Csoportelméleti bevezetés

Szűcs Gábor

A Gondolkodás Öröme Alapítvány

Székesfehérvár, 2017. július 5.

Mese

Mese

Feladat

Egy mesebeli szigeten minden ember boldog. Ennek a meglepő ténynek oka a számaik. 3001 maradékosztályai a számok. Megszűnik a mohóság: tőzsdei nyereség, koldulás stb. Minden más a megszokott. Azonban van egy erős hiányérzetük, nincs osztás.

Mese

Feladat

Egy mesebeli szigeten minden ember boldog. Ennek a meglepő ténynek oka a számaik. 3001 maradékosztályai a számok. Megszűnik a mohóság: tőzsdei nyereség, koldulás stb. Minden más a megszokott. Azonban van egy erős hiányérzetük, nincs osztás.

Osztás definiálása (13-as maradékoknál)

Két lehetőség:

- $\frac{a}{b}$ legyen a $bx = a$ egyenlet megoldása
- $\frac{3}{8} := \frac{16}{8} = \frac{42}{21} = \frac{68}{34} = \frac{-10}{-5} (= 2)$

Osztás a 13-as maradékok körében

Kérdések

- Jók-e ezek a definíciók? (létezik-e, egyértelmű-e)
- Megegyezik-e a két definíció?
- Hogyan számolhatunk törtekkel? Működnek-e a megszokott számolási szabályok?
- Hozhatunk-e közös nevezőre?

Megjegyzések

- Jelölés
- Bizonyítások
- Miért 13-as maradékokkal számolunk?

Az osztás eredménye egyértelmű

Lehet-e több értéke az a/b törtnek?

$$bx_1 = bx_2 = a$$

$$\Updownarrow$$

$$b(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$3001 \mid b(x_1 - x_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$3001 \mid x_1 - x_2$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 = x_2$$

Villámkérdések

Kérdések

- $1999 + 2000 + \ldots + 3998 + 3999 = ?$
- $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2999 \cdot 3000 = ?$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3000} = ?$
- $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2999 \cdot 3000} = ?$
- $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3000^2} = ?$
- $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{2999}{3000} = ?$
- Hány különböző szám van a tagok között?

Nehezebb problémák

Kérdések

- Vannak-e olyan különböző $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{3001}$ számok, amikre $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{3001}$ csupa különböző szám?
- Vannak-e olyan különböző $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{3001}$ számok, amikre $a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, \ldots, a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_{3001}$ csupa különböző szám?
- $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2999 \cdot 3000 = ?$
- $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 5998 \cdot 6000 = ?$

Tételek

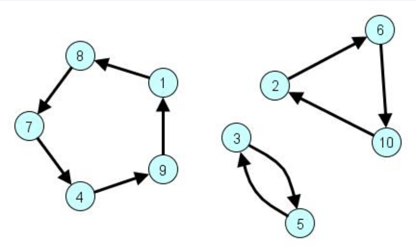
- Wilson-tétel
- Kis-Fermat-tétel

Permutációk szerkezete

Kártyakeverés

Adott egy előre rögzített kártyakeverés, ezt alkalmazva visszaáll-e – egy idő után – az eredeti sorrend?

Permutációk szerkezete



További feladatok

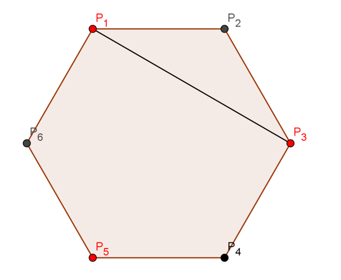
Feladatok

- Egy hat lapos kártyapaklit emelhetek, illetve megcserélhetem a felső két lapját. El tudok-e érni minden sorrendet?
- Ha az első és harmadik lapot cserélhetem?

További feladatok

Feladatok

- Egy hat lapos kártyapaklit emelhetek, illetve megcserélhetem a felső két lapját. El tudok-e érni minden sorrendet?
- Ha az első és harmadik lapot cserélhetem?

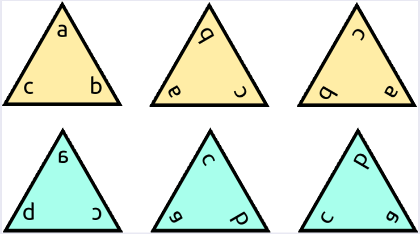


Szabályos sokszögek szimmetriái

Kérdések

Hány különböző egybevágósága van egy szabályos háromszögnek? És egy *n*-szögnek?

Szabályos háromszög egybevágóságai



Egybevágóságok kódolása

Hány egybevágóság generálja az összeset?

- Kettő elég:
  - egy 120°-os forgatás (f)
  - egy tengelyes tükrözés (t)
- Egybevágóságok: $\emptyset, f, f^2, t, tf, tf^2$

Szabályos *n*-szög esetén

- egy $\frac{360}{n}^\circ$-os forgatás (f)
- egy tengelyes tükrözés (t)
- Egybevágóságok: $\emptyset, f, f^2, \ldots, f^{n-1}, t, tf, tf^2, \ldots, tf^{n-1}$

Szűkszavú emberek országa I.

