Véges geometriák, akármerre nézek? – Rátz László Vándorgyűlés 2018

Csajbók Bence *

Egy szabályos n-szög két csúcsának a távolságán azt a legkisebb k nemnegatív egészt értjük melyre létezik olyan $k \cdot \frac{360}{n}$ fokos a sokszög középpontja körüli forgatás mely az egyik csúcsot a másikba viszi.

1. Feladat: Egy szabályos n-szög rész m-szögét *teljesen szabálytalannak* nevezzük ha bármely két csúcsának a távolsága különböző. Adjunk (n-től függő) felső becslést m-re.

2. Feladat: Találjunk maximális méretű teljesen szabálytalan sokszöget a szabályos 7-szögben, illetve a szabályos 13-szögben.

Megoldás: Legyenek a szabályos 7-szög csúcsai valamely körüljárás szerint $1, 2, \ldots, 7$ számokkal jelölve. Ekkor az $1, 2, 4$ csúcsok által meghatározott háromszög teljesen szabálytalan. A szabályos 13-szöghöz lásd. [2]. $\square$

3. Feladat: Legyen R egy teljesen szabálytalan $(n+1)$-szög egy S szabályos (n^2+n+1)-szögben. Bizonyítsuk be, hogy S bármely csúcspárjához pontosan egy olyan a $\frac{360°}{n^2+n+1}$ többszörösével vett elforgatottja van az R-nek amely csúcsai között szerepel ez a csúcspár. Bizonyítsuk be, hogy R bármely két különböző, a $\frac{360°}{n^2+n+1}$ többszörösével vett elforgatottjának pontosan egy közös csúcsa van.

A klasszikus projektív síkon (amit az euklideszi sík ideális pontokkal és az ideális egyenessel vett bővítésével kapunk) a pontok és egyenesek illeszkedésére teljesül, hogy:

- Bármely két különböző ponthoz pontosan egy egyenes illeszkedik.
- Bármely két különböző egyeneshez pontosan egy pont illeszkedik.

Ezt a két tulajdonságot megtartva definiáljuk az *absztrakt projektív síkot.* Legyen $\mathcal{P}$ egy halmaz (elemeit pontoknak nevezzük) $\mathcal{E}$ pedig $\mathcal{P}$ részhalmazainak egy halmaza (elemeit egyeneseknek nevezzük), a következő tulajdonságokkal:

*MTA–ELTE Geometriai és Algebrai Kombinatorika Kutatócsoport

P1: $\mathcal{P}$ bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van $\mathcal{E}$-nek, amely mindkettőt tartalmazza.

P2: $\mathcal{E}$ bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van $\mathcal{P}$-nek, amely mindkettőben benne van.

P3: Létezik 4 eleme $\mathcal{P}$-nek melyek közül semelyik 3 nem esik egy egyenesre. (Ezt miért vesszük hozzá?)

A $(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ párt (absztrakt) projektív síknak nevezzük ha kielégíti a fenti axiómákat. Ha $\mathcal{P}$ (és így $\mathcal{E}$ is) véges, akkor *véges projektív síkról* beszélünk.

Nagy betűkkel pontokat, kis betűkkel egyeneseket fogunk jelölni. A geometriai szóhasználattal élve, $P \in e$ esetén azt mondjuk, hogy P illeszkedik e-re; ha van f, hogy $P, Q, R \in f$, akkor P, Q és R kollineárisak, stb.

4. Feladat: Mutassuk meg, hogy véges projektív sík minden pontjára legalább 3 egyenes illeszkedik és minden egyenes legalább 3 pontot tartalmaz.

5. Feladat: Mutassuk meg, hogy minden véges projektív síkhoz van olyan n pozitív egész amelyre:

- Minden egyenesnek $n+1$ pontja van.
- Minden pontra $n+1$ egyenes illeszkedik.
- A síknak n^2+n+1 egyenese és ugyanennyi pontja van.

Ezt az n számot a sík *rendjének* nevezzük.

