

Komplex számokkal elegánsabb?

Kiss Géza

RLV, 2018. július 4.

Miről is lesz szó?

- I. Vektorok - geometriai transzformációk,
- II. Körök és húrjaik,
- III. Köri pontnégyes - kettős viszony,
- IV. Trigonometriai alkalmazások,
- V. Néhány tétel bizonyítása,
- VI. Versenyfeladat megoldása komplex számokkal,
- VII. További lehetőségek.

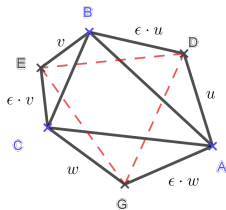
I. Vektorok, geometriai transzformációk

Külső Napóleon-háromszög

Feladat

Egy háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket rajzoltunk. Igazoljuk, hogy a szabályos háromszögek középpontjai ismét szabályos háromszöget határoznak meg.

1. („vektoros”) megoldás:



Be kell látni, hogy

$$(\epsilon \cdot v + w) \cdot \epsilon = -v - \epsilon \cdot u.$$

Ehhez felhasználjuk a következőket:

I. Vektorok, geometriai transzformációk

Külső Napoleon-háromszög első megoldás

Egyrészt a hat komplex szám (vektor) összege nulla:

$$u + \varepsilon u + v + \varepsilon v + w + \varepsilon w = 0,$$

$$(1 + \varepsilon)(u + v + w) = 0,$$

$$u + v + w = 0.$$

Másrészt, mivel ε hatodik egységgyök $\varepsilon^3 = -1$, vagyis

$$\varepsilon^3 + 1 = (\varepsilon + 1)(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1) = 0,$$

Az $\varepsilon + 1$ nem nulla, tehát $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$ illetve $\varepsilon^2 + 1 = \varepsilon$.

A bizonyítandó egyenlőséget egy oldalra rendezve valóban látjuk, hogy

$$(\varepsilon^2 + 1)v + \varepsilon u + \varepsilon w = \varepsilon(u + v + w) = 0.$$

I. Vektorok, geometriai transzformációk

Külső Napoleon-háromszög második megoldás

Most kiszámoljuk először a D , E és G pontokhoz tartozó komplex számokat. A $d - a$ komplex szám pozitív irányú 60° -os elforgatottja éppen $b - d$. Ezt az ε segítségével fel tudjuk írni: $\varepsilon(d - a) = b - d$. Ebből d , e és g kifejezhetők:

$$d = \frac{b + \varepsilon a}{\varepsilon + 1}, \quad e = \frac{c + \varepsilon b}{\varepsilon + 1}, \quad g = \frac{a + \varepsilon c}{\varepsilon + 1}.$$

A DEG háromszög szabályos, ha a D pont G körüli 60° -os elforgatottja éppen az E pont, azaz $\varepsilon(d - g) = e - g$.

$$\varepsilon(d - g) = \frac{\varepsilon b + \varepsilon^2 a - \varepsilon a - \varepsilon^2 c}{\varepsilon + 1} = \frac{\varepsilon b + c - a - \varepsilon c}{\varepsilon + 1} = e - g.$$

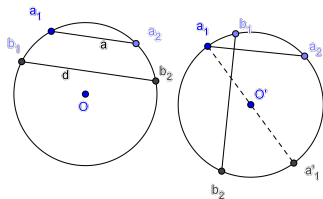
Ezzel a módszerrel sok esetben lehet dolgozni. Pl. Newton-tétel, különféle Ceva-típusú kérdések, oldalakra rajzolt háromszögek, négyzetek, szabályos sokszögek kérdései, Mackósajt-probléma.

II. Körök és húrjaik

Húrok párhuzamossága

Feladat

Az O középpontú kör két húrjának végpontjai legyenek a_1, a_2 illetve b_1, b_2 . Mi a párhuzamosságuk feltétele?



Az (a_1b_1) ív egyenlő az (a_2b_2) ívvel, tehát a_1 -et ugyanaz az O középpontú forgatás viszi b_1 -be, amely b_2 -t a_2 -be. A két komplex szám hányadosa ugyanaz az egységnyi hosszúságú komplex szám kell, hogy legyen.

