Mit bizonyítottunk most be? Fogalmazzunk meg egy tételt!

Azt kérdeztük, hogy n fiú és n lány mikor állítható párba egymással úgy, hogy mindenkinek jusson pár. Mit bizonyítottunk most be? Fogalmazzunk meg egy tételt!

Tétel (P. Hall, 1935)

Mindig pontosan az egyik igaz:

- *Létezik teljes párosítás.*
- *Található k darab lány, akiknek együttesen k-nál kevesebb fiú szimpatikus.*

4. Hall tétele

Azt kérdeztük, hogy n fiú és n lány mikor állítható párba egymással úgy, hogy mindenkinek jusson pár. Mit bizonyítottunk most be? Fogalmazzunk meg egy tételt!

Tétel (P. Hall, 1935)

Mindig pontosan az egyik igaz:

- *Létezik teljes párosítás.*
- *Található k darab lány, akiknek együttesen k-nál kevesebb fiú szimpatikus.*

Bizonyítás

A javító utas algoritmus vagy talál teljes párosítást,

4. Hall tétele

Azt kérdeztük, hogy n fiú és n lány mikor állítható párba egymással úgy, hogy mindenkinek jusson pár. Mit bizonyítottunk most be? Fogalmazzunk meg egy tételt!

Tétel (P. Hall, 1935)

Mindig pontosan az egyik igaz:

- *Létezik teljes párosítás.*
- *Található k darab lány, akiknek együttesen k-nál kevesebb fiú szimpatikus.*

Bizonyítás

A javító utas algoritmus vagy talál teljes párosítást, vagy ha nem, akkor a végén a szent pázsiton álló lányoknak csak a pázsiton álló fiúk szimpatikusak, akik viszont náluk kevesebben vannak.

4. Kérdésbörze

Tegyünk fel izgalmas, releváns kérdéseket az eddigi felfedezéseink nyomán!

4. Kérdésbörze

Tegyünk fel izgalmas, releváns kérdéseket az eddigi felfedezéseink nyomán!

- A fiúk és a lányok száma nem egyenlő, minden lánynak keresünk férjet (de fiúk maradhatnak szinglik).

4. Kérdésbörze

Tegyünk fel izgalmas, releváns kérdéseket az eddigi felfedezéseink nyomán!

- A fiúk és a lányok száma nem egyenlő, minden lánynak keresünk férjet (de fiúk maradhatnak szinglik).
  (Válasz: ugyanaz, a Hall-tétel és a bizonyítása érvényes.)

4. Kérdésbörze

Tegyünk fel izgalmas, releváns kérdéseket az eddigi felfedezéseink nyomán!

- A fiúk és a lányok száma nem egyenlő, minden lánynak keresünk férjet (de fiúk maradhatnak szinglik).
  (Válasz: ugyanaz, a Hall-tétel és a bizonyítása érvényes.)
- Lehető legtöbb pár keresése (fiúk és lányok között).

4. Kérdésbörze

Tegyünk fel izgalmas, releváns kérdéseket az eddigi felfedezéseink nyomán!

- A fiúk és a lányok száma nem egyenlő, minden lánynak keresünk férjet (de fiúk maradhatnak szinglik).
  (Válasz: ugyanaz, a Hall-tétel és a bizonyítása érvényes.)
- Lehető legtöbb pár keresése (fiúk és lányok között).
  (Válasz: javító utas algoritmus megtalál egy ilyet.
  Bizonyítás: (nem könnyű) $\longrightarrow$ feladat.)

4. Kérdésbörze

Tegyünk fel izgalmas, releváns kérdéseket az eddigi felfedezéseink nyomán!

- A fiúk és a lányok száma nem egyenlő, minden lánynak keresünk férjet (de fiúk maradhatnak szinglik).
  (Válasz: ugyanaz, a Hall-tétel és a bizonyítása érvényes.)
- Lehető legtöbb pár keresése (fiúk és lányok között).
  (Válasz: javító utas algoritmus megtalál egy ilyet.
  Bizonyítás: (nem könnyű) ⟶ feladat.)
- Minden (fiú,lány) párnak van egy adott értéke és maximális összértékű párosítást keresünk.

4. Kérdésbörze

Tegyünk fel izgalmas, releváns kérdéseket az eddigi felfedezéseink nyomán!

- A fiúk és a lányok száma nem egyenlő, minden lánynak keresünk férjet (de fiúk maradhatnak szinglik).
  (Válasz: ugyanaz, a Hall-tétel és a bizonyítása érvényes.)
- Lehető legtöbb pár keresése (fiúk és lányok között).
  (Válasz: javító utas algoritmus megtalál egy ilyet.
  Bizonyítás: (nem könnyű) $\longrightarrow$ feladat.)
- Minden (fiú,lány) párnak van egy adott értéke és maximális összértékű párosítást keresünk.
  ($\longrightarrow$ Egerváry Jenő algoritmusa, "*Magyar Módszer*")

4. Kérdésbörze

Tegyünk fel izgalmas, releváns kérdéseket az eddigi felfedezéseink nyomán!

- A fiúk és a lányok száma nem egyenlő, minden lánynak keresünk férjet (de fiúk maradhatnak szinglik).
  (Válasz: ugyanaz, a Hall-tétel és a bizonyítása érvényes.)
- Lehető legtöbb pár keresése (fiúk és lányok között).
  (Válasz: javító utas algoritmus megtalál egy ilyet.
  Bizonyítás: (nem könnyű) $\longrightarrow$ feladat.)
- Minden (fiú,lány) párnak van egy adott értéke és maximális összértékű párosítást keresünk.
  ($\longrightarrow$ Egerváry Jenő algoritmusa, "*Magyar Módszer*")
- Teljes (vagy maximális) párosítás meleg közösségben (avagy a csigák világában)

4. Kérdésbörze

Tegyünk fel izgalmas, releváns kérdéseket az eddigi felfedezéseink nyomán!