Feladatok

Egy országban két betűt használnak az emberek a-t és b-t. Ha két betűcsoport egymás mellett szerepel, akkor azt kitörölhetik.

- Hány különböző értelmű szó van?

Szűkszavú emberek országa I.

Feladatok

Egy országban két betűt használnak az emberek a-t és b-t. Ha két betűcsoport egymás mellett szerepel, akkor azt kitörölhetik.

- Hány különböző értelmű szó van?
  - $\emptyset$, a, b, ab, ba, aba, bab
- Mi a helyzet, ha ki is egészíthető egy szó?

Szűkszavú emberek országa I.

Feladatok

Egy országban két betűt használnak az emberek a-t és b-t. Ha két betűcsoport egymás mellett szerepel, akkor azt kitörölhetik.

- Hány különböző értelmű szó van?
  - $\emptyset, a, b, ab, ba, aba, bab$
- Mi a helyzet, ha ki is egészíthető egy szó?
  - $\emptyset, a, b, ab$

Szűkszavú emberek országa I.

Feladatok

Egy országban két betűt használnak az emberek a-t és b-t. Ha két betűcsoport egymás mellett szerepel, akkor azt kitörölhetik.

- Hány különböző értelmű szó van?
  - $\emptyset, a, b, ab, ba, aba, bab$
- Mi a helyzet, ha ki is egészíthető egy szó?
  - $\emptyset, a, b, ab$
  - $ab \longleftrightarrow a(abab)b = (aa)ba(bb) \longleftrightarrow ba$
- Általánosítási lehetőségek

Szűkszavú emberek országa II.

Feladat

Egy országban két betűt használnak az emberek t-t és f-et. Az alábbi nyelvtani szabályok érvényesek:

- $tt \longleftrightarrow \emptyset$
- $fff \longleftrightarrow \emptyset$
- $tf \longleftrightarrow fft$

Hány különböző értelmű szó van?

A következő szavak lehetnek különböző értelműek:

Szűkszavú emberek országa II.

Feladat

Egy országban két betűt használnak az emberek t-t és f-et. Az alábbi nyelvtani szabályok érvényesek:

- $tt \longleftrightarrow \emptyset$
- $fff \longleftrightarrow \emptyset$
- $tf \longleftrightarrow fft$

Hány különböző értelmű szó van?

A következő szavak lehetnek különböző értelműek:

$$\emptyset, f, ff, t, tf, tff$$

Miért különböznek ezek?

Csoport fogalma

Hasonlóságok

Hasonló műveleteket, műveleti szabályokat és állításokat láttunk.

- B.E.Sz., számok összeadása
- B.E.Sz., nemnulla számok szorzása
- permutációk, permutációk egymásutánja
- szabályos n-szög egybevágóságai, szorzás

Közös tulajdonságok

- Asszociatív: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Létezik egység: $\exists 1 : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
- Létezik inverz: $\exists a' : a' \cdot a = a \cdot a' = 1$

Kis-Fermat-tétel I.

Kis-Fermat-tétel

Hol és hogyan jelent ez meg?

- B.E.Sz., számok összeadása
- B.E.Sz., nemnulla számok szorzása
- permutációk, permutációk egymásutánja

Kis-Fermat-tétel véges csoportokban

Minden a-nak van olyan hatványa, amire $a^k = 1$.

Kis-Fermat-tétel II.

Kis-Fermat-tétel véges csoportokban

Minden a-nak van olyan hatványa, amire $a^k = 1$.

Bizonyítás

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = aa_1 \cdot aa_2 \cdot \ldots \cdot aa_n$$
$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = a^n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Több is kijött: $a^n = 1$, minden a-ra.

Kis-Fermat-tétel III.

Bizonyítás javítása

$$a, a^2, a^3, \dots, a^n$$

Van köztük két azonos (vagy van egység):

$$a^k = a^l$$

$$1 = \frac{1}{a^k} a^k = \frac{1}{a^k} a^l = \frac{1}{a^k} a^k a^{l-k} = a^{l-k}$$

Sőt, az is igaz, hogy $a^n = 1$, minden a-ra.

Kis-Fermat-tétel III.

Bizonyítás javítása

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^n$$

Van köztük két azonos (vagy van egység):

$$a^k = a^l$$

$$1 = \frac{1}{a^k} a^k = \frac{1}{a^k} a^l = \frac{1}{a^k} a^k a^{l-k} = a^{l-k}$$

Sőt, az is igaz, hogy $a^n = 1$, minden a-ra.

Euler-Fermat-tétel

Vizsgáljuk meg, hogy milyen az élet a boldog emberek szigetén, ha a számaik a 3000 szerinti maradékosztályok.

Köszönöm a figyelmet!

1. Boldog emberek szigete
   - Bevezetés
   - Villámkérdések
   - Kis-Fermat-tétel
2. Permutációk
   - Permutációk szerkezete
   - Szabályos sokszögek szimmetriái
3. Szűkszavú emberek országa
   - Bevezetés
   - Kapcsolat az egybevágóságokkal
4. Összegzés