6. Feladat: Mutassunk 2-, illetve 3-rendű véges projektív síkot. Le tudjuk-e rajzolni őket?

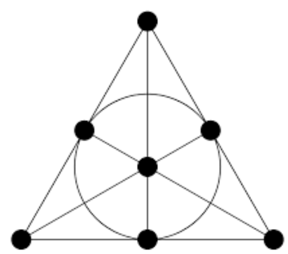
A $(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ és $(\mathcal{P}', \mathcal{E}')$ projektív síkokat *izomorf*-nak nevezzük, ha van olyan $\pi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ bijekció amely megtartja az illeszkedéseket, vagyis $P, Q, R \in \mathcal{P}$ pontok pontosan akkor vannak egy egyenesen ha $\pi(P), \pi(Q), \pi(R) \in \mathcal{P}'$ pontok is egy egyenesre illeszkednek.

7. Feladat: Mutassuk meg, hogy a 2-rendű projektív sík izomorfia erejéig egyértelmű.

Megoldás: Legyen $(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ és $(\mathcal{P}', \mathcal{E}')$ két 2-rendű projektív sík. Azt kell megmutatnunk, hogy létezik olyan $\pi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ bijekció amely megtartja az illeszkedéseket. Válasszunk $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{P}$ illetve $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathcal{P}'$ általános helyzetű pont négyeseket (tehát közülük semelyik 3 sem illeszkedik egy egyenesre). Ha A és B pontok, akkor jelöljük $\langle A, B\rangle$-vel az őket tartalmazó egyenest. Az axiómák miatt $P_5 := \langle P_1, P_2\rangle \cap \langle P_3, P_4\rangle$, $P_6 := \langle P_1, P_3\rangle \cap \langle P_2, P_4\rangle$ és $P_7 := \langle P_1, P_4\rangle \cap \langle P_2, P_3\rangle$ pontoknak is létezni kell és ez 3 különböző pont kell legyen $\mathcal{P}$-ben, melyek P_1, P_2, P_3, P_4 pontoktól különböznek és egy egyenesre esnek. Hasonlóan, $Q_5 := \langle Q_1, Q_2\rangle \cap \langle Q_3, Q_4\rangle$,

$Q_6 := \langle Q_1, Q_3 \rangle \cap \langle Q_2, Q_4 \rangle$ és $Q_7 := \langle Q_1, Q_4 \rangle \cap \langle Q_2, Q_3 \rangle$ a Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 pontoktól különböző három pont melyek egy egyenesre esnek. Legyen $\pi(P_i) = Q_i$ minden $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$-re. Könnyen látható, hogy π megtartja az illeszkedéseket. $\square$

A 2-rendű véges projektív síkot *Fano*-síknak is nevezik. Ezt a síkot az alábbi ábrával is szemléltethetjük (az egyenesek a szabályos háromszög oldalai, magasságvonalai és a beírható köre):



8. Feladat: Legyen $\mathcal{S}$ olyan ponthalmaz az n-rendű véges projektív síkon mely minden egyenest metsz. Mutasd meg, hogy $|\mathcal{S}| \geq n+1$ és egyenlőség esetén $\mathcal{S}$ egy egyenes. (Mi az állítás *duálisa* és igaz-e ez az állítás?)

Megoldás: Tegyük fel, hogy $|\mathcal{S}| \leq n+1$ és vegyünk egy e egyenest ami $\mathcal{S}$ két pontját köti össze ($\mathcal{S}$ nyilván nem állhat egyetlen pontból). Ekkor vagy $\mathcal{S} = e$ és készen vagyunk, vagy létezik P pont, hogy $P \in e \setminus \mathcal{S}$. Utóbbi esetben "nézzünk körül" P-ből: az e egyenesen kívül P még n db egyenesre illeszkedik, melyek mindegyike kell, hogy tartalmazzon legalább egy $\mathcal{S}$-beli pontot. Azt kaptuk, hogy $|\mathcal{S} \setminus e| \geq n$. De $\mathcal{S} \setminus e$ mérete legfeljebb $n-1$, ami ellentmondás. $\square$

9. Feladat: Ki lehet-e színezni az n-rendű véges projektív sík pontjait pirossal és kékkel úgy, hogy mindkét színt használjuk és minden egyenes pontosan ugyanannyi piros pontot tartalmaz? (Segít az előadás címe!)

10. Feladat: Legyen S olyan ponthalmaz az n-rendű véges projektív síkon, melyet minden egyenes legfeljebb k pontban metsz. Bizonyítsd be, hogy

$$|S| \leq (n+1)(k-1)+1$$

és egyenlőség esetén k osztja n-et.

11. Feladat: Legyen n páros és S olyan $(n+1)$-méretű ponthalmaz az n-rendű véges projektív síkon melyet minden egyenes legfeljebb 2 pontban metsz. Bizonyítsd be, hogy S érintői (vagyis az S-et pontosan 1 pontban metsző egyenesek) konkurensek.