- A fiúk és a lányok száma nem egyenlő, minden lánynak keresünk férjet (de fiúk maradhatnak szinglik).
  (Válasz: ugyanaz, a Hall-tétel és a bizonyítása érvényes.)
- Lehető legtöbb pár keresése (fiúk és lányok között).
  (Válasz: javító utas algoritmus megtalál egy ilyet.
  Bizonyítás: (nem könnyű) $\longrightarrow$ feladat.)
- Minden (fiú,lány) párnak van egy adott értéke és maximális összértékű párosítást keresünk.
  ($\longrightarrow$ Egerváry Jenő algoritmusa, "*Magyar Módszer*")
- Teljes (vagy maximális) párosítás meleg közösségben (avagy a csigák világában)
  ($\longrightarrow$ Tutte tétele, Edmonds algoritmusa)

4. Kérdésbörze

Tegyünk fel izgalmas, releváns kérdéseket az eddigi felfedezéseink nyomán!

- A fiúk és a lányok száma nem egyenlő, minden lánynak keresünk férjet (de fiúk maradhatnak szinglik).
  (Válasz: ugyanaz, a Hall-tétel és a bizonyítása érvényes.)
- Lehető legtöbb pár keresése (fiúk és lányok között).
  (Válasz: javító utas algoritmus megtalál egy ilyet.
  Bizonyítás: (nem könnyű) $\longrightarrow$ feladat.)
- Minden (fiú,lány) párnak van egy adott értéke és maximális összértékű párosítást keresünk.
  ($\longrightarrow$ Egerváry Jenő algoritmusa, "*Magyar Módszer*")
- Teljes (vagy maximális) párosítás meleg közösségben (avagy a csigák világában)
  ($\longrightarrow$ Tutte tétele, Edmonds algoritmusa)
- „3-dimenziós" párosítás: (fiú, lány, háziállat) tripletek

4. Kérdésbörze

Tegyünk fel izgalmas, releváns kérdéseket az eddigi felfedezéseink nyomán!

- A fiúk és a lányok száma nem egyenlő, minden lánynak keresünk férjet (de fiúk maradhatnak szinglik).
  (Válasz: ugyanaz, a Hall-tétel és a bizonyítása érvényes.)
- Lehető legtöbb pár keresése (fiúk és lányok között).
  (Válasz: javító utas algoritmus megtalál egy ilyet.
  Bizonyítás: (nem könnyű) $\longrightarrow$ feladat.)
- Minden (fiú,lány) párnak van egy adott értéke és maximális összértékű párosítást keresünk.
  ($\longrightarrow$ Egerváry Jenő algoritmusa, "*Magyar Módszer*")
- Teljes (vagy maximális) párosítás meleg közösségben (avagy a csigák világában)
  ($\longrightarrow$ Tutte tétele, Edmonds algoritmusa)
- „3-dimenziós" párosítás: (fiú, lány, háziállat) tripletek NP-nehéz feladat (vagyis nagyon nehéz probléma)

5. Feladatmegoldás

- 3-4 fős csoportok, 3 feladatsor
- Minden csoport egy feladatsoron dolgozik, továbblépés helyes megoldás után.

5. Feladatmegoldás

- 3-4 fős csoportok, 3 feladatsor
- Minden csoport egy feladatsoron dolgozik, továbblépés helyes megoldás után.
- A végén vegyes csoportok alakulnak: minden feladatsorhoz egy képviselő, aki a többiekkel megosztja a felfedezéseiket. (*szakértői mozaik*)

5. Feladatmegoldás

- 3-4 fős csoportok, 3 feladatsor
- Minden csoport egy feladatsoron dolgozik, továbblépés helyes megoldás után.
- A végén vegyes csoportok alakulnak: minden feladatsorhoz egy képviselő, aki a többiekkel megosztja a felfedezéseiket. (*szakértői mozaik*)
- A gyorsak szórakoztatására extra feladatok.


5. Feladatmegoldás

- 3-4 fős csoportok, 3 feladatsor
- Minden csoport egy feladatsoron dolgozik, továbblépés helyes megoldás után.
- A végén vegyes csoportok alakulnak: minden feladatsorhoz egy képviselő, aki a többiekkel megosztja a felfedezéseiket. (*szakértői mozaik*)
- A gyorsak szórakoztatására extra feladatok.
- Közös tanulságok levonása nyilvánosan.

5. Feladatmegoldás

A feladatsorok felépítése:

1. Ismerkedés: egy konkrét példa (ami megoldható).

A feladatsorok felépítése:

1. Ismerkedés: egy konkrét példa (ami megoldható).
2. Részleges példa kiegészítése megoldhatóvá – lehetetlen.

5. Feladatmegoldás

A feladatsorok felépítése:

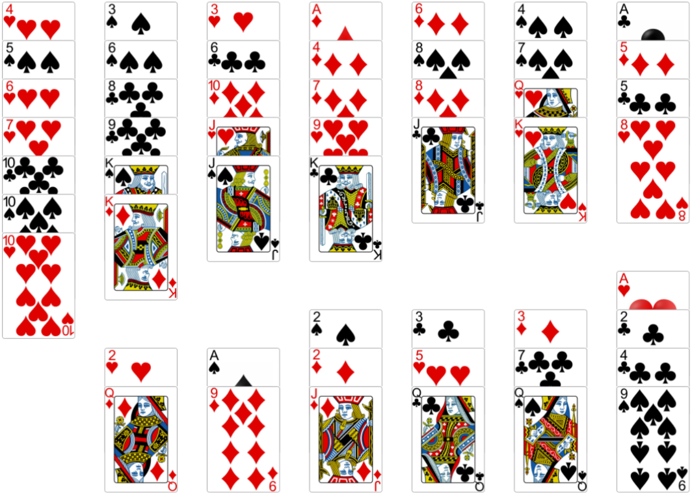
1. Ismerkedés: egy konkrét példa (ami megoldható).
2. Részleges példa kiegészítése megoldhatóvá – lehetetlen.
3. Mikor megoldható egy ilyen feladat? A tapasztalatok alapján fogalmazzunk meg sejtést! Igaz a sejtés? Próbáljuk bebizonyítani!

