# ***A Geogebra szerkesztőprogram alkalmazása nehéz geometriai problémák megoldása és szerkesztése során (Rátz László Vándorgyűlés, 2018, Győr)***

## I. Általános megjegyzések

a) Az előadásban szóba került a geometria oktatásának egyik alapvető problémája, az, hogy a matematika oktatásában ma ez a terület érzékelhetően háttérbe szorult. Ez részben tananyagcsökkentésben, tankönyvekkel, feladatgyűjteményekkel kapcsolatos problémákban, és nem utolsó sorban a diákok hozott tudásának és érdeklődésének hiányában nyilvánulhat meg.

b) Az előadó véleménye szerint a geometriát érdekessé és szemléletessé kell tenni, ehhez pedig minden olyan eszközt helyes és célszerű felhasználni, amellyel ez a cél elérhető. Természetesen a szemléltető eszközök használata nem helyettesíti a logikus gondolkodást, a szigorú bizonyítást, a feltételek vizsgálatát, általában a geometriai ismereteket.

c) A szemléletesség a táblai körző és vonalzó, illetve kréta használatán túl jelentősen növelhető azzal, ha a Geogebra szerkesztőprogram alapján készített rajzokat tanulmányozunk tanórán vagy szakkörön. A szerkesztőprogram ingyenesen és szabadon letölthető a https://www.geogebra.org/download internetes oldalról, ahol mindig több program aktuálisan legfrissebb változata található. Ezek közül legjobban használhatónak a Geogebra Classic 5 mondható. Az előadáshoz készített ppt-bemutató 25. diáján vetítési üzemmódban több internetes oldal is megnyitható. Ezek jelentős része angol nyelvű, de vannak magyar nyelvű Geogebra-anyagok is, például dr. Szilassi Lajos tanár úr nagyszerű munkái. Praktikus regisztrálni a Geogebra letöltő oldalon, mert ezzel bármely, az oldalra föltett ábra, animáció, szemléltető, és az oktatásban kiválóan használható anyag elérhető és letölthető.

Megjegyzendő, hogy ugyanez az oldal androidos okostelefonra telepíthető Geogebra programokat is felkínál (például Graphing Calculator, Geometry, 3D Graphing), ezeket a Google Play szolgáltatással tölthetjük a telefonra. Nem mellesleg ugyanezen szolgáltatással olyan nagyszerű, a tanulók szemléletét formáló és logikus gondolkodását fejlesztő geometriai játékok telepíthetők a telefonra, mint a Pithagorea, Pithagorea 60, és az Euclidea.

d) A Geogebrával készített munkák lehetnek munkalapok, munkalapok képeinek exportálásával készült és kinyomtatott rajzok, diasorozatok, amelyeken egy diába egy feladat, tétel bizonyításának összes lépése exportált és pontosan egymásra illesztett rajzok egymásutánjával mutatható meg. Utóbbi olyan módszertani lehetőséget is rejt magában, hogy a diát bemutatva és a hozzá fűzött magyarázat mértékét a csoport képességeihez igazítva házi, vagy szorgalmi feladatnak is adható a teljes bizonyítás leírása. Ha egy feladat bizonyításáról a megoldási lépések sorrendjében képeket akarunk exportálni és azt diába akarjuk illeszteni, akkor először készítsük el egy munkalapon a teljes rajzot. Ezután az „Alakzat mutatása" funkció (jobb egér gomb) kikapcsolásával tegyünk „láthatatlanná" majdnem minden alakzatot, ezután pedig a megoldás lépéseinek sorrendjében fokozatosan tegyük láthatóvá a bizonyítás szempontjából fontos alakzatokat. Az így előálló egy-egy rajzot a megoldás aktuális fázisának megfelelően exportáljuk *png* formátumban, „nem átlátszó" módon, majd mentsük. Eközben a munkalap rajza már ne módosuljon. A képeket egy diába pontosan egymásra illesztve a feladat bizonyításának lépései szépen és látványosan megjelennek. Ha szép és áttekinthető rajzokat szeretnénk, akkor az egyes alakzatok betűjelét a „Szöveg" funkció segítségével „Latex" formátumban célszerű megjeleníteni. Mind az alakzatok, mind a beszúrt szöveges tartalmak méretét, színét, vastagságát a program segítségével szabályozhatjuk.