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1 a_2 = b_1 b_2.$$

II. Körök és húrjaik

Kör húrjaival kapcsolatos segédeszközök

További fontos segédeszközök:

Bizonyítható

Az O középpontú kör két húrjának végpontjai legyenek a_1, a_2 illetve b_1, b_2 . A merőlegességük feltétele: $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

Bizonyítható

Az O középpontú kör két húrjának végpontjai legyenek a_1, a_2 illetve b_1, b_2 . Metszéspontjuk:

$$m = \frac{a_1 a_2 (b_1 + b_2) - b_1 b_2 (a_1 + a_2)}{a_1 a_2 - b_1 b_2}.$$

Ha a húrok merőlegesek, akkor ebből (is):

$$m = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{2}.$$

II. Körök és húrjaik

Háromszögre vonatkozó ismert feladat

Feladat

Igazoljuk, hogy a háromszög talpponti háromszögének oldalai merőlegesek a háromszög köré írt kör csúcsokhoz tartozó sugaraira.

Legyen a háromszög köréírt körének középpontja ismét az O pont, a csúcsok a , b és c . A három helyvektor összege a magasságpontba mutat, tehát

$$m = a + b + c.$$

A magasságpont oldalakra vonatkozó tükörképei a körülírt körön vannak. Két ilyen pontot összekötő szakasz párhuzamos a talpponti háromszög oldalával. Belátjuk, hogy az a és b csúcsokhoz tartozó magasságoknak a körrel vett metszéspontjait összekötő húr merőleges a c és $-c$ pontokat összekötő átmérőre:

$$-\frac{bc}{a} \cdot -\frac{ac}{b} + c(-c) = c^2 - c^2 = 0.$$

II. Körök és húrjaik

Húrnégyszög forgatása

Feladat

Forgassuk el az ABCD húrnégyszöget a középpontja körül. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti négyszög oldalegyenesei az elforgatott négyszög megfelelő oldalait egy paralelogramma csúcaiban metszik.

Legyen a forgatást generáló egység-komplex szám ε . Ekkor pl. a és b elforgatottja $a' = \varepsilon a$, illetve $B' = \varepsilon b$. A két húr metszéspontja:

$$\begin{aligned}x &= \frac{ab(a' + b') - a'b'(a + b)}{ab - a'b'} = \frac{ab\varepsilon(a + b) - ab\varepsilon^2(a + b)}{ab(1 - \varepsilon^2)} = \\ &= \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}(a + b) = t(a + b).\end{aligned}$$

Rendre kapjuk, hogy $x = t(a + b)$, $y = t(b + c)$, $z = t(c + d)$ és $u = t(d + a)$. Ebből $x - y = u - z$, a négyszög paralelogramma.

II. Körök és húrjaik

További lehetőségek, feladatok

- Síkbeli egyeneshalmaz talpponti alakzata és metszéspontalakzata,
- Simson-egyenes,
- Adott körbe írt két egybevágó, azonos körüljárású háromszög megfelelő oldalainak metszéspontjai az eredetihez hasonló háromszöget határoznak meg,
- Ennek a háromszögnek a magasságpontja a kör középpontja,
- Brocard-féle pontok.

III. Köri pontnégyes - kettős viszony

Algebrai feltétel arra, hogy négy pont egy körön van

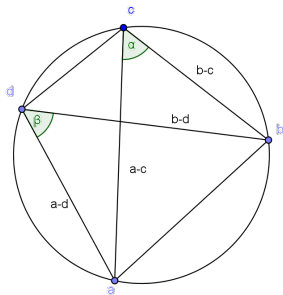
$(acb)\angle = (adb)\angle$, ezért $b - c$ vektort ugyanolyan szögű forgatás viszi $(a - c)$ -vel párhuzamos helyzetbe, mint $(b - d)$ -t az $(a - d)$ -vel párhuzamos helyzetbe. Azaz van olyan ε egységvektor, hogy

$$(b - c)\varepsilon = \lambda(a - c) \text{ és } (b - d)\varepsilon = \mu(a - d),$$

ahol λ és μ valós számok. Tehát

$$\frac{a - c}{a - d} : \frac{b - c}{b - d} = \frac{\mu}{\lambda},$$

valós szám.



III. Köri pontnégyes - kettős viszony

A kettős viszony

Definíció

Az $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}$ komplex számot, az a, b, c, d komplex számok *kettős viszonyának* nevezzük. Jel: $(abcd)$.

Ha $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = \rho$ valós, akkor $\frac{a-c}{b-c} = \rho \frac{a-d}{b-d}$. Az $a - c$ és $b - c$ vektorok szöge vagy egyenlő az $a - d$ és $b - d$ vektorok szögével, vagy azt 180° -ra egészíti ki.

Tétel

Ha négy pont egy körön van, akkor kettős viszonyuk valós; ha a kettős viszonyuk valós, akkor a négy pont vagy egy körön van, vagy egy egyenesen.