5. Feladatmegoldás

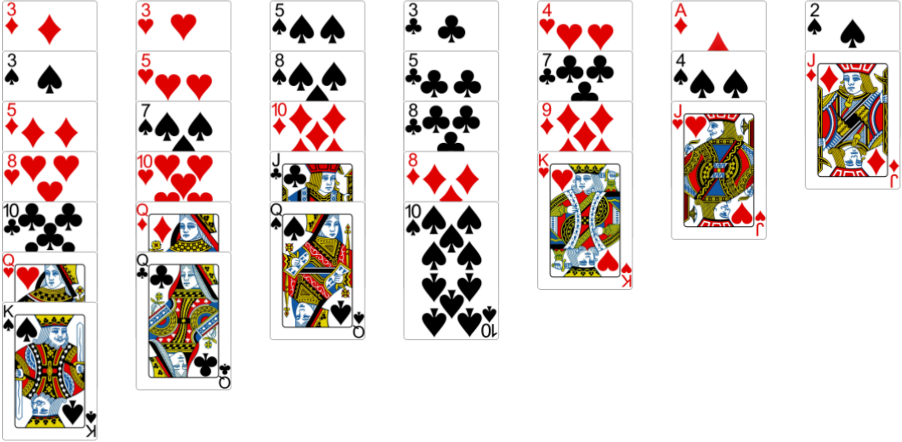
A feladatsorok felépítése:

1. Ismerkedés: egy konkrét példa (ami megoldható).
2. Részleges példa kiegészítése megoldhatóvá – lehetetlen.
3. Mikor megoldható egy ilyen feladat? A tapasztalatok alapján fogalmazzunk meg sejtést! Igaz a sejtés? Próbáljuk bebizonyítani!
4. Van-e olyan érdekes, speciális helyzet, amikor a feladat mindig megoldható? Keressünk ilyet! Bizonyítsuk be, hogy ilyenkor a feladat tényleg mindig megoldható!

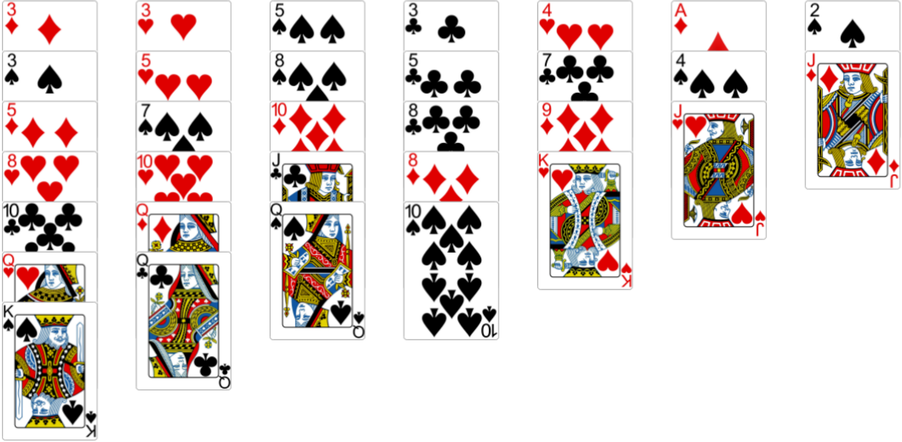
1. Valaki szétosztotta egy 52 lapos francia kártya csomag lapjait 13 kisebb csomagba. Válasszatok ki mindegyik csomagból egy-egy lapot úgy, hogy a választott lapok között minden figurából egy legyen (vagyis egy 2-es, egy 3-as, stb., egy király és egy ász). (A kártyák színe érdektelen.)



2. Az alábbi feladat ugyanolyan, mint az előző – kivéve, hogy a csomagok közül hat „elveszett”. Próbáljátok meg rekonstruálni a hiányzó hat csomagot úgy, hogy a feladat megoldható legyen.



2. Az alábbi feladat ugyanolyan, mint az előző – kivéve, hogy a csomagok közül hat „elveszett”. Próbáljátok meg rekonstruálni a hiányzó hat csomagot úgy, hogy a feladat megoldható legyen.



Megoldás: lehetetlen, mert minden 3-as, 5-ös, 8-as, 10-es és Dáma az első négy csomagban van!

3. Fogalmazzunk meg sejtést! Próbáljuk bebizonyítani!

3. Fogalmazzunk meg sejtést! Próbáljuk bebizonyítani!

Tétel

Mindig pontosan az egyik igaz:

- *A pasziánsz feladat megoldható.*
- *Található k darab figura, amikből az összes lapot k-nál kevesebb csomag tartalmazza.*

3. Fogalmazzunk meg sejtést! Próbáljuk bebizonyítani!

Tétel

Mindig pontosan az egyik igaz:

- *A pasziánsz feladat megoldható.*
- *Található k darab figura, amikből az összes lapot k-nál kevesebb csomag tartalmazza.*

4. Keressünk érdekes, speciális helyzetet, amikor mindig megoldható!

3. Fogalmazzunk meg sejtést! Próbáljuk bebizonyítani!

Tétel

Mindig pontosan az egyik igaz:

- *A pasziánsz feladat megoldható.*
- *Található k darab figura, amikből az összes lapot k-nál kevesebb csomag tartalmazza.*

4. Keressünk érdekes, speciális helyzetet, amikor mindig megoldható!

Tétel

Ha a pakli egyenlő (4 lapos) csomagokra van osztva, akkor a pasziánsz feladat mindig megoldható.

3. Fogalmazzunk meg sejtést! Próbáljuk bebizonyítani!

Tétel

Mindig pontosan az egyik igaz:

- *A pasziánsz feladat megoldható.*
- *Található k darab figura, amikből az összes lapot k-nál kevesebb csomag tartalmazza.*

4. Keressünk érdekes, speciális helyzetet, amikor mindig megoldható!

Tétel

Ha a pakli egyenlő (4 lapos) csomagokra van osztva, akkor a pasziánsz feladat mindig megoldható.

(Mikor találkoztunk más formában ugyenezzel a jelenséggel?

5. Első feladatsor: Pasziánsz

3. Fogalmazzunk meg sejtést! Próbáljuk bebizonyítani!

Tétel

Mindig pontosan az egyik igaz:

- *A pasziánsz feladat megoldható.*
- *Található k darab figura, amikből az összes lapot k-nál kevesebb csomag tartalmazza.*

4. Keressünk érdekes, speciális helyzetet, amikor mindig megoldható!

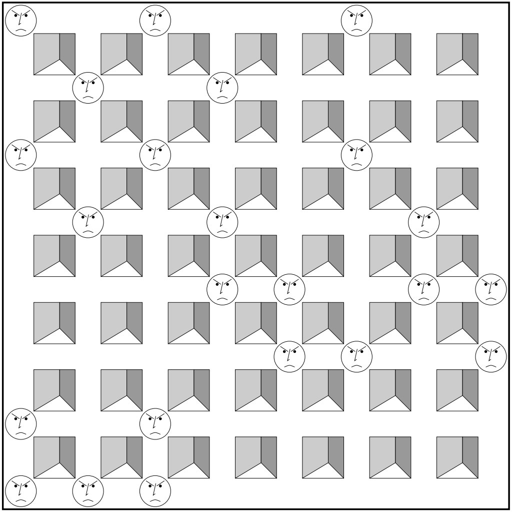
Tétel

Ha a pakli egyenlő (4 lapos) csomagokra van osztva, akkor a pasziánsz feladat mindig megoldható.