e) Egy feladathoz készített Geogebra-munkalap nem csak pontosabb, mint a körzővel, vonalzóval, ceruzával létrehozott rajz, hanem a legtöbb esetben új összefüggések felismerésére is ösztönözhet diákot és tanárt egyaránt.

f) Az eddigiek alkalmazása a diákok számára látványos, de egyes csoportoknál passzív befogadást is jelenthet (hozzátéve persze, hogy aktív és érdeklődő tanulók, csoportok a rajzok, munkalapok, diák alapján kérdéseket fognak föltenni, más csoportokat pedig ilyen kérdések feltevésére a tanárnak kell ösztönözni). Ezért az előadó azt javasolja, hogy a Geogebra használatát tanítsuk meg a diákoknak, segítsünk nekik, hogy a program használhatóságát, érvényességi körét megértsék és aktívan alkalmazni tudják.

## II. Feladatok és az előadáshoz szerkesztett ppt bemutatóval kapcsolatos megjegyzések

1. Az $ABC$ háromszög $BC$ és $CA$ oldalán rendre úgy helyezkednek el a $D$ és $E$ pontok, hogy $DAE\sphericalangle = 10°$, $DAB\sphericalangle = 70°$, $DBE\sphericalangle = 20°$, végül $ABE\sphericalangle = 60°$.
Határozzuk meg az $ADE\sphericalangle$-et. (Google+Mathematics)

*Megjegyzések:*

*a)* *Az Arany Dániel Matematikaverseny 1995-1996-os versenyének egy feladatával rokon, abban a feladatban $DAE\sphericalangle = 30°$, $DAB\sphericalangle = 50°$, $DBE\sphericalangle = 40°$, és $ABE\sphericalangle = 40°$.*

*b)* *A feladathoz kapcsolódó 6. dián szerepel egy Geogebra-munkalap. Ezt diavetítés üzemmódban megnyitva és a kérdéses szöget kijelölve a Geogebra „közelítő” választ ad a feladat kérdésére. Ez nyilván nem helyettesíti a bizonyítást. Ugyanitt megrajzolhatjuk az eredetivel egybevágó $ABC$ háromszöget és a $DAE\sphericalangle = 20°$, $DAB\sphericalangle = 60°$, $DBE\sphericalangle = 30°$, $ABE\sphericalangle = 50°$ szögek felvétele után ezúttal is kitűzhetjük feladatként az $ADE\sphericalangle$ meghatározását.*

2. Az $ABC$ háromszögben $CAB\measuredangle = 40°$ és $CBA\measuredangle = 80°$, a háromszög körülírt körének középpontja az $O$ pont. A $CBA\measuredangle$ szögfelezője a $D$ pontban metszi az $AC$ oldalt. Bizonyítsuk be, hogy a $DOB$ háromszög körülírt körének középpontja az $ABC$ háromszög $C$ pontból induló magasságvonalára illeszkedik. (NMMV-2017-Somorja)

3. Az $ABC$ háromszög két szöge $BAC\sphericalangle = 15°$ és $ABC\sphericalangle = 30°$. A $C$ pontban az $AC$ oldalra bocsátott merőleges az $AB$ szakaszt a $D$ pontban, az $AB$ szakasz felezőmerőlegese a $CD$ egyenest az $E$ pontban metszi. Hosszabbítsuk meg az $AB$ szakaszt a $B$ ponton túl a $BC$ szakasz hosszával, az így kapott pont legyen $G$. Bizonyítsuk be, hogy $B; G; E; C$ a pontok egy $AB \cdot \sqrt{2}$ átmérőjű körön vannak. (KÖMAL. B.-4810.)

*Megjegyzések:*

*a)* *A 9. dián a feladathoz készített munkalap van. Ezt diavetítés módban megnyithatjuk és a csúszka animálásának bekapcsolásával szemléltethetjük a megoldás alapötletét, vagyis az $ABC$ háromszög $B$ pont körüli negatív irányú $60°$-os elforgatását. Ezután a megoldást a diára pontosan egymásra illesztett képek korrekt elemzésével (vetítési üzemmódban) tehetjük teljessé.*

4. Az $ABCD$ négyzet $AB$ és $BC$ oldalán rendre fölvettük az $E$ és $F$ belső pontokat úgy, hogy

$$BE = BF$$

teljesüljön. Az $AE$ és $BE$ szakaszokra a négyzet belsejébe megszerkesztjük az $AEG$ és $BEH$ szabályos háromszögeket, majd a $BF$ és $CF$ szakaszokra is megszerkesztjük a $BFK$ és $CFL$ szabályos háromszögeket, de most úgy, hogy a szabályos háromszögek $K$ és $L$ csúcsai a négyzet külső pontjai legyenek. Mutassuk meg, hogy a $GH$ és $LK$ egyenesek merőlegesek egymásra.