12. Feladat: Hogyan csalt a bűvész? [2]

13. Feladat: Hófehérke és a hét törpe erdőbeli házukban élnek. 16 egymást követő nap mindegyikén minden törpe eldöntötte, hogy aznap a gyémántbányában dolgozzon, vagy bogyókat gyűjtsön az erdőben. Bármely két (nem feltétlenül egymást követő) napon legalább három törpe mindegyike mindkét munkát végezte. Továbbá az első napon mind a hét törpe a gyémántbányában dolgozott. Bizonyítsd be, hogy a 16 nap valamelyikén mind a hét törpe bogyókat gyűjtött. (*Megoldás a lap alján.*)

14. Feladat: Valaki gondol 0 és 15 között egy pozitív egész számra. El lehet-e dönteni 7 előre megadott eldöntendő kérdéssel, melyek közül egyre hazudhat az illető, hogy melyik számra gondolt?

Legyen $\mathcal{Q}$ véges halmaz, melyet *ábécé*-nek nevezünk. Tekintsük a $\mathcal{Q}$ elemeiből alkotott n-hosszú sorozatokat/vektorokat/szavakat, melyek összességét $\mathcal{Q}^n = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \times \ldots \times \mathcal{Q}$-val jelölünk. Két $\mathcal{Q}^n$-beli sorozat *Hamming távolsága* azon koordináták száma, melyekben a két sorozat eltér. A 14. feladatban $n = 7$, $\mathcal{Q} = \{0, 1\}$ (igen/nem). Ez összesen $2^7 = 128$ lehetséges sorozat, melyből 16 db kitüntetett, melyek a $0, 1, \ldots, 15$ számoknak felelnek meg (feltesszük a 7 kérdést és helyesen válaszolunk mindegyikre, megnézzük milyen 7 hosszú sorozatokat kapunk ha a gondolt szám $0,\ 1,\ \ldots 15$). Ha valamelyik kérdésre hamis válasz is érkezhetett, akkor abban az esetben fogjuk tudni visszakódolni az üzenetet, ha bármely két kitüntetett vektor egymástól vett Hamming távolsága legalább 3.

Tehát a kitüntetett szavak köré írt 1 sugarú *Hamming gömbök* diszjunktak kell, hogy legyenek. Ezek mérete $1+7 = 8$. Mivel $16 \cdot 8 = 128$, azt kapjuk, hogy ezek hézag mentesen lefedik $\{0, 1\}^7$-et. Vagyis $\{0, 1\}^7$ bármely szavához találunk pontosan egy kitüntetett szót amely tőle legfeljebb 1 Hamming távolságra van.

Kódnak $\mathcal{Q}^n$ részhalmazait nevezzük. Legyen $\mathcal{C}$ egy kód, ekkor a $\mathcal{C}$-be tartozó szavakat kódszónak hívjuk. A $\mathcal{C}$ *minimális távolságának* a kódszavai közt fellépő legkisebb Hamming távolságot nevezzük. A $\mathcal{C}$-kód *e-hibajavító*, ha minimális távolsága legalább $2e + 1$.

Egy szó *súlyán* a nem nulla koordinátáinak a számát értjük.

15. Feladat: Ha a $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Q}^n$ kód e hibát javít, akkor

$$|\mathcal{C}| \sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i} (q-1)^i \leq |\mathcal{Q}|^n,$$

egyenlőség esetén $\mathcal{C}$ kódot *perfekt*-nek nevezzük.

16. Feladat: Legyen $\mathcal{C} \subseteq \{0,1\}^7$ egy 16 méretű perfekt 1-hibajavító kód amely tartalmazza a $(0,0,0,0,0,0,0)$ vektort. Mi köze van $\mathcal{C}$ 3-súlyú szavainak a Fano-síkhoz?