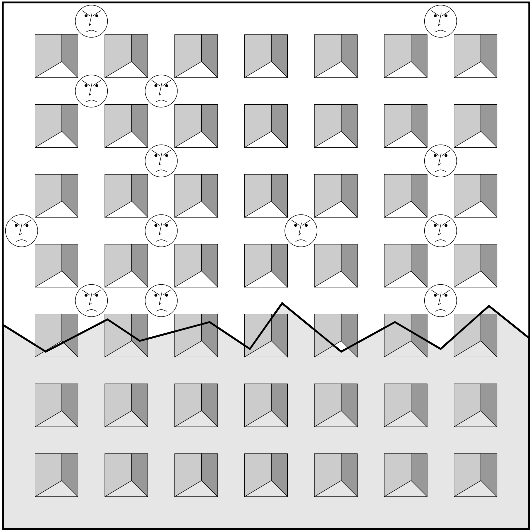
(Mikor találkoztunk más formában ugyenezzel a jelenséggel?
$\longrightarrow$ Plüssállatos játék)

5. Második feladatsor: Közterület-felügyelet

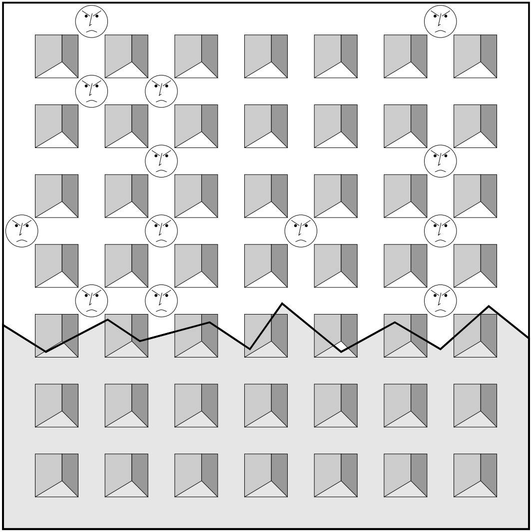
1. Egy kisváros 8 észak-déli és 8 kelet-nyugati utcából áll. A lakók nagyon érzékenyek a közbiztonságra, ezért bizonyos kereszteződésekbe őrbódékat építettek – ezeket jelzik a mogorva pofák. Ha egy őr elfoglal egy őrbódét, akkor megfigyelés alatt tarthatja teljes hosszában azt a két utcát, amelynek kereszteződésében áll. A közbiztonság mellett az anyagiakra is érzékenyek a város lakói, ezért az a céljuk, hogy 8 őr szerződtetésével (és alkalmas őrbódéba költöztetésével) az egész város megfigyelés alatt tartható legyen. Megoldható ez?



2. Ez a feladat ugyanolyan mint az előző, csak épp ennek a kisvárosnak a legdélebbi három utcáján tornádó söpört végig és letarolta az összes őrbódét. Próbáljátok meg rekonstruálni a hiányzó őrbódékat úgy, hogy a feladat (persze 8 őrrel) megoldható legyen.



2. Ez a feladat ugyanolyan mint az előző, csak épp ennek a kisvárosnak a legdélebbi három utcáján tornádó söpört végig és letarolta az összes őrbódét. Próbáljátok meg rekonstruálni a hiányzó őrbódékat úgy, hogy a feladat (persze 8 őrrel) megoldható legyen.



Megoldás: lehetetlen, mert az 1., 2., 3. és 5. kelet-nyugati utcákban csak a 2., 3. vagy 7. észak-déli utcába lehetne őrbódét tenni.

3. Fogalmazzunk meg sejtést! Próbáljuk bebizonyítani!

Tétel

Mindig pontosan az egyik igaz:

- *A közterület-felügyelet feladat megoldható.*
- *Kiválasztható k darab kelet-nyugati utca és k-nál kevesebb észak-déli utca úgy, hogy a kiválasztott kelet-nyugati utcák mindegyikében csak a kiválasztott észak-déli utcákban van őrbódé.*

5. Második feladatsor: Közterület-felügyelet

3. Fogalmazzunk meg sejtést! Próbáljuk bebizonyítani!

Tétel

Mindig pontosan az egyik igaz:

- *A közterület-felügyelet feladat megoldható.*
- *Kiválasztható k darab kelet-nyugati utca és k-nál kevesebb észak-déli utca úgy, hogy a kiválasztott kelet-nyugati utcák mindegyikében csak a kiválasztott észak-déli utcákban van őrbódé.*

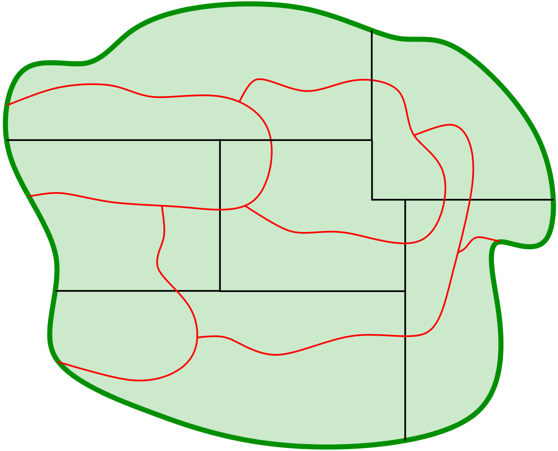
4. Keressünk érdekes, speciális helyzetet, amikor mindig megoldható!