*Megjegyzések:*

a) *a 10. dia vetítésekor (a 4. példa bevezetéseként) egy régi feladat szemléltetése látható, amely egyes szögek megállapítása után könnyen megoldható. A diába illesztett Geogebra-munkalap az előzőhöz hasonlóan a csúszka animálásával a megoldás elforgatási ötletét szemlélteti.*

b) *A 11. dia több szempontból is jól használható tanítási órán: utal arra, hogy a 10. dia feladata hogyan hatott egy másik feladat megszületésére, továbbá itt is felhasználjuk az elforgatás ötletét, amelyet a dián levő munkalap megnyitásával tanulmányozhatunk.*

c) *A munkalap csúszkájának animálásakor a $BG$ és $BH$ szakaszok fordulnak el $90°$-kal a $B$ pont körül negatív irányba és az animáció kijelöli $G, H$ pontok nyomvonalát.*

d) *Házi, illetve szorgalmi feladatnak adható: keressünk összefüggéseket a feladat azon módosítása során készült rajzon, amelyben az $AB$ és $BC$ szakaszokra 3-3 szabályos háromszöget illesztünk.*

5. Az $ABCD$ húrnégyszögben megrajzoljuk az $ADB\sphericalangle$ és $ACB\sphericalangle$ szögfelezőit, ezek a szögfelezők az $AB$ oldalt rendre az $E$ és $F$ pontokban metszik. Hasonlóképpen a $CBD\sphericalangle$ és $CAD\sphericalangle$ szögfelezői a $CD$ oldalt rendre a $G$ és $H$ pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy az $E; F; G; H$ pontok egy körön vannak. (KÖMAL. B.-4765.)

*Megjegyzések:*

a) *A 12. dián vetítési módban annak az esetnek a tárgyalása mutatható be, amikor a húrnégyszög $AB$ és $CD$ egyenesei nem párhuzamosak, a párhuzamos eset lényegében triviális.*

b) *A beillesztett munkalapon az például az $E; F; G$ pontok köré írt kört megrajzolva a „kapcsolat két alakzat között” funkció segítségével ellenőrizhetjük (kifejezetten szemléltető jelleggel és nem a bizonyítás szándékával), hogy ezen a körön rajta van a $H$ pont is. Ugyanitt szemléltethetjük azt is, hogy az $A; B; C; D$ pontok bármelyikének elmozdításával az $E; F; G; H$ pontok mindig húrnégyszöget alkotnak.*

6. Az $ABCD$ húrnégyszögben az $AC$ és $BD$ átlók metszéspontja $M$. Megrajzoltuk a $CAD\sphericalangle$ és $ACB\sphericalangle$ szögfelezőit, ezek a szögfelezők az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körét rendre az $E$ és $F$ pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy az $EF$ egyenes merőleges az $AMD\sphericalangle$ felezőjére.

(KÖMAL. B.-4818.)

*Megjegyzések:*

a) *A példa az előző feladat kiinduló ötletének (húrnégyszögben bizonyos szögek felezőinek berajzolása) nyomán született.*

7. Az $ABCD$ húrnégyszög szemben levő oldalai nem párhuzamosak, az $AC$ és $BD$ átlóinak metszéspontja $M$, a $BC$ oldal felezőpontja $E$, a $DA$ oldal felezőpontja $F$. Az $EM$ és $DA$, illetve $FM$ és $BC$ egyenesek metszéspontjai rendre $G$ és $H$. Bizonyítsuk be, hogy az $E; F; G; H$ pontok egy körre illeszkednek. (2015 januári KÖMAL-javaslat)

*Megjegyzések:*

a) *a 14. dián egy, az erdélyi Matlap-ból származó feladat szemléltetése található, amelynek az a lényege, hogy ha egy trapéz két szárát azonos arányban osztjuk föl 2-2 ponttal, akkor a pontok összekötésével kapott alakzat is trapéz. Az eredeti feladat csak annak bizonyítása volt, hogy*

$$\frac{CG}{GB} = \left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

*A bizonyításhoz felhasználtuk a Menelaosz-tételt.*

b) *A 7. feladat az előző erdélyi versenyfeladat ötletéből született, bizonyítása kissé hosszadalmas (ezért a 15. dia csak a feladat állítását szemlélteti), többször felhasználja a Menelaosz-tételt.*