A 13. Feladat megoldása: Feleltessünk meg a 16 napnak 16 darab 7 hosszú 0 és 1 számjegyekből álló sorozatot, úgy hogy a k. sorozat j. eleme legyen 0 ha a k. napon a j. törpe a bányában dolgozott és legyen 1, ha bogyót szedett. Ezeket a sorozatokat kódszavaknak fogjuk hívni. A megadott tulajdonságok miatt az első kódszó csupa 0-ból áll, illetve a 16 kódszó közül bármely kettőnek a Hamming távolsága legalább 3. Azt kell megmutatnunk, hogy a kódszavak között szerepel a csupa 1 sorozat. Természetesen ha találunk 16 db 7 hosszú kódszót melyek teljesítik a megadott tulajdonságokat, akkor a koordináták tetszőleges permutációja után (mindegyik kódszó esetén ugyanazt a permutációt alkalmazva) is 16 megfelelő kódszót kapunk, a Hamming távolságokat ugyanis ez a művelet változatlanul hagyja.

Mivel a csupa 0-ból álló sorozat kódszó, ezért nem lehetnek 1-súlyú, illetve 2-súlyú kódszavaink (ezek Hamming távolsága a csupa 0 kódszótól 1, illetve 2).

A folytatáshoz először a 16. Feladatot oldjuk meg. Az előző oldalon szereplő gondolatmenet miatt minden szóhoz kell, hogy találjunk pontosan egy olyan kódszót, ami tőle legfeljebb 1 Hamming távolságra van. Tekintsük a 2-súlyú szavakat, ilyenből $\binom{7}{2} = 21$ van. Mindegyikükhöz egyértelműen tartozik egy 3-súlyú kódszó, amely tőle pontosan 1 Hamming távolságra van. Minden 3-súlyú kódszó pontosan 3 db 2-súlyú kódszótól van 1 Hamming távolságra. Tehát a 3-súlyú kódszavak száma $21/3 = 7$. Megmutatjuk, hogy bármely két 3-súlyú kódszóhoz létezik pontosan egy koordináta melyben mindkét kódszóban 1-es áll. Ehhez gondoljunk a 7 db koordinátára mint pontokra, a 7 db 3-súlyú kódszóra pedig mint ezen pontok 3-elemű részhalmazaira, melyeket egyenesnek fogunk hívni. Tehát ha egy kódszóban az i., j. és k. koordinátában szerepel 1-es, akkor az ennek a kódszónak megfelelő egyenes az i., j. és k. pontokat tartalmazó részhalmaz lesz. Láttuk, hogy bármely két pontra pontosan egy egyenes illeszkedik. Ebből rögtön következik, hogy bármely két egyenes legfeljebb egy közös pontot tartalmazhat. Megmutatjuk, hogy bármely két egyenes pontosan egy közös pontot tartalmaz. Indirekt tegyük fel, hogy léteznek $e = \{P_1, P_2, P_3\}$ és $f = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ egyenesek, ahol $i \in \{1,2,3\}$-ra P_i és Q_i a 7 pontunk valamelyike és $\{P_1, P_2, P_3\} \cap \{Q_1, Q_2, Q_3\} = \emptyset$. Láttuk, hogy minden $i, j \in \{1,2,3\}$ pár esetén létezik pontosan egy a P_i-t és Q_j-t tartalmazó egyenes. Összesen 9 ilyen pontpár van, nekünk viszont csak 5 db az e-től és f-től különböző egyenesünk, tehát a skatulyaelv miatt lesz két különböző pontpár melyeket ugyanaz a $g \notin \{e, f\}$ egyenes tartalmaz. Ekkor viszont $g \cap e$ és

$g \cap f$ valamelyike két pontot is tartalmaz, ami ellentmondás, hiszen bármely két ponthoz egyértelműen létezik rájuk illeszkedő egyenes. Mivel nincsenek diszjunkt egyenesek, ezért bármely egyenes komplementere 4 olyan pontból áll, melyek közül semelyik 3 sem illeszkedik egyazon egyenesre. Beláttuk tehát, hogy a 7 pontunk és a 3-súlyú kódszavaknak megfelelő részhalmazaik kielégítik a **P1**, **P2**, **P3** axiómákat, vagyis pontjaink és egyeneseink egy Fano-síkot alkotnak. A 7. Feladat szerint ezek a síkok izomorfia erejéig egyértelműek, vagyis a koordináták egy alkalmas permutációja után feltehetjük, hogy a 3-súlyú kódszavak (a 2. Feladatban leírt modell alapján) a következő mátrix sorai lesznek:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Most megmutatjuk, hogy nem lehetnek 5-súlyú kódszavaink. Ehhez használni fogjuk a következő jelölést: Ha A és B (pont)halmazok, akkor szimmetrikus differenciájuk $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. A korábbi reprezentációnkkal élve, egy 5-súlyú kódszó megfelelne a Fano-síkon egy 5 pontból álló $\mathcal{S}$ ponthalmaznak, melyre igaz, hogy a Fano-sík bármely e egyenese esetén $|\mathcal{S}\Delta e| \geq 3$. Ez utóbbi felel meg annak a feltételnek, hogy az $\mathcal{S}$-nek megfelelő kódszó és a 3-súlyú kódszavak Hamming távolsága legalább 3. Mivel $\mathcal{S}$ komplementere két pontból áll, ezért a 8. Feladat szerint biztosan lesz olyan f egyenes, ami ettől a két ponttól diszjunkt. Ekkor f pontjait tartalmazza $\mathcal{S}$ és így $|\mathcal{S}\Delta f| = 2$, ami ellentmondás.