Tétel

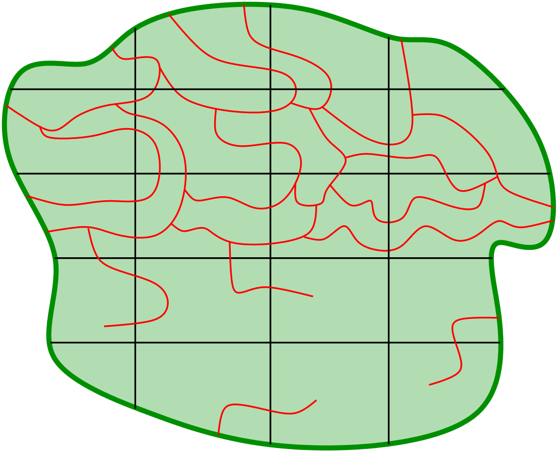
Ha minden (kelet-nyugati és észak-déli) utcában ugyanannyi őr van, akkor a közterület-felügyelet feladat mindig megoldható.

1. Egy szigeten 6 törzs él, földműveléssel és vadászattal foglalkoznak. Belvillongások miatt a Földművelésügyi Minisztérium felosztotta a szigetet 6 parcellára, hogy minden törzs egyet-egyet kapjon: ezek az egyenes vonalak határolta területek. Nem tudván minderről, a Vadászati Minisztérium is felosztotta a szigetet 6 parcellára, ezeket girbe-gurba vonalak határolják.

Most minden törzs kap egy parcellát földművelés, egyet pedig vadászat céljából. Persze a törzsek úgy szeretnék kiosztani a parcellákat, hogy minden törzs kétféle parcellájának legyen közös része, ahol tábort tudnak verni. Lehetséges ez?

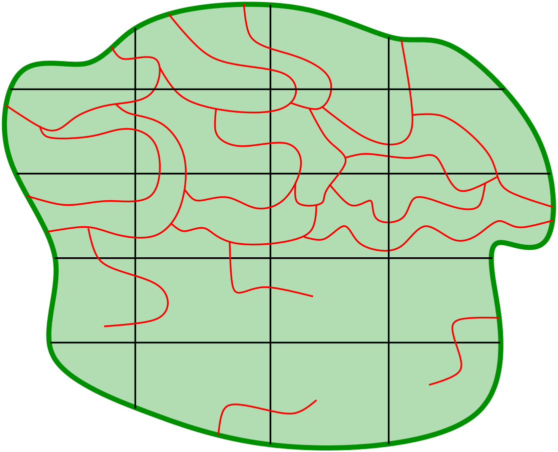


2. Ez a feladat ugyanolyan, mint az előző, két különbséggel: egyrészt most 20 törzs lakja a szigetet, másrészt a Vadászati Minisztériumban leépítések voltak, elbocsátották a térképrajzolót, aki így félbehagyta a munkát. Próbáljátok meg befejezni a munkáját úgy, hogy végül a parcellák szétoszthatóak legyenek úgy, hogy mind a 20 törzs elégedett legyen.



2. Ez a feladat ugyanolyan, mint az előző, két különbséggel: egyrészt most 20 törzs lakja a szigetet, másrészt a Vadászati Minisztériumban leépítések voltak, elbocsátották a térképrajzolót, aki így félbehagyta a munkát. Próbáljátok meg befejezni a munkáját úgy, hogy végül a parcellák szétoszthatóak legyenek úgy, hogy mind a 20 törzs elégedett legyen.

Megoldás: lehetetlen, mert a felső 3×4 földművelési parcella teljesen lefed 13 vadászati parcellát .



3. Fogalmazzunk meg sejtést! Próbáljuk bebizonyítani!

Tétel

Mindig pontosan az egyik igaz:

- *A táborverés a szigeten feladat megoldható.*
- *Található k darab vadászati parcella, amelyeket teljesen lefed k-nál kevesebb földművelési parcella.*

5. Harmadik feladatsor: Táborverés a szigeten

3. Fogalmazzunk meg sejtést! Próbáljuk bebizonyítani!

Tétel

Mindig pontosan az egyik igaz:

- *A táborverés a szigeten feladat megoldható.*
- *Található k darab vadászati parcella, amelyeket teljesen lefed k-nál kevesebb földművelési parcella.*

4. Keressünk érdekes, speciális helyzetet, amikor mindig megoldható!

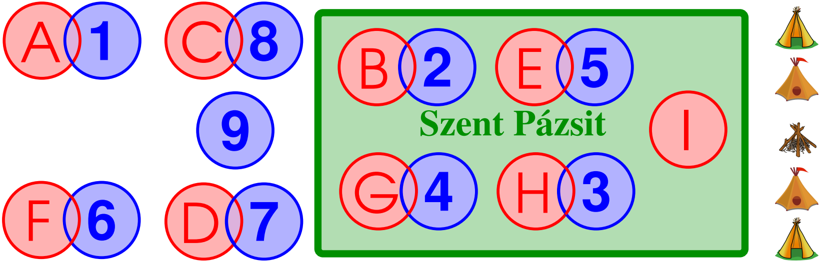
Tétel

Ha minden (vadászati és földművelési) parcella területe azonos, akkor a táborverés a szigeten feladat mindig megoldható.

Záró megjegyzések

Particsákók helyett – a párosítós játék alternatív megvalósítása:

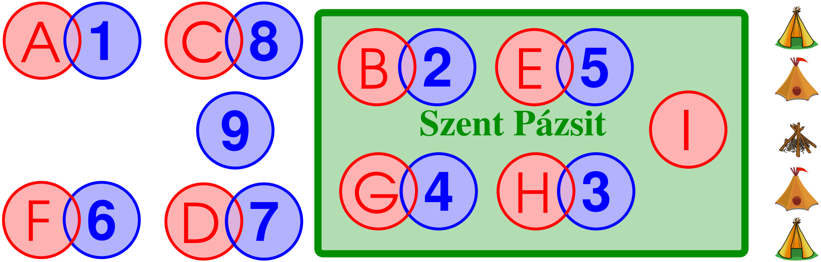
- A fiúk és lányok élő szereplők helyett kék és piros korongok (megszámozva, illetve megbetűzve).