III. Köri pontnégyes - kettős viszony

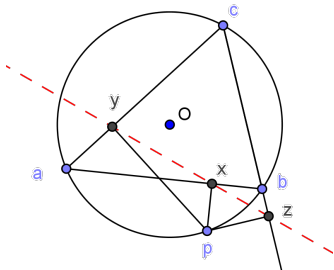
Simson-egyenes

Tétel

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írt kör tetszőleges pontjából az oldalegyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjai egy egyenesen vannak.

Bizonyítás: Legyenek az O középpontú körön a háromszög csúcsai a, b, c , továbbá a köri pont, ahonnan a merőlegeseket állítjuk p . A p -ből (ab) egyenesére állított merőleges a kört másodszor $-\frac{ab}{p}$ pontban metszi. A két merőleges húr metszéspontja

$$x = \frac{a + b + p - \frac{ab}{p}}{2} = \frac{(a + b + p)p - ab}{2p}.$$



III. Köri pontnégyes - kettős viszony

Simson-egyenes - a bizonyítás folytatása

A másik két talppont:

$$y = \frac{(b+c+p)p - bc}{2p} \text{ ész} = \frac{(c+a+p)p - ca}{2p}.$$

Az x, y, z egy egyenesen vannak, ha $\frac{x-z}{y-z}$ valós szám.

$$\begin{aligned} \frac{x-z}{y-z} &= \frac{p(b-c) - ab + ca}{p(b-a) - bc + ca} = \frac{p(b-c) - a(b-c)}{p(b-a) - c(b-a)} = \\ &= \frac{(p-a)(p-c)}{(p-c)(b-a)} = (pbac). \end{aligned}$$

A $(pbac)$ köri pontnégyes kettős viszonya - valós - tehát az x, y, z pontok egy egyenesen vannak.

IV. Trigonometriai alkalmazások

Trigonometriai számítás komplex számokkal

Feladat

Számítsuk ki

$$\cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7}$$

pontos értékét.

Legyen most ε az első hetedik egységgyök: $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{7} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{7}$, továbbá $\varepsilon^7 = 1$. Mivel az ε egységnyi hosszúságú, ezért

$$\bar{\varepsilon} = \cos \frac{2\pi}{7} - i \cdot \sin \frac{2\pi}{7} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ebből már adódik is a sokszor használható formula:

$$\varepsilon + \bar{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} = 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{7}.$$

Ezt felhasználva a kiszámítandó kifejezés átírható:

IV. Trigonometriai alkalmazások

Trigonometriai számítás folytatása

$$\frac{\varepsilon^2 + 1}{2\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon^4 + 1}{2\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^4 + 1}{2\varepsilon^2} \cdot \frac{\varepsilon^6 + 1}{2\varepsilon^3} + \frac{\varepsilon^6 + 1}{2\varepsilon^3} \cdot \frac{\varepsilon^2 + 1}{2\varepsilon}.$$

Közös nevezőre hozás után vegyük figyelembe, hogy $\varepsilon^7 = 1$, így

$$\frac{\varepsilon^8 + \varepsilon^6 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^6 + \varepsilon^4 + 1 + \varepsilon^9 + \varepsilon^7 + \varepsilon^3 + \varepsilon}{4\varepsilon^5} =$$

$$\frac{\varepsilon^6 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1}{2\varepsilon^5} = \frac{\varepsilon^6 + \varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 - \varepsilon^5}{2\varepsilon^5} = -\frac{1}{2},$$

mivel $\varepsilon^7 - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^6 + \varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0$ és $\varepsilon \neq 1$.

IV. Trigonometriai alkalmazások

Szabályos sokszögre vonatkozó feladat

Feladat

Legyenek P_0, P_1, \dots, P_{n-1} egy egységkörbe írt szabályos n -szög csúcsai. Igazoljuk, hogy

$$P_0P_1 \cdot P_0P_2 \cdot P_0P_3 \cdot \dots \cdot P_0P_{n-1} = n.$$

Feltehetjük, hogy a sokszög éppen az n -edik egységgyökök szerint helyezkedik el és $P_0 = 1$. Tekintsük az $f(z) = z^n - 1$ polinomot, amelynek gyökei pontosan az n -edik egységgyökök. A gyöktényezős alakban ε az első egységgyök, $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$:

$$f(z) = z^n - 1 = (z - 1)(z - \varepsilon)(z - \varepsilon^2) \dots (z - \varepsilon^{n-1}).$$

Osszuk el mindkét oldalt $(z - 1)$ -gyel:

IV. Trigonometriai alkalmazások

Szabályos sokszögre vonatkozó feladat folytatása

$$\begin{aligned}g(z) &= \frac{f(z)}{z-1} = \frac{z^n - 1}{z-1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1 = \\ &= (z - \varepsilon)(z - \varepsilon^2) \dots (z - \varepsilon^{n-1}).\end{aligned}$$