8. Az $ABC$ hegyesszögű háromszög $BC$ oldala, mint átmérő fölé rajzolt $k_1$ kör az $AC$ oldalt az $E$ pontban, az $AB$ oldalt az $F$ pontban metszi. Legyen az $AEF$ háromszög körülírt köre $k_2$. Az $E$ ponton át rajzolt tetszőleges egyenes a $k_2$ és $k_1$ köröket rendre a $P$ és $Q$ pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy a $PQ$ szakasz felezőpontja az $ABC$ háromszög Feuerbach-körére illeszkedik.

(Art of Problem Solving)

*Megjegyzések:*

a) *A 16. dia a forrás megnevezésén túl a feladathoz készített teljes rajzot tartalmazza úgy, hogy a rajz megjelenése után a következő kattintáskor a rajz eltűnik és megjelenik két Geogebra munkalap (ez megjelenés-eltűnés technikailag az animációk menüpontban állítható be).*

b) *Az első munkalap megnyitásakor a $P$ pont animálásával (jobb egér gomb) szemléltethetjük a $P$ pont lehetséges helyzeteit. Az animálás leállítása után az algebra ablak felhasználásával tegyük láthatóvá a $g$ egyenest, a $Q$ pontot, a $h$ szakaszt és az $M$ pontot (ebben a sorrendben célszerű). Ezután az $M$ pontra „aktivizáljuk" a nyomvonal funkciót (jobb egér gomb) és a $P$ pontot újra animáljuk. Ezzel szemléletesen bemutathatjuk, hogy az $M$ pont nyomvonala a $P$ pont mozgása során egy kör, amely áthalad az oldalfelező pontokon, a magasságok talppontjain (és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjain, utóbbiak a munkalapon nincsenek megjelölve), ez a kör pedig a Feuerbach kör.*

c) *A dián szereplő másik munkalapot megnyitva végig követhetjük a megoldás menetét, különös tekintettel a $PFQ$ és $HFB$ hasonló háromszögekre, amelyekben $FM$ és $FN$ a megfelelő oldalakhoz tartozó súlyvonalak (az $N$ pont a $H$ magasságpontot a $B$ csúccsal összekötő szakasz felezőpontja, ezen Feuerbach-kör biztosan átmegy).*

9. Az $ABC$ hegyesszögű háromszög magasságvonalainak talppontjai a $BC, CA, AB$ oldalakon rendre $D, E, F$, az $ABC$ háromszög magasságpontja $M$. Jelölje az $AB$, mint átmérő fölé rajzolt kört $k_1$, a a $DEM$ háromszög körülírt körét $k_2$. Vegyük föl a $k_2$ körnek a $D$ pontot nem tartalmazó $EM$ ívén az $E, M$ pontoktól különböző $P$ pontot. A $DP$ egyenes a $k_1$ kört másodszor a $Q$ pontban metszi és legyen a $PQ$ szakasz felezőpontja $R$.

Mutassuk meg, hogy az $AQ, MP, FR$ egyenesek egy pontban metszik egymást.

*Megjegyzések:*

*a) A feladat ötlete az előző dián szereplő második munkalap rajza alapján született.*

10. Legyenek az $ABC$ hegyesszögű, nem egyenlő szárú háromszög $BC, CA$ és $AB$ oldalainak felezőpontjai rendre $D, E$ és $F$, a háromszög körülírt körének középpontja $O$, magasságpontja $M$. Az $ABC$ háromszög körülírt köréhez az $A$ pontban húzott érintő és $EF$ metszéspontja $P$, a körülírt körhöz a $B$ pontban húzott érintő és $FD$ metszéspontja $Q$. Mutassuk meg, hogy a $PQ$ egyenes merőleges az $OM$ egyenesre.