Záró megjegyzések

Particsákók helyett – a párosítós játék alternatív megvalósítása:

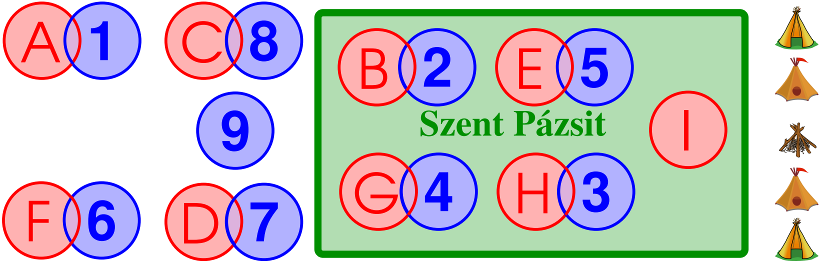
- A fiúk és lányok élő szereplők helyett kék és piros korongok (megszámozva, illetve megbetűzve).
- A szimpátiaviszonyok előre adottak egy táblázatban, a szent pázsit papírra nyomtatva.



Záró megjegyzések

Particsákók helyett – a párosítós játék alternatív megvalósítása:

- A fiúk és lányok élő szereplők helyett kék és piros korongok (megszámozva, illetve megbetűzve).
- A szimpátiaviszonyok előre adottak egy táblázatban, a szent pázsit papírra nyomtatva.
- Az algoritmust párokban játsszák: az egyikük csak a fiúkat, a másikuk csak a lányokat mozgathatja.



Záró megjegyzések

A színfalak mögött: hogyan készül a párosítós játék gráfja?

Záró megjegyzések

A színfalak mögött: hogyan készül a párosítós játék gráfja?

- Ha „random”, akkor a teljes párosítás túl könnyen és gyorsan összeáll, a javítóutak nagy valószínűséggel 1 vagy 3 hosszúak lesznek – nem tanulságos.

Záró megjegyzések

A színfalak mögött: hogyan készül a párosítós játék gráfja?

- Ha „random”, akkor a teljes párosítás túl könnyen és gyorsan összeáll, a javítóutak nagy valószínűséggel 1 vagy 3 hosszúak lesznek – nem tanulságos.
- Másik véglet: csak egyetlen teljes párosítás legyen. Ekkor a gráf „unalmas” (például belátható, hogy kell legyen 1 fokú fiú és lány).

Záró megjegyzések

A színfalak mögött: hogyan készül a párosítós játék gráfja?

- Ha „random”, akkor a teljes párosítás túl könnyen és gyorsan összeáll, a javítóutak nagy valószínűséggel 1 vagy 3 hosszúak lesznek – nem tanulságos.
- Másik véglet: csak egyetlen teljes párosítás legyen. Ekkor a gráf „unalmas” (például belátható, hogy kell legyen 1 fokú fiú és lány).
- Akármilyen ravaszak vagyunk, a teljes párosítás (ha van) kialakulhat gyorsan és/vagy triviálisan. Ezért praktikus előre bekészíteni egy olyan (részleges) párosítást, ahonnan indítva érdekes és tanulságos lesz az algoritmus.

Záró megjegyzések

A színfalak mögött: hogyan készül a párosítós játék gráfja?

- Ha „random”, akkor a teljes párosítás túl könnyen és gyorsan összeáll, a javítóutak nagy valószínűséggel 1 vagy 3 hosszúak lesznek – nem tanulságos.
- Másik véglet: csak egyetlen teljes párosítás legyen. Ekkor a gráf „unalmas” (például belátható, hogy kell legyen 1 fokú fiú és lány).
- Akármilyen ravaszak vagyunk, a teljes párosítás (ha van) kialakulhat gyorsan és/vagy triviálisan. Ezért praktikus előre bekészíteni egy olyan (részleges) párosítást, ahonnan indítva érdekes és tanulságos lesz az algoritmus.
- A tapasztalat szerint magától is jól működik: az élek jelentős része legyen *kritikus*, vagyis legyen benne minden teljes párosításban.

Záró megjegyzések

		Lányok										
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Fiúk	1	♥		♥	♥				♥			♥
	2	♥	♥	♥		♥		♥				
	3		♥	♥	♥		♥					
	4				♥	♥	♥	♥				
	5					♥		♥	♥		♥	
	6						♥		♥	♥		♥
	7							♥	♥	♥	♥	
	8								♥	♥		♥
	9									♥	♥	♥
	10									♥	♥	
	11										♥	♥

Záró megjegyzések

		Lányok										
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Fiúk	1	♥		♥	♥				♥			♥
	2	♥	♥	♥		♥		♥				
	3		♥	♥	♥		♥					
	4				♥	♥	♥	♥				
	5					♥		♥	♥		♥	
	6						♥		♥	♥		♥
	7							♥	♥	♥	♥	
	8								♥	♥		♥
	9									♥	♥	♥
	10									♥	♥	
	11										♥	♥

Kritikus élek: minden teljes párosításban benne vannak.

Záró megjegyzések

		Lányok										
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Fiúk	1	♥		♥	♥				♥			♥
	2	♥	♥	♥		♥		♥				
	3		♥	♥	♥		♥					
	4				♥	♥	♥	♥				
	5					♥		♥	♥		♥	
	6						♥		♥	♥		♥
	7							♥	♥	♥	♥	
	8								♥	♥		♥
	9									♥	♥	♥
	10									♥	♥	
	11										♥	♥

Kritikus élek: minden teljes párosításban benne vannak.
Ha bármelyik kritikus élet kihagynánk, sérülne a Hall-feltétel.

Záró megjegyzések

		Lányok										
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Fiúk	1	♥		♥	♥				♥			♥
	2	♥	♥	♥		♥		♥				
	3		♥	♥	♥		♥					
	4				♥	♥	♥	♥				
	5					♥		♥	♥		♥	
	6						♥		♥	♥		♥
	7							♥	♥	♥	♥	
	8								♥	♥		♥
	9									♥	♥	♥
	10									♥	♥	
	11										♥	♥

Kritikus élek: minden teljes párosításban benne vannak.
Ha bármelyik kritikus élet kihagynánk, sérülne a Hall-feltétel.

Extra feladatok (arra alkalmasaknak és érdemeseknek)

Feladat

Ha nincs több javító út, akkor az aktuális párosítás maximális.

Extra feladatok (arra alkalmasaknak és érdemeseknek)

Feladat

Ha nincs több javító út, akkor az aktuális párosítás maximális.

Megoldás (vázlat)

- Jelölje k a párok számát.

Extra feladatok (arra alkalmasaknak és érdemeseknek)

Feladat

Ha nincs több javító út, akkor az aktuális párosítás maximális.