Számoljuk ki kétféleképpen a $g(1)$ -et:

$$g(1) = (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) \dots (1 - \varepsilon^{n-1}),$$

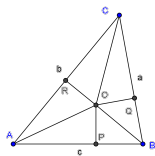
másrészt a $g(z)$ polinom n tagból áll:

$$g(1) = 1^{n-1} + 1^{n-2} + \dots + 1 = n.$$

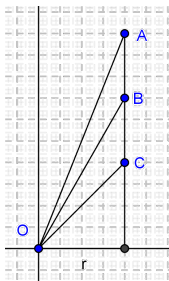
Mindkét oldal abszolútértékét véve a jobb oldali tényezők éppen a P_0P_j távolságok.

V. Néhány tétel bizonyítása

Heron-képlet



Helyezzük
el most az OPA , OQB és ORC
háromszögeket úgy, hogy az
 O pont mindegyik háromszögre
legyen a középpontban
és a háromszögek
 r hosszúságú befogója
a valós tengelyre essen.
Így az A, B, C csúcsoknak
megfelelő komplex számok:



V. Néhány tétel bizonyítása

Heron-képlet

$$A = r + (s - a)i, B = r + (s - b)i, C = r + (s - c)i.$$

A három komplex szám argumentumának összege

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\beta}{2} + 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 270^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 180^\circ.$$

Szorzásakor az argumentumok összeadódnak, ennek megfelelően a három szám szorzatának képzetes része nulla kell, hogy legyen.

$$\begin{aligned} A \cdot B \cdot C &= [r + (s - a)i][r + (s - b)i][r + (s - c)i] = \\ &= [r^3 - r(s - a)(s - b) - r(s - b)(s - c) - r(s - c)(s - a)] + \\ &+ i[r^2(s - a) + r^2(s - b) + r^2(s - c) - (s - a)(s - b)(s - c)]. \end{aligned}$$

A képzetes rész nulla:

$$r^2(s - a + s - b + s - c) - (s - a)(s - b)(s - c) = 0.$$

Átrendezve és s -sel szorozva

$$r^2 s^2 = s(s - a)(s - b)(s - c) \Rightarrow t = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

V. Néhány tétel bizonyítása

Ptolemaios-tétel

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges négyszög átlóvektorainak szorzata a szemköztes oldalvektorok szorzatának összegével egyenlő, azaz

$$(a - c)(b - d) = (a - d)(b - c) + (d - c)(b - a).$$

A műveletek elvégzése után a két oldal pontosan megegyezik. Ez egy algebrai azonosság.

Tétel (Ptolemaios-tétel)

Igazoljuk, hogy húrnégyszögben az átlók hosszának szorzata a szemköztes oldalhosszok szorzatainak összegével egyenlő.

V. Néhány tétel bizonyítása

Ptolemaios-tétel

Tétel (Ptolemaios-tétel)

Igazoljuk, hogy húrnégyszögben az átlók hosszának szorzata a szemköztes oldalhosszak szorzatainak összegével egyenlő.

Bizonyítás: Legyen

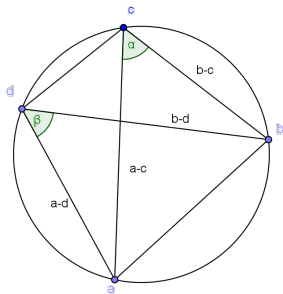
$$z_1 = (a - c)(b - d), z_2 = (a - d)(b - c)$$

és $z_3 = (d - c)(b - a)$. Osszuk

végig az előző feladat azonosságát a z_2 -vel.

$$\frac{z_1}{z_2} = 1 + \frac{z_3}{z_2}.$$

A törtek köri pontnégyesek kettős viszonyai tehát valóságosak, sőt a rajz szerint pozitív számok. A három vektor egyező irányú, így az összeg abszolút értéke egyenlő az összeadandók abszolút értékének összegével.



V. Néhány tétel bizonyítása

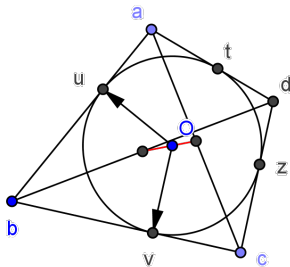
Newton érintőnégszögekre vonatkozó tétele

Tétel

Az érintőnégszög beírt körének középpontja rajta van az átlók felezőpontjait összekötő egyenesen.

