Pólya Urnák (Tóth Bálint 2017 - július 1) ①

Egy urnában PIROS és KÉK üveg-golyók vannak.

- kezdetben $B_0 = 1$, $R_0 = 1$ (lehetne $B_0 = k$, $R_0 = l$)
- $n = 1, 2, \ldots$ időegységenként
  - véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) kihúzunk egy golyót
  - majd visszatesszük + még egy ugyanolyan színűt (az urnában lévő golyók száma eggyel nő).

(B_n, R_n) Markov-lánc $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-en

$B_n + R_n = n+2$

legyen $X_n := \dfrac{B_n}{B_n + R_n}$ az urnában lévő KÉK golyók aránya (n) lépés után

<u>Kérdés</u>: Hogyan alakul X_n sok-sok lépés után?

(A) Ingadozik 0 és 1 között?

(B) Stabilizálódik az értéke?

ha (B), akkor $\lim_{n \to \infty} X_n = ?$

~~Számoljuk a feltételes várható értékét:~~

$\cancel{\mathbb{E}(X_{n+1} \mid (B_j, R_j))}$

<u>Ábrázolás bolyongással</u>

<u>Kérdés</u>: a trajektória asztimptotikus iránya

Számoljuk ki a $\boxed{\text{feltételes várhatóértéket}}$ ③

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1} \,\middle|\, (B_j, R_j)_{j=1}^{n}\right) =$$

$$\frac{B_n+1}{B_n+R_n+1} \cdot \frac{B_n}{B_n+R_n} + \frac{B_n}{B_n+R_n+1} \cdot \frac{R_n}{B_n+R_n} =$$

$$\dots = \frac{B_n}{B_n+R_n} = X_n \qquad \boxed{\text{martingál!}}$$

Sorozatok valószínűsége

Kis jelölés:

$B_0 = 1, \quad R_0 = 1$

$\xi_m = B_m - B_{m-1} \in \{0, 1\} \qquad m \geq 1$

$1 - \xi_m = R_m - R_{m-1}$

$S_n := \sum_{m=1}^{n} \xi_m = B_n - B_0 \qquad n \geq 0$

$n - S_n = \sum_{m=1}^{n} (1 - \xi_m) = R_n - R_0$

Legyen $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$ adott sorozat.

Kiszámoljuk annak az eseménynek a valószínűségét, hogy $\xi_j = x_j$: $j = 1, \dots, n$

jelölés: $$s_n := \sum_{m=1}^{n} x_m$$

$$b_n := b_0 + s_n$$

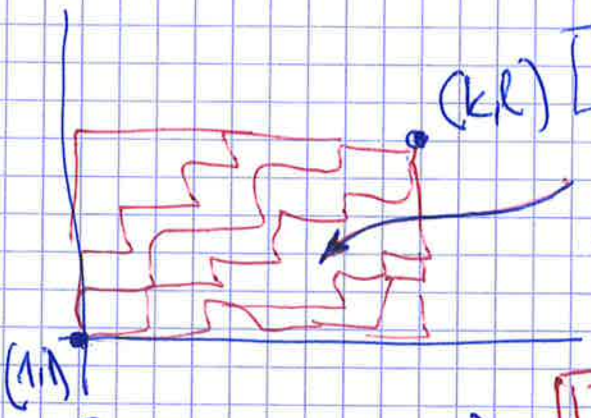
$$r_n := r_0 + (n - s_n)$$

$$\mathbb{P}\left(\xi_m = x_m \; ; \; m = 1, 2, \dots, n\right) =$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\left(b_k\right)^{x_{k+1}} \left(r_k\right)^{1-x_{k+1}}}{\left(b_k + r_k\right)} =$$

$$= \frac{(b_n-1)!\,(r_n-1)!}{(\underbrace{b_n+r_n-1}_{n+1})!} = \frac{s_n!\,(n-s_n)!}{(n+1)!}$$

* nem függ a húzott színek sorrendjétől, csak a PIROS/KÉK húzások számától



$\boxed{k+l=n+2}$

ekvivalensek a trajektóriák mind ugyanakkora a vsz-e.

$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ FELCSERÉLHETŐ valószínűségi változók

B_n egyenletes eloszlású $\{1,2,\dots,n+1\}$ halmazon

Biz

$$P(B_n=k) = \binom{n}{k-1}\frac{(k-1)!\,(n-k+1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

$X_n \sim \mathrm{UNI}\left(\left\{\frac{k}{n+2} : k = 1, \dots, n+1\right\}\right)$

Ha $X_n \longrightarrow X$ amint $n \to \infty$,

akkor $X \sim \mathrm{UNI}([0,1])$!!!

Hasonlítsuk össze a Nagy Számok Törvényével!

Érdekes!

Igaz-e, hogy $X_n \to X$ amint $n \to \infty$?

ez nehezebb

Számoljuk ki a $X_{n+1} - X_n$ növekmény

$\boxed{\text{feltételes szórásnégyzetét}}$

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1} - X_n \,\middle|\, (B_j, R_j)_{j=1}^{n}\right) = 0$$

ezt már beláttuk

$$\mathbb{E}\left(\left(X_{n+1}-X_n\right)^2 \,\middle|\, \left(B_j R_j\right)_{j=1}^{n}\right) =$$

$$\left(\frac{B_n+1}{n+3}-\frac{B_n}{n+2}\right)^2 \frac{B_n}{n+2} +$$

$$\left(\frac{B_n}{n+3}-\frac{B_n}{n+2}\right)^2 \frac{n+2-B_n}{n+2} =$$

$$(n+2)^{-3}(n+3)^{-2}$$

$$\left\{(n+2-B_n)^2 B_n + B_n^2(n+2-B_n)\right\} =$$

$$(n+2)^{-3}(n+3)^{-2}(n+2-B_n)B_n(n+2) =$$

$$(n+2)^{-2}(n+3)^{-2} B_n R_n \le (n+3)^{-2}$$

Martingál Konvergencia Tétel

lényeg: $\boxed{\text{Összegezhető!}}$

$\boxed{\text{geometriai kép}}$ Cauchy + Pythagorasz

Hamis érmék

$\Theta \sim UNI[0,1]$

egy hamis érme: $P(FEJ) = \Theta$

$P(IRÁS) = 1 - \Theta$

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ érmedobás eredményei

$\{\xi = 1\} = \text{Fej}$

$\{\xi = 0\} = \text{IRÁS}$

$$P(\xi_m = x_m \; ; \; m = 1,2,\ldots,n) = \ldots$$

$$\int_0^1 \Theta^{s_n} (1-\Theta)^{n-s_n} \, d\Theta = \ldots = \frac{s_n! \, (n-s_n)!}{(n+1)!}$$

$$\left[\int_0^1 \Theta^a (1-\Theta)^b \, d\Theta = \frac{a! \, b!}{(a+b+1)!} \right]$$ De Finetti Tétel

$a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\boxed{\text{Ugyanaz az eloszlás}}$