Megoldás (vázlat)

- Jelölje k a párok számát.
- Álljon a Z halmaz a szent pázsiton álló fiúkból és a pázsiton kívül álló lányokból.

Extra feladatok (arra alkalmasaknak és érdemeseknek)

Feladat

Ha nincs több javító út, akkor az aktuális párosítás maximális.

Megoldás (vázlat)

- Jelölje k a párok számát.
- Álljon a Z halmaz a szent pázsiton álló fiúkból és a pázsiton kívül álló lányokból.
- Z-nek k tagja van: minden párból pontosan egy.

Feladat

Ha nincs több javító út, akkor az aktuális párosítás maximális.

Megoldás (vázlat)

- Jelölje k a párok számát.
- Álljon a Z halmaz a szent pázsiton álló fiúkból és a pázsiton kívül álló lányokból.
- Z-nek k tagja van: minden párból pontosan egy.
- Z tartalmazza a gráf minden élének (minden potenciális párnak) legalább az egyik csúcsát (tagját). Mert: a pázsiton álló lányoknak csak pázsiton álló fiúk lehetnek szimpatikusak. (Z *lefogó ponthalmaz*.)

Extra feladatok (arra alkalmasaknak és érdemeseknek)

Feladat

Ha nincs több javító út, akkor az aktuális párosítás maximális.

Megoldás (vázlat)

- Jelölje k a párok számát.
- Álljon a Z halmaz a szent pázsiton álló fiúkból és a pázsiton kívül álló lányokból.
- Z-nek k tagja van: minden párból pontosan egy.
- Z tartalmazza a gráf minden élének (minden potenciális párnak) legalább az egyik csúcsát (tagját). Mert: a pázsiton álló lányoknak csak pázsiton álló fiúk lehetnek szimpatikusak. (Z *lefogó ponthalmaz*.)
- Mivel minden párosítás páronként legalább egy embert „elfogyaszt” Z-ből, k-nál nagyobb párosítás nem lehet.

Extra feladatok (arra alkalmasaknak és érdemeseknek)

Feladat

Egy 5×5*-ös sakktábla minden mezőjén éldegél egy bogárka. Egy adott pillanatban mind a 25 bogárka felkerekedik és átköltözik egy, a jelenlegi lakhelyével (él mentén) szomszédos, másik mezőre. A bogárkák a népvándorlást úgy szeretnék megszervezni, hogy végül újra igaz legyen, hogy minden mezőn egyetlen bogárka lakik. Megoldható ez?*

Ha sikerült ezt a kérdést megválaszolni, akkor próbáljatok a 25 bogárka problémája által inspiráltatva további kérdéseket feltenni és megválaszolni!

Megoldás (vázlat)

- A sakktáblás feladat ismert rejtvény: a 13 (mondjuk) világos mezőről a 12 sötét mezőre kellene költözni a bogárkáknak, ami lehetetlen.

Megoldás (vázlat)

- A sakktáblás feladat ismert rejtvény: a 13 (mondjuk) világos mezőről a 12 sötét mezőre kellene költözni a bogárkáknak, ami lehetetlen.
- Tegyük fel ugyanezt a kérdést a sakktábla helyett egy tetszőleges G gráfra: minden csúcsban él egy bogárka és egy szomszédos csúcsba akar költözni. Milyen G-kre lehetséges ez?

Megoldás (vázlat)

- A sakktáblás feladat ismert rejtvény: a 13 (mondjuk) világos mezőről a 12 sötét mezőre kellene költözni a bogárkáknak, ami lehetetlen.
- Tegyük fel ugyanezt a kérdést a sakktábla helyett egy tetszőleges G gráfra: minden csúcsban él egy bogárka és egy szomszédos csúcsba akar költözni. Milyen G-kre lehetséges ez?
- A sakktáblás feladat sugallta sejtés: akkor és csak akkor, ha bárhogyan k csúcsot kiválasztva legföljebb k olyan, a kiválasztottaktól különböző csúcs van, amelyeknek minden szomszédja a k kiválasztott között van.

Megoldás (vázlat)

- A sakktáblás feladat ismert rejtvény: a 13 (mondjuk) világos mezőről a 12 sötét mezőre kellene költözni a bogárkáknak, ami lehetetlen.
- Tegyük fel ugyanezt a kérdést a sakktábla helyett egy tetszőleges G gráfra: minden csúcsban él egy bogárka és egy szomszédos csúcsba akar költözni. Milyen G-kre lehetséges ez?
- A sakktáblás feladat sugallta sejtés: akkor és csak akkor, ha bárhogyan k csúcsot kiválasztva legföljebb k olyan, a kiválasztottaktól különböző csúcs van, amelyeknek minden szomszédja a k kiválasztott között van.
- A sejtés igaz. A szükségesség nyilvánvaló, az elégségesség bizonyítása a Hall-tétel alkalmazása (de nem triviális, van vele munka).

Extra feladatok (arra alkalmasaknak és érdemeseknek)

Feladat

Egy iskolában minden osztálynak és minden tanárnak hetente legföljebb k órája van. Mutassuk meg, hogy készíthető órarend hetenként k idősáv használatával.

Feladat

Egy iskolában minden osztálynak és minden tanárnak hetente legföljebb k órája van. Mutassuk meg, hogy készíthető órarend hetenként k idősáv használatával.

(Azaz: páros gráf élkromatikus száma a maximális fokszám.)

Extra feladatok (arra alkalmasaknak és érdemeseknek)

Feladat

Egy iskolában minden osztálynak és minden tanárnak hetente legföljebb k órája van. Mutassuk meg, hogy készíthető órarend hetenként k idősáv használatával.

(Azaz: páros gráf élkromatikus száma a maximális fokszám.)

Megoldás (vázlat)

- Felhasználjuk: reguláris páros gráfban (vagyis ha minden pont foka azonos) van teljes párosítás. Ez a Hall-tétel következménye (és a pasziánsz meg a közterület-felügyelet feladatok kapcsán is előkerült).

Extra feladatok (arra alkalmasaknak és érdemeseknek)

Feladat

Egy iskolában minden osztálynak és minden tanárnak hetente legföljebb k órája van. Mutassuk meg, hogy készíthető órarend hetenként k idősáv használatával.

(Azaz: páros gráf élkromatikus száma a maximális fokszám.)