Bizonyítás: Válasszuk

origónak a kör középpontját. Legyenek az oldalakon az érintési pontok rendre u, v, w és t . Fejezzük ki a csúcsokat az érintési pontok segítségével. 90° -os pozitív forgatással az u párhuzamos lesz $b - u$ -val, a v pedig $v - b$ -vel. Tudjuk, hogy $|b - u| = |v - b|$, így az egyenletrendszerből:



V. Néhány tétel bizonyítása

Newton érintőnégszögekre vonatkozó tétele - folytatás

$$\lambda ui = b - u \text{ és } \lambda vi = v - b,$$

$$\frac{u}{v} = \frac{b - u}{v - b} \Rightarrow b = \frac{2uv}{u + v}.$$

A többi csúcs ugyanígy: $c = \frac{2vw}{v + w}$, $d = \frac{2wt}{w + t}$, $a = \frac{2tu}{t + u}$.

Be kell látni, hogy az átlók felezőpontjai, $f_1 = \frac{a+c}{2}$, $f_2 = \frac{b+d}{2}$ és az origó egy egyenesen vannak. Az f_1 valós számszorosa f_2 -nek, arányuk valós.

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{2tu}{t+u} + \frac{2vw}{v+w}}{\frac{2uv}{u+v} + \frac{2wt}{w+t}} = \frac{(u+v)(w+t)}{(t+u)(v+w)} = \frac{(u+v)}{(u+t)} : \frac{(w+v)}{(w+t)} = (u w v t).$$

Ez a négy pont egy körön van, a kettős viszonyuk valós.

V. Néhány tétel bizonyítása

Newton érintőnégyszögekre vonatkozó tétele - megjegyzések

Megjegyzés

Kicsit ügyesebb indulással el lehet kerülni a bizonyításban a kettős viszony használatát. Feltehetjük, hogy a kör egységnyi sugarú. Ekkor tetszőleges z köri pontra $\bar{z} = \frac{1}{z}$. A bizonyítás befejező sora:

$$\frac{\bar{f}_1}{f_2} = \frac{(\bar{u} + \bar{v})(\bar{w} + \bar{t})}{(\bar{t} + \bar{u})(\bar{v} + \bar{w})} = \frac{(u + v)(w + t)}{(t + u)(v + w)} = \frac{f_1}{f_2}.$$

Tehát az arány valós.

Megjegyzés

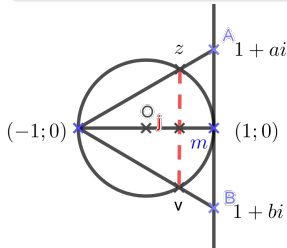
A négyszög csúcsa a két érintési pont harmonikus közepe. A számtani közepük a szakasz felezőpontja. Mértani közepük kettő van, a két körívet felező pont. Tehát körívek esetén mind a négy közép rajta van a két pontot összekötő szakasz felezőmerőlegesén.

VI. Versenyfeladatok megoldása komplex számokkal

Kürschak József Tanulóverseny 2003/1.

Feladat

Az EF átmérőjű k kört az e egyenes az E pontban érinti.
Tekintsük az e egyenes összes olyan A, B pontpárját, melyre az AB szakasz az E pontot tartalmazza és $AE \cdot EB$ egy rögzített állandó.
Egy ilyen pontpár esetén legyen A' , illetve B' a k kör metszéspontja az AF , illetve BF szakasszal. Igazoljuk, hogy az $A'B'$ szakaszok egy ponton mennek keresztül.



VI. Versenyfeladatok megoldása komplex számokkal

Kürschak József Tanulóverseny 2003/1.

Legyen a kör egységnyi sugarú, középpontja O pont. Számoljuk ki a z komplex számot. Egyrészt $(-1, 0)$, z és $1 + ai$ egy egyenesen vannak,

$$z - (-1) = \lambda(1 + ai - (-1)),$$

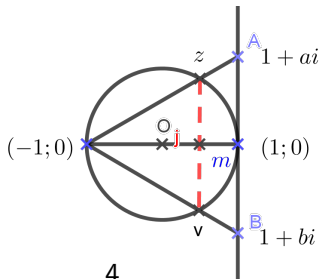
$$z = \lambda(2 + ai) - 1.$$

Másrészt tudjuk, hogy $z \cdot \bar{z} = 1$.

$$[\lambda(2 + ai) - 1][\lambda(2 - ai) - 1] = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{4 + a^2}.$$

Ebből már z számolható:

$$z = \frac{4(2 + ai)}{4 + a^2} - 1 = \frac{4(2 + ai)}{(2 + ai)(2 - ai)} - 1 = \frac{4}{2 - ai} - 1 = \frac{2 + ai}{2 - ai}.$$