*Megjegyzések:*

*a) A feladat azon észrevétel nyomán jött létre, hogy az $ABC$ háromszög egy csúcsában a körülírt körhöz, a csúcshoz tartozó magasság talppontjában a Feuerbach-körhöz húzott érintők a kérdéses magasság egyenesével azonos nagyságú szöget zárnak be.*

*b) A 18. dián vetítés üzemmódban a bizonyítás lépéseit tanulmányozhatjuk, közben felhasználjuk a pont körre vonatkozó hatványának fogalmát, valamint azt, hogy két (nem koncentrikus) kör hatványvonala a centrálisukra merőleges.*

11. A hegyesszögű $ABC$ háromszög $B$ és $C$ csúcsából induló magasságvonal talppontja az $AC$, illetve $AB$ oldalon rendre $D$ és $E$, a $BC$ oldal felezőpontja $F$. Az $AF$ és $DE$ szakaszok metszéspontja $M$, az $M$ pontnak a $BC$ szakaszra eső merőleges vetülete $N$. Bizonyítsuk be, hogy az $AN$ szakasz felezi a $DE$ szakaszt.

*Megjegyzések:*

*a) A 19. dia vetítésekor a megoldás lépései jól nyomon követhetők. Felhasználjuk, hogy az $ABC$ hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének $DE$ oldala az $AC; AB$ oldalakkal rendre $\beta$; $\gamma$ szögeket zár be, és ezért az $ADE$, illetve $ABC$ háromszögek hasonlók, továbbá azt, hogy a hasonló háromszögekben a megfelelő oldalakhoz tartozó súlyvonalak az oldalakkal azonos nagyságú szögeket zárnak be (ezt a 8. feladatban is felhasználtuk).*

*b) A bizonyítás során a $DE$ szakasz felezőpontját $G$-vel jelöltük, és lényegében azt bizonyítottuk, hogy $AGN\sphericalangle = 180°$.*

12. A hegyesszögű $ABC$ háromszög $B$ és $C$ csúcsaiból induló magasságainak talppontja az $AC$, illetve $AB$ oldalon rendre $D$ és $E$, a $BC$ oldal felezőpontja $F$. Az $AF$ és $DE$ szakaszok metszéspontját jelölje $M$, az $M$ pontnak a $BC$ szakaszra eső merőleges vetületét $N$, az $N$ pont merőleges vetülete az $AC$ és $AB$ oldalakon rendre $P$ és $Q$.
Bizonyítsuk be, hogy az $APQ$ háromszög magasságpontja $M$. (vietnami versenyfeladat)

*Megjegyzések:*

a) *A 12. feladathoz tartozó 20. dián látható munkalapot megnyitva a rajz segítségével és a párhuzamos szelők tételének, valamint a tétel megfordításának többszöri alkalmazásával bizonyítjuk, hogy $QM \parallel BD$, valamint $PM \parallel CE$, ebből már következik, hogy $M$ az $APQ$ háromszög magasságpontja (ez lehet egy érdeklődő osztályban, csoportban kijelölt szorgalmi feladat is). A megoldás közben használjuk az előző feladat egyik eredményét, vagyis azt, hogy a $DE$ szakasz felezőpontját $G$-vel jelölve az $ADE$, illetve $ABC$ hasonló háromszögekben az $AG$, valamint $AF$ szakaszok megfelelő oldalakhoz tartozó súlyvonalak és ezért például $GAE\sphericalangle = FAC\sphericalangle$.*

b) *Az eredeti vietnami versenyfeladat annak bizonyítása volt, hogy $MN$ felezi a $PQ$ szakaszt, ez is könnyen belátható, ha a 12. feladattal készen vagyunk, hiszen ennek eredménye például az, hogy $PMQN$ négyszög parallelogramma.*

13. Az $ABC$ hegyesszögű háromszög körülírt körének középpontja $O$, magasságpontja $M$.

Tükrözzük az $A$ pontot a $BC$ oldal felezőmerőlegesére, a $B$ pontot a $CA$ oldal felezőmerőlegesére, végül a $C$ pontot az $AB$ oldal felezőmerőlegesére, a tükörképpontok rendre $A_1, B_1, C_1$. Legyen az $A_1B_1C_1$ háromszög beírt körének középpontja $K$. Bizonyítsuk be, hogy az $O$ pont felezi az $MK$ szakaszt. (KÖMAL-B. 4708.)