Megoldás (vázlat)

- Felhasználjuk: reguláris páros gráfban (vagyis ha minden pont foka azonos) van teljes párosítás. Ez a Hall-tétel következménye (és a pasziánsz meg a közterület-felügyelet feladatok kapcsán is előkerült).
- Ha a gráf k-reguláris, akkor ezt egymás után k-szor alkalmazva készen vagyunk.

Feladat

Egy iskolában minden osztálynak és minden tanárnak hetente legföljebb k órája van. Mutassuk meg, hogy készíthető órarend hetenként k idősáv használatával.

(Azaz: páros gráf élkromatikus száma a maximális fokszám.)

Megoldás (vázlat)

- Felhasználjuk: reguláris páros gráfban (vagyis ha minden pont foka azonos) van teljes párosítás. Ez a Hall-tétel következménye (és a pasziánsz meg a közterület-felügyelet feladatok kapcsán is előkerült).
- Ha a gráf k-reguláris, akkor ezt egymás után k-szor alkalmazva készen vagyunk.
- Ha nem, akkor további csúcsok és élek hozzávételével kiegészíthetjük k-regulárissá. (Ehhez megengedünk párhuzamos éleket is, de ez nem okoz problémát.)

Feladat

Legyen az n csúcsú G összefüggő gráfban F és T két feszítőfa. Bizonyítsuk be, hogy F élei megszámozhatók f_1*-től* f_{n-1}*-ig és T élei is megszámozhatók* t_1*-től* t_{n-1}*-ig úgy, hogy minden* $1 \leq i \leq n-1$ *esetén* $(E(F) \setminus \{f_i\}) \cup \{t_i\}$ *szintén egy G-beli feszítőfa élhalmaza legyen.*

Feladat

Legyen az n csúcsú G összefüggő gráfban F és T két feszítőfa. Bizonyítsuk be, hogy F élei megszámozhatók f_1-től f_{n-1}-ig és T élei is megszámozhatók t_1-től t_{n-1}-ig úgy, hogy minden $1 \leq i \leq n-1$ esetén $(E(F) \setminus \{f_i\}) \cup \{t_i\}$ szintén egy G-beli feszítőfa élhalmaza legyen.

Megoldás (vázlat)

Definiáljunk egy páros gráfot, amelynek a két színosztálya $E(F)$ és $E(T)$ és f_i akkor szomszédos t_j-vel, ha $(E(F) \setminus \{f_i\}) \cup \{t_j\}$ egy feszítőfa élhalmaza. Alkalmazzuk ebben a páros gráfban a Hall-tételt teljes párosítás létezésének bizonyítására.

Extra feladatok (arra alkalmasaknak és érdemeseknek)

Feladat

Terjesszük ki alkalmasan a párosítás és a javító út fogalmát tetszőleges (nem páros) gráfokra is, majd válaszoljuk meg a kérdést: igaz-e, hogy ha egy párosításra nézve nincs javító út, akkor a párosítás maximális?

Megoldás (vázlat)

- Javító út: két párosítatlan csúcs közötti, páratlan hosszú út, amelynek minden második éle van az aktuális párosításban.

Megoldás (vázlat)

- Javító út: két párosítatlan csúcs közötti, páratlan hosszú út, amelynek minden második éle van az aktuális párosításban.
- A „nincs javító út $\Leftrightarrow$ a párosítás maximális” állítás igaz.

Megoldás (vázlat)

- Javító út: két párosítatlan csúcs közötti, páratlan hosszú út, amelynek minden második éle van az aktuális párosításban.
- A „nincs javító út $\Leftrightarrow$ a párosítás maximális” állítás igaz.
- A $\Leftarrow$ irány nyilvánvaló, a $\Rightarrow$ irányhoz legyen M_1 olyan párosítás, amire nincs javító út és indirekt tegyük fel, hogy M_2 egy olyan párosítás, ami M_1-nél nagyobb.

Megoldás (vázlat)

- Javító út: két párosítatlan csúcs közötti, páratlan hosszú út, amelynek minden második éle van az aktuális párosításban.
- A „nincs javító út $\Leftrightarrow$ a párosítás maximális” állítás igaz.
- A $\Leftarrow$ irány nyilvánvaló, a $\Rightarrow$ irányhoz legyen M_1 olyan párosítás, amire nincs javító út és indirekt tegyük fel, hogy M_2 egy olyan párosítás, ami M_1-nél nagyobb.
- Legyen a H gráf élhalmaza M_1 és M_2 szimmetrikus differeciája. H-ban minden pont foka maximum 2, ezért diszjunkt utakból és körökből áll.

Megoldás (vázlat)

- Javító út: két párosítatlan csúcs közötti, páratlan hosszú út, amelynek minden második éle van az aktuális párosításban.
- A „nincs javító út $\Leftrightarrow$ a párosítás maximális” állítás igaz.
- A $\Leftarrow$ irány nyilvánvaló, a $\Rightarrow$ irányhoz legyen M_1 olyan párosítás, amire nincs javító út és indirekt tegyük fel, hogy M_2 egy olyan párosítás, ami M_1-nél nagyobb.
- Legyen a H gráf élhalmaza M_1 és M_2 szimmetrikus differeciája. H-ban minden pont foka maximum 2, ezért diszjunkt utakból és körökből áll.
- Mivel $|M_2| > |M_1|$, ezért H egyik komponense javító út.

Megoldás (vázlat)

- Javító út: két párosítatlan csúcs közötti, páratlan hosszú út, amelynek minden második éle van az aktuális párosításban.
- A „nincs javító út $\Leftrightarrow$ a párosítás maximális” állítás igaz.
- A $\Leftarrow$ irány nyilvánvaló, a $\Rightarrow$ irányhoz legyen M_1 olyan párosítás, amire nincs javító út és indirekt tegyük fel, hogy M_2 egy olyan párosítás, ami M_1-nél nagyobb.
- Legyen a H gráf élhalmaza M_1 és M_2 szimmetrikus differeciája. H-ban minden pont foka maximum 2, ezért diszjunkt utakból és körökből áll.
- Mivel $|M_2| > |M_1|$, ezért H egyik komponense javító út.
- Megjegyzés: bár ez az állítás igaz, ebből hatékony algoritmust építeni sokkal nehezebb, mint páros gráfokban (mert javító út keresése, illetve létezésének eldöntése messze nem triviális). ($\longrightarrow$ *Edmonds algoritmusa*)