VI. Versenyfeladatok megoldása komplex számokkal

Kürschak József Tanulóverseny 2003/1. -folytatás

A másik metszéspontra: $v = \frac{2+bi}{2-bi}$. A $z, 1, v, -1$ négy köri pont. A (zv) és $(-1, 1)$ húrok metszéspontja

$$m = \frac{zv(-1+1) - (-1)1(z+v)}{zv - (-1)1} = \frac{z+v}{zv+1}.$$

Behelyettesítés után

$$m = \frac{\frac{2+ai}{2-ai} + \frac{2+bi}{2-bi}}{\frac{2+ai}{2-ai} \frac{2+bi}{2-bi} + 1} = \frac{8+2ab}{8-2ab} = \frac{4+ab}{4-ab}.$$

A feladat szövege szerint ab rögzített, így ez a pont nem függ az A és B pontok választásától. Az a és b különböző előjelű valósak, így a nevező nem lesz nulla.

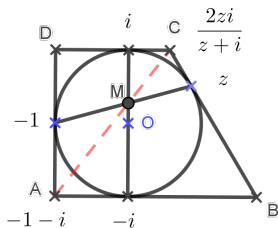
VI. Versenyfeladatok megoldása komplex számokkal

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2017/18. Haladók III. kategória 2. feladat

Feladat

Az $ABCD$ derékszögű érintőtrapéz alapjai AB és CD ($AB > CD$), az alapokra merőleges szár AD . A trapézba írt kör az AB alapot P -ben, a CD alapot R -ben érinti. A szárakon lévő érintési pontokat összekötő szakasz a PR szakaszt M -ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy A , M és C egy egyenesbe esik.

Legyen a trapézba írt kör középpontja O , sugara 1, alapjai párhuzamosak a valós tengellyel, AD szára párhuzamos a képzetes tengellyel. A kör érintési pontjai rendre $z, i, -1, -i$, az ábra szerint. A csúcsok: $a = -1 - i, c = \frac{2zi}{z+i}$.



VI. Versenyfeladatok megoldása komplex számokkal

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2017/18. Haladók III. kategória 2. feladat

M pont a kör húrjainak metszéspontja:

$$m = \frac{-z(i-i) - (-i)i(z-1)}{-z-1} = \frac{-(z-1)}{-z-1} = \frac{z-1}{z+1}.$$

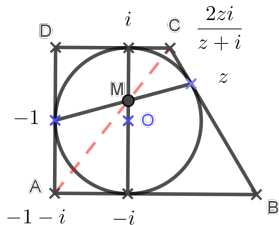
Számoljuk ki az CMR szög tangensét:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2zi}{z+i} - i}{\frac{i - \frac{z-1}{z+1}}{i}} &= \frac{\frac{-2z}{z+i} + 1}{i - \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{i-z}{z+i}}{\frac{iz - z + i + 1}{z+1}} = \\ &= \frac{(i-z)(z+1)}{(z+i)(i-z)(1-i)} = \frac{z+1}{(z+i)(1-i)}. \end{aligned}$$

Végül a PMA szög tangense:

$$\frac{1}{\frac{\frac{z-1}{z+1} + i}{i}} = \frac{i}{\frac{z-1}{z+1} + i} = \frac{i(z+1)}{iz + i + z - 1} = \frac{z+1}{z+1 + i - iz} = \frac{z+1}{(z+i)(1-i)}.$$

Az A , M és C pontok egy egyenesbe esnek.



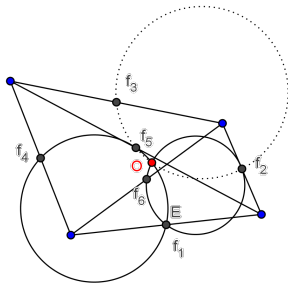
VI. Versenyfeladatok megoldása komplex számokkal

Egy feladat a KöMaL-ból

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges négyszög csúcaiból képzett háromszögek Feuerbach-körei egy ponton mennek át.

Legyenek a négyszög oldalainak és átlóinak felezőpontjai: $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$. Az O pontot úgy válasszuk meg, hogy az f_1, f_2, f_6 illetve az f_1, f_4, f_5 pontokon átmenő Feuerbach-körök az f_1 -en kívül O -ban messék egymást. (Az O egybe eshet f_1 -gyel.) Elegendő azt megmutatni, hogy a két kör közös O metszéspontján pl. az $(f_1 f_3 f_5)$ kör is átmegy. A bizonyítás az $(f_3 f_4 f_6)$ körre hasonlóan menne.