Megmutatjuk, hogy az egyenesek komplementereinek megfelelő 7 db 4-súlyú szó mindegyike kódszó kell, hogy legyen. Vegyünk egy e egyenest és jelöljük komplementerét $\bar{e}$-val, mely 4 általános helyzetű pont. Minden szóhoz, így az $\bar{e}$-nek megfelelő szóhoz is, létezik olyan kódszó ami tőle legfeljebb 1 Hamming távolságra van. Egy 4-súlyú kódszótól 1-távolságra lévő szavak 3 vagy 5 súlyúak (egy 1-et változtatunk 0-ra, vagy egy 0-t 1-re). Mint láttuk 5-súlyú kódszavak nincsenek, a 3-súlyúak pedig a Fano-sík egyeneseinek felelnek meg, tehát $\bar{e}$ vagy önmaga is kódszó, vagy egyértelműen létezik egy olyan f egyenes, melyre $|f\Delta\bar{e}| = 1$. Könnyen látható, hogy $|f\Delta\bar{e}| = 3$, ha $e \neq f$ és $|f\Delta\bar{e}| = 7$ ha $e = f$. Ez által további 7 kódszót kaptunk meg, melyeket az alábbi mátrix sorai szemléltetnek:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tekintsük most a 6-súlyú szavakat. Ilyenből 7 db van és mivel már csak egy kódszavunk maradt, biztosan tudunk választani olyan 6-súlyú szót, ami nem kódszó. Mivel ehhez a szóhoz is kell, hogy legyen legfeljebb 1 Hamming távolságra kódszó, és mivel 5-súlyú kódszavaink nem lehetnek, ezért a csupa 1-ből álló sorozat kódszó kell, hogy legyen. □

A 14. Feladat megoldása: Írjuk egymás alá az előző feladatban kapott 16 db. kódszót. Az első 4 koordináta semelyik két kódszóban sem egyezik meg, így ezeket 2-es számrendszerben leolvasva pont a $0, 1, \ldots, 15$ számokat kapjuk. Jelöljük $\tilde{i}$-vel azt a $\{0, 1, \ldots, 15\}$-beli számot melyet ily módon az i. sorból kapunk. Tekintsük most ennek a 16×7-es táblázatnak az oszlopait. Mindegyik oszlopban 8 db. 1-est látunk és minden oszlop lekódol egy kérdést a következő módon: Ha az i. oszlopban az $i_1, i_2, \ldots, i_8$-adik sorokban szerepel 1-es, akkor az i. kérdésben arra kérdezünk rá, hogy a gondolt szám a $\{\tilde{i_1}, \tilde{i_2}, \ldots, \tilde{i_8}\}$ halmazba tartozik-e. A válaszoknak megfelelően készítsünk el egy 7 hosszú sorozatot, melyben a j. helyen álljon 1-es, ha igen volt a válasz és álljon 0 nemleges válasz esetén. Ha minden kérdésre helyes válasz érkezik, akkor pont a 16 kódszó valamelyikét kapjuk vissza. Ha valamelyik kérdésre hazug válasz érkezik, akkor olyan sorozatot kapunk, amely a gondolt számnak megfelelő kódszótól 1 Hamming távolságra van és így egyértelműen megtudjuk mondani, hogy melyik ez a kódszó, melyből azt is, hogy mi volt a gondolt szám. □

17. Feladat: 7 mérkőzéses TOTÓ bajnokságon, ahol minden meccs kimenetele 2-féle lehet, hány szelvényt kell kitölteni, hogy biztosan legyen köztük 6 találatos?