*Megjegyzések:*

a) *A 21. dia vetítésekor a megoldás egyes lépései logikus sorrendben pontosan egymás után jelennek meg. Bizonyítjuk, hogy az $A_1$ pontnak a körülírt kör középpontjára vonatkozó tükörképe és a magasságpontnak a $BC$ oldalra vonatkozó tükörképe azonos (ez a pont a körülírt körön van). Felhasználjuk még, hogy az $ABC$ háromszög talpponti háromszöge beírt körének középpontja az $ABC$ háromszög $M$ magasságpontja.*

14. Az $ABC$ hegyesszögű háromszög körülírt körének középpontja $O$, magasságpontja $M$.

Tükrözzük az $A$ pontot a $BC$ oldal felezőmerőlegesére, a $B$ pontot a $CA$ oldal felezőmerőlegesére, végül a $C$ pontot az $AB$ oldal felezőmerőlegesére, a tükörképpontok rendre $A_1, B_1, C_1$. Mutassuk meg, hogy az $ABC$ háromszögnek az $A_1$ ponthoz tartozó Simson-Wallace-egyenese merőleges a $B_1C_1$ egyenesre.

*Megjegyzések:*

a) *Az előző feladatbeli $A_1, B_1, C_1$ pontokról van szó, de itt más összefüggésre mutathatunk rá. A 22. dián először azt látjuk be, hogy az $AA^*$ egyenes párhuzamos az $ABC$ háromszögnek az $A_1$* ponthoz tartozó Simson-Wallace-egyenesével (ez a Simson-Wallace-egyenes általános tulajdonsága). Ezután elegendő belátni, hogy az *$AA^*$ egyenes áthalad a körülírt kör középpontján, továbbá azt, hogy például az $AB_1C_1$ háromszög egyenlő szárú.*

15. Az $AB$ átfogójú derékszögű háromszög $BC$ befogóján úgy vesszük föl a $C$ pontból kiindulva a $D; E$ pontokat ebben a sorrendben, hogy $DAC\sphericalangle = EAD\sphericalangle = BAE\sphericalangle$.
A $C$ csúcsból az $AD$ szakaszra, a $D$ pontból az $AB$ átfogóra bocsátott merőleges talppontjai rendre $F; K$. A $CK$ egyenes az $AE$ szakaszt a $H$ pontban, a $H$ ponton keresztül az $AD$-vel párhuzamosan húzott egyenes a $BC$ szakaszt az $M$ pontban metszi. Igazoljuk, hogy a $CHM$ háromszög körülírt körének középpontja az $F$ pont.

*Megjegyzések:*

a) *A feladat a Google+ internetes fórum Mathematics nevű közösségi oldal egy feladatához készített rajz alapján jött létre. Az eredeti feladatban csak annyit kellett bizonyítani (lásd a diába illesztett munkalapot, vagy a dia rajzait vetítés módban), hogy $2CF = DK$.*

b) *A munkalap megnyitásakor további szép összefüggéseket találhatunk: a $CH$ és $AF$ egyenesek metszéspontját $R$-rel, a $CN$ és $AE$ egyenesek metszéspontját $S$-sel jelölve beláthatjuk, hogy $RS \| BC$, valamint, hogy $SM \perp BC$. Ezeket (és a munkalapon találtak alapján megfogalmazható más állításokat) szemléltető módon ellenőrizhetjük a Geogebra „kapcsolat két alakzat között” funkciójával, ez azonban a bizonyítás kötelezettsége alól nem mentesít.*

16. Adottak a $k_1;\ k_2$ körök, amelyek egymást a $B$ pontban kívülről érintik. A $B$ ponton keresztül két szelőt húzunk, amelyek a $k_1;\ k_2$ köröket rendre az $A; C$ és $E; D$ pontokban metszik. A körök egyik közös külső érintőjének a $k_1;\ k_2$ körökkel való érintési pontjai rendre $F$ és $G$.
Mutassuk meg, hogy az $ABC$ háromszögnek az $F$ ponthoz, és az $EBD$ háromszögnek a $G$ ponthoz tartozó Simson-Wallace-egyenesei merőlegesek egymásra.

*Megjegyzések:*

a) *A 24. diába illesztett munkalapot nyissuk meg vetítés üzemmódban. Az algebra ablak segítségével tegyük láthatóvá az $l$ egyenest, az $F; G$ pontokat, az $f_1;\ h_1;\ k_1;\ j_1$ szakaszokat, az $L;\ M_1;\ N_1; O$ pontokat és az $\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ \delta$ derékszögeket. A megoldás ezután a kerületi és középponti szögek összefüggései alapján könnyen bizonyítható.*

b) *A munkalapon az $AC$ és $ED$ egyenesek párhuzamosak, ez éppen a Geometriai Feladatgyűjtemény I. kötete 1034. feladatának állítása.*

Eger, 2018. 05.15. Bíró Bálint matematikatanár, +36-30-414-5985

balint.biro55@gmail.com