VI. Versenyfeladatok megoldása komplex számokkal

Egy feladat a KöMaL-ból

Az $(of_6 f_1 f_2)$, $(of_4 f_5 f_1)$ kettős viszonyok valósak. Bizonyítandó, hogy az $(of_3 f_5 f_2)$ kettős viszony is valós. Tudjuk, hogy

$$(of_6 f_1 f_2) = \frac{f_1}{f_2} : \frac{f_6 - f_1}{f_6 - f_2} = \lambda \in R,$$

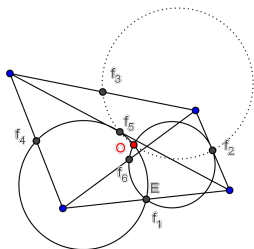
$$(of_4 f_5 f_1) = \frac{f_5}{f_1} : \frac{f_4 - f_5}{f_4 - f_1} = \mu \in R.$$

Szorozzuk össze a két egyenlőséget:

$$\frac{f_5}{f_2} : \frac{(f_6 - f_1)(f_4 - f_5)}{(f_6 - f_3)(f_4 - f_1)} = \lambda\mu.$$

Tudjuk, hogy $f_4 - f_5 = f_6 - f_2$, mivel közös alapú háromszögek középvonalvektorai és ugyanilyen okból $f_6 - f_1 = f_3 - f_5$, továbbá $f_4 - f_1 = f_3 - f_2$. Ezeket behelyettesítve az egyszerűsítés után

$$\frac{f_5}{f_2} : \frac{f_3 - f_5}{f_3 - f_2} = \lambda\mu \in R, \text{ ez éppen az } (of_3 f_5 f_2).$$



VII. További lehetőségek

Háromszögek hasonlósága

Az (xyz) és $(x'y'z')$ azonos irányítású háromszögek akkor és csak akkor hasonlóak, ha az $x - z$ vektort ugyanaz a forgatva nyújtás viszi át az $y - z$ -be, mint amelyik $x' - z'$ -t az $y' - z'$ -be. Ez azt jelenti, hogy van olyan f komplex szám, amellyel $f(x - z) = y - z$ és $f(x' - z') = y' - z'$. Ebből pedig

$$\frac{x - z}{y - z} = \frac{x' - z'}{y' - z'}.$$

Feladat

Az (oa_1b_1) , (oa_2b_2) , (oa_3b_3) egy közös csúccsal rendelkező egyező körüljárású háromszögek, továbbá az a_1, a_2, a_3 csúcsok egy egyenesre illeszkednek. Mutassuk meg, hogy a b_1, b_2, b_3 csúcsok is kollineárisak.

VII. További lehetőségek

Szabályos háromszögre feltétel

Feladat

Mutassuk meg, hogy az $(abc)\triangle$ akkor és csak akkor szabályos, ha $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Megoldás: Ha az (abc) háromszög szabályos, akkor egyben (abc) és (bca) háromszögek hasonlóak is. Használjuk az előző feltételt:

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{b-a}{c-a}.$$

Beszorzás és rendezés után

$$-a^2 + 2ca - c^2 = b^2 - ab - bc + ca,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Mivel az átalakítások oda-vissza elvégezhetők és az (abc) háromszög akkor és csak akkor hasonló a (bca) háromszöghöz, ha a háromszög szabályos, kaptunk egy „kényelmes” algebrai feltételt.

VII. További lehetőségek

Szabályos háromszögre vonatkozó feladat

Feladat

Egy ABC háromszög oldalai fölé szerkesztett négyzetek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak. Mit mondhatunk az ABC háromszögről?

Megoldás: Legyen az eredeti háromszög (abc) , a négyzetközéppontok által meghatározott pedig (xyz) . Ha x az (ab) oldal fölé szerkesztett négyzet középpontja, akkor $x - a$ merőleges $b - x$ -re és vele egyenlő hosszúságú.

$$(x - a)i = b - x \Rightarrow x = \frac{b + ai}{1 + i},$$

$$\text{és ugyanígy: } y = \frac{c + bi}{1 + i}, \quad z = \frac{a + ci}{1 + i}.$$

VII. További lehetőségek

Szabályos háromszögre vonatkozó feladat folytatása

Annak feltétele, hogy (xyz) szabályos legyen

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx.$$

Behelyettesítve és $(1 + i)^2$ -nel beszorozva:

$$\begin{aligned} & b^2 + 2abi - a^2 + c^2 + 2bci - b^2 + a^2 + 2cai - c^2 = \\ & = bc + b^2i + cai - ab + ca + c^2i + abi - bc + ab + a^2i + bci - ca. \end{aligned}$$

Rendezve és i -vel egyszerűsítve pontosan:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Megjegyzés