18. Feladat: A gyémántbányában beszakadt az egyik tárna, hogy ezt helyrehozzák két héten keresztül minden nap 4 ember munkájára van szükség. Hófehérke is beáll segíteni a törpéknek. Helyre tudják-e hozni a bányát azzal a feltétellel, hogy Hófehérke és a 7 törpe közül bármely három személy pontosan egyszer dolgozik ugyanazon a napon?

19. Feladat: Le lehet-e rajzolni a Fano-síkot "egyenes" egyenesekkel?

Emlékezzünk vissza a "klasszikus" (euklideszi síkból kapott) projektív sík következő modelljére: A 3-dimenziós euklideszi térben legyenek az origón átmenő egyenesek a "pontok", az origón átmenő síkok az "egyenesek". Ekkor teljesülnek a **P1**, **P2** és **P3** axiómák. A pontokat homogén koordinátákkal írjuk le, vagyis $(a\colon b\colon c)$ ugyanazt a pontot jelöli mint $(\lambda a\colon \lambda b\colon \lambda c)$ minden nem nulla valós λ számra. Ezekre gondolhatunk úgy, mint a 3-dimenziós euklideszi tér origón átmenő egyeneseinek az irányvektoraira. Vannak egyenes egyenletek is, melyekre gondolhatunk úgy mint a megfelelő origón átmenő síkok normál vektoraira, ezeket szintén homogén koordinátákkal írhatjuk le, melyeket szögletes zárójelbe teszünk. Tehát $(a\colon b\colon c)$ pont illeszkedik az $[x\colon y\colon z]$ egyenesre pontosan akkor, ha $ax + by + cz = 0$.

Mikor lesz 3 pont kollineáris? Ezt a kérdést úgy is feltehetjük, hogy mikor lesz 3 az origón átmenő egyenes egy síkban. Természetesen akkor, ha az egyenesek irányvektorai lineárisan összefüggenek. Tehát $i = 1, 2, 3$-ra az $(a_i\colon b_i\colon c_i)$ pontok pontosan akkor illeszkednek egy egyenesre, ha

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa 0. Legyen M egy invertálható 3×3-as mátrix és tekintsük a projektív sík pontjain azt a bijekciót mely az $(a\colon b\colon c)$ ponthoz az $M(a\colon b\colon c)^T$ pontot rendeli, ahol ^{T} a transzponáltat jelöli. Az előbbiek alapján világos, hogy ez egy egyenes tartó bijekció a sík pontjain. Nem nehéz lineáris algebrai feladat megmutatni, hogy ha P_1, P_2, P_3, P_4 és Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 általános helyzetű pont négyesek, akkor létezik olyan M mátrix, hogy az általa definiált egyenes tartó bijekciónál P_i képe Q_i.

A 19. Feladat megoldása: Tegyük fel, hogy sikerült lerajzolni a Fano-síkot az euklideszi síkon úgy, hogy a Fano-síkon egy egyenesre illeszkedő pontok az euklideszi síkon is egy egyenesre illeszkednek. Bővítsük ki az euklideszi síkot projektív síkká ideális pontok és az ideális egyenes hozzávételével. Az előző bekezdés szerint létezik olyan egyenes tartó bijekció a projektív sík pontjain mely a Fano-sík 7 pontja közül 4 általános helyzetűt a következő 4 általános helyzetű pontba visz: $(0\colon 0\colon 1)$, $(0\colon 1\colon 0)$, $(1\colon 0\colon 0)$ és $(1\colon 1\colon 1)$. Ekkor a 7. Feladatban látott gondolatmenethez hasonlóan láthatjuk, hogy a Fano-sík fennmaradó 3 pontja a $(1\colon 1\colon 0)$, $(1\colon 0\colon 1)$ és $(0\colon 1\colon 1)$ pontokba megy át. Mivel ez a 3 pont a Fano-síkon és így az euklideszi síkon egy egyenesre illeszkedett, ezért képeik is kollineárisak kell, hogy legyenek, vagyis

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa 0 kell, hogy legyen. Ez a determináns -2, ami ellentmondás. (Kivéve ha $2 = 0$, lásd. alább.) $\square$

A 19. Feladat megoldása előtti gondolatmenetet megismételhetjük a valós számtest helyett más számtesttel is. Véges számtestek esetén (például bármely p prímszámra a modulo p maradékosztályok az összeadásra és a szorzásra nézve) véges projektív síkot kapunk. Ha a számtest elemszáma q, akkor ezt $\mathrm{PG}(2,q)$-val jelöljük. q-elemű test pontosan akkor létezik, ha q prímhatvány és ez a test lényegében egyértelmű. Megjegyezzük, hogy vannak nem testre épített véges projektív síkok is.

20. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{PG}(2,q)$ rendje q. Koordinátázzuk a Fano-síkot a 2-elemű testtel.

21. Feladat: A salakmotoros pályán egyszerre 3 versenyző fér el. Legalább hány futamra van szükség, ha azt szeretnénk, hogy 9 versenyző közül bármely 2 legalább egyszer szerepeljen közös futamban?

Hagyjuk most el egy n-rendű véges projektív sík egyik egyenesét és a rá illeszkedő $n+1$ pontot. Ekkor marad n^2 pontunk és n^2+n egyenesünk, a következő tulajdonságokkal:

A1: Bármely két pont pontosan egy egyenesre illeszkedik.

A2: Bármely e egyeneshez és rá nem illeszkedő P ponthoz létezik pontosan egy f egyenes mely nem metszi e-t és $P \in f$.

A3: Van 3 nem kollineáris pont.

A fenti axiómáknak eleget tevő illeszkedési struktúrákat *n-rendű véges affin síknak* nevezzük. Bármely véges affin síkból a "szokásos" módon (ideális pontokkal és az ideális egyenessel bővítve) megkaphatjuk a *projektív lezártját* ami egy véges projektív sík. A $\mathrm{PG}(2,q)$-ból kapott véges affin síkot $\mathrm{AG}(2,q)$-val jelöljük. Ez utóbbit az euklideszi sík (ami szintén affin sík, de persze nem véges) mintájára úgy is megkaphatjuk, ha a pontok koordinátáit a q-elemű testből választjuk, az egyenesek egyenleteit e felett a test felett írjuk fel és a fellépő műveleteket ebben a testben végezzük el. Hasonlóan definiálhatunk n-dimenziós affin teret is, melyet $\mathrm{AG}(n,q)$-val jelölünk.

22. Feladat: Mutassuk meg, hogy $\mathrm{AG}(3,2)$ síkjai is megoldást adnak a 18. Feladatra. Hogyan lehet ezt lerajzolni?

23. Feladat: Mi a helyzet, ha 16 salakmotoros szeretne 4 fős pályán versenyezni úgy, hogy bármely két versenyző legalább egyszer szerepeljen közös futamban?

24. Feladat: 4 mérkőzéses TOTÓN, ahol minden meccsnek 3 kimenetele lehet, legalább hány szelvényt kell kitölteni, hogy biztosan legyen legalább 3 találatunk?

25. Feladat: Legfeljebb hány SET kártyát lehet úgy kiválasztani, hogy ne legyen benne SET? Minek felel ez meg?

26. Feladat: Hogyan lehet Dobble paklit készíteni?

27. Feladat: Egy $n \times n$-es táblázatba 0-kat és 1-eket írunk. Bizonyítsd be, hogy legfeljebb $\frac{n}{2}(1 + \sqrt{4n-3})$ db. 1-est írhatunk le azzal a feltétellel, hogy ne legyen köztük 2 oszlop és 2 sor melyek keresztezési mezőiben csupa 1-es áll. Elérhető ez a korlát?

Hivatkozások

[1] Bérczi Gergely, Gács András, Hraskó András és Szőnyi Tamás: Véges projektív síkok, Új Matematikai Mozaik (szerk.: Hraskó András), Typotex Kiadó, Budapest (2002).

[2] Csajbók Bence: Egy kártyatrükk és ami mögötte van, Középiskolai Matematikai és izikai Lapok 2010/5. Kézirat letölthető: http://web.cs.elte.hu/∼csajbokb/komal.pdf

[3] Hraskó András és Szőnyi Tamás: Hibajavító kódok, Új Matematikai Mozaik (szerk.: Hraskó András), Typotex Kiadó, Budapest (2002).

[4] Kiss György és Szőnyi Tamás: Véges Geometriák, Polygon Kiadó, Szeged (2001).

[5] Montágh Balázs: Salakmotoros-versenyek és véges síkok, Új Matematikai Mozaik (szerk.: Hraskó András), Typotex Kiadó, Budapest (2002).

[6] Szőnyi Tamás: Szimmetrikus Struktúrák, ELTE jegyzet, Typotex (2013)