Az (abc) háromszög szabályosságára ismert másik feltétel: ha $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$, az első harmadik egységgyök, a háromszög pozitív körüljárású szabályos, akkor és csak akkor, ha

$$a + \omega b + \omega^2 c = 0.$$

VII. További lehetőségek

Egyenes egyenlete a komplex számsíkon

Legyen egy egyenes normálvektora n , adott pontja a . A z pont az egyenesen van, ha

$$z - a = \lambda in.$$

Vegyük mindkét oldal konjugáltját, majd küszöböljük ki a λ -t.

$$z - \bar{a} = -\lambda i \bar{n},$$

$$\bar{n}(z - a) + n(\bar{z} - \bar{a}) = 0 \Rightarrow \bar{n}z + n\bar{z} = \bar{n}a + n\bar{a} = t.$$

A t valós szám, mert konjugáltak összege. Az egyenes egyenlete:

$$\bar{n}z + n\bar{z} = t.$$

Megfordítva, ha $n \neq 0$ és t valós, akkor az n normálvektorú és $a = \frac{t}{2\bar{n}}$ pontú egyenes egyenlete

$$\bar{n}z + n\bar{z} = \bar{n}a + n\bar{a} = \frac{\bar{n}t}{2\bar{n}} + \frac{nt}{2n} = \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t.$$

VII. További lehetőségek

Kör egyenlete a komplex számsíkon

A c középpontú ρ sugarú kör egyenlete: $|z - c| = \rho$, amit írhatunk

$$(z - c)(\bar{z} - \bar{c}) = \rho^2,$$

$$z \cdot \bar{z} - \bar{c} \cdot z - c\bar{z} + c \cdot \bar{c} - \rho^2 = 0.$$

Jelöljük a $c \cdot \bar{c} - \rho^2$ valós számot s -sel. A kör egyenlete így:

$$z \cdot \bar{z} - \bar{c} \cdot z - c \cdot \bar{z} + s = 0.$$

Megfordítva, ha $c \cdot \bar{c} - s > 0$, akkor a fenti alakú egyenlet mindig kör egyenlete, mert $c \cdot \bar{c} - s = \rho^2$ helyettesítéssel az egyenlet $|z - c| = \rho$ alakra hozható. Ha $s = 0$, akkor a kör átmegy az O ponton.

VII. További lehetőségek

Az egyenes és a kör közös egyenlete

Összefoglalva: az egyenes és a kör „közös” egyenlete

$$pz\bar{z} - \bar{c}z - c\bar{z} + s = 0$$

alakban adható meg. Az egyenes esetében

$$p = 0 \text{ és } c \neq 0.$$

A kör esetében a kör középpontja $\frac{c}{p}$, sugara $\sqrt{\frac{c\bar{c}}{2} - \frac{s}{p}}$.

VII. További lehetőségek

Az inverzió

Ha O a komplex számsík nullpontja és az alapkör sugara 1, akkor az inverzió

$$z' = \frac{1}{\bar{z}}$$

alakban adható meg. A z és z' ugyanazon az O -ból induló félegyenesen vannak: ha z irányszöge φ , akkor \bar{z} irányszöge $-\varphi$ és végül a $z' = \frac{1}{\bar{z}}$ irányszöge ismét φ . Milyen hatással van az inverzió a körre és az egyenesre? Induljunk ki a közös egyenletükből!

$$pz\bar{z} - \bar{c}z - c\bar{z} + s = 0.$$

Az inverz pontokra

$$\frac{p}{z\bar{z}} - \frac{\bar{c}}{\bar{z}} - \frac{c}{z} + s = 0,$$

Beszorzás után:






VII. További lehetőségek

Az inverzió

$$sz\bar{z} - \bar{c}z - c\bar{z} + p = 0.$$

Következtetések:

- a.) az O -n átmenő egyenes ($p = 0, s = 0$) képe önmaga;
- b.) az O -n átmenő kör ($s = 0$) képe az O -n át nem menő egyenes;
- c.) az O -n át nem menő egyenes ($p = 0, s \neq 0$) képe az O -n átmenő kör;
- d.) az O -n át nem menő kör ($p \neq 0, s \neq 0$) inverze az O -n át nem menő kör.

-  Reiman István: *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó, (1999)
-  Reiman István: *Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon*, Középiskolai szakköri füzet (1972)
-  I.M. Yaglom: *Complex Numbers in Geometry*, Academic Press, London (internet)
-  Titu Andreescu - Dorin Andrica: *Complex Numbers from A to ... Z*, internet (djvu)
-  Fazekas M. Gimn. mat. munkaközösség: *Matkönyv: Geometria 11.-12., Komplex számok a geometriában fejezet*, <http://matek.fazekas.hu/>

Köszönöm a figyelmet!