Rátz László Vándorgyűlés

Véges és végtelen, diszkrét és folytonos valószínűség határán

Sztranyák Attila

Budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium

2017-07-07

1. A prezentációhoz megírt programokról

1. A prezentációhoz megírt programokról

2. Néhány bevezető feladat

3. Válasszunk véletlenszerűen...

1. A prezentációhoz megírt programokról
2. Néhány bevezető feladat
3. Válasszunk véletlenszerűen...
4. Pár szimuláció

1. A prezentációhoz megírt programokról
2. Néhány bevezető feladat
3. Válasszunk véletlenszerűen...
4. Pár szimuláció
5. Egy Putnam-feladat megoldásának nehézségei...
6. Monte Carlo

A prezentáció programjainak forrásfájlairól

- A prezentáció megtalálható a ...

A prezentáció programjainak forrásfájlairól

- A prezentáció megtalálható a …
  http://matek.berzsenyi.hu/tanarok/sztranyak/rlv-2017

A prezentáció programjainak forrásfájlairól

- A prezentáció megtalálható a ...
  http://matek.berzsenyi.hu/tanarok/sztranyak/rlv-2017
- míg a programok forrásfájlai (C++) a ...

A prezentáció programjainak forrásfájlairól

- A prezentáció megtalálható a ...
  http://matek.berzsenyi.hu/tanarok/sztranyak/rlv-2017
- míg a programok forrásfájlai (C++) a ...
  http://matek.berzsenyi.hu/tanarok/sztranyak/rlv-2017/szimulaciok

A prezentáció programjainak forrásfájlairól

- A prezentáció megtalálható a …
  http://matek.berzsenyi.hu/tanarok/sztranyak/rlv-2017
- míg a programok forrásfájlai (C++) a …
  http://matek.berzsenyi.hu/tanarok/sztranyak/rlv-2017/szimulaciok
  honlapokon

Várhatóan...

Feladat

Várhatóan hányast dobunk egy szabályos hatoldalú kockával dobva?

Várhatóan...

Feladat

Várhatóan hányast dobunk egy szabályos hatoldalú kockával dobva?

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás bevezetése*)

Várhatóan...

Feladat

Várhatóan hányast dobunk egy szabályos hatoldalú kockával dobva?

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás bevezetése*)

- $P(1) = P(2) = ... = P(6) = \dfrac{1}{6}$

Várhatóan...

Feladat

Várhatóan hányast dobunk egy szabályos hatoldalú kockával dobva?

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás bevezetése*)

- $P(1) = P(2) = ... = P(6) = \frac{1}{6} \Rightarrow$ bármi várható

Várhatóan...

Feladat

Várhatóan hányast dobunk egy szabályos hatoldalú kockával dobva?

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás bevezetése*)

- $P(1) = P(2) = ... = P(6) = \frac{1}{6} \Rightarrow$ bármi várható
- Sokszor elvégezve a kísérletet mi az átlagos kimenet? $\Rightarrow$

Várhatóan...

Feladat

Várhatóan hányast dobunk egy szabályos hatoldalú kockával dobva?

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás bevezetése*)

- $P(1) = P(2) = ... = P(6) = \frac{1}{6} \Rightarrow$ bármi várható
- Sokszor elvégezve a kísérletet mi az átlagos kimenet? $\Rightarrow$

Definíció

$$E = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + ... + p_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i$$

Várhatóan...

Feladat

Várhatóan hányast dobunk egy szabályos hatoldalú kockával dobva?

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás bevezetése*)

- $P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = \frac{1}{6} \Rightarrow$ bármi várható
- Sokszor elvégezve a kísérletet mi az átlagos kimenet? $\Rightarrow$

Definíció

$$E = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i$$

- $E = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \ldots + \frac{1}{6} \cdot 6$

Várhatóan...

Feladat

Várhatóan hányast dobunk egy szabályos hatoldalú kockával dobva?

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás bevezetése*)

- $P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = \dfrac{1}{6} \Rightarrow$ bármi várható
- Sokszor elvégezve a kísérletet mi az átlagos kimenet? $\Rightarrow$

Definíció

$$E = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i$$

- $E = \dfrac{1}{6} \cdot 1 + \dfrac{1}{6} \cdot 2 + \ldots + \dfrac{1}{6} \cdot 6 \;\; = 3,5$???

Várható érték

Feladat

Várhatóan hányast dobunk kettő/három/.../n darab szabályos hatoldalú kockával dobva?

Várható érték

Feladat

Várhatóan hányast dobunk kettő/három/.../n darab szabályos hatoldalú kockával dobva?

- A definíció alapján: $P \Rightarrow E$

Várható érték

Feladat

Várhatóan hányast dobunk kettő/három/.../n darab szabályos hatoldalú kockával dobva?

- A definíció alapján: $P \Rightarrow E$
- $E(2) = 7$,

Várható érték

Feladat

Várhatóan hányast dobunk kettő/három/.../n darab szabályos hatoldalú kockával dobva?

- A definíció alapján: $P \Rightarrow E$
- $E(2) = 7,\ \ E(3) = 10,5\ \ \dots\ \ E(n) = 3,5 \cdot n$

Várható érték

Feladat

Várhatóan hányast dobunk kettő/három/.../n darab szabályos hatoldalú kockával dobva?

- A definíció alapján: $P \Rightarrow E$
- $E(2) = 7$, $E(3) = 10,5$ ... $E(n) = 3,5 \cdot n$
- n páros: $\Rightarrow$ legvalószínűbb (középső) kimenet

Várható érték

Feladat

Várhatóan hányast dobunk kettő/három/.../n darab szabályos hatoldalú kockával dobva?

- A definíció alapján: $P \Rightarrow E$
- $E(2) = 7$, $E(3) = 10,5$ ... $E(n) = 3,5 \cdot n$
- n páros: $\Rightarrow$ legvalószínűbb (középső) kimenet
- n páratlan: $\Rightarrow$ két legvalószínűbb kimenet átlaga

Várható érték

Feladat

Várhatóan hányast dobunk kettő/három/.../n darab szabályos hatoldalú kockával dobva?

- A definíció alapján: $P \Rightarrow E$
- $E(2) = 7,\ \ E(3) = 10,5\ \ \dots\ \ E(n) = 3,5 \cdot n$
- n páros: $\Rightarrow$ legvalószínűbb (középső) kimenet
- n páratlan: $\Rightarrow$ két legvalószínűbb kimenet átlaga
- $\boxed{?}$ Ez mindig így van?

Várható érték

Feladat

Várhatóan hányast dobunk kettő/három/.../n darab szabályos hatoldalú kockával dobva?

- A definíció alapján: $P \Rightarrow E$
- $E(2) = 7,\ \ E(3) = 10,5 \ \ \ldots \ \ E(n) = 3,5 \cdot n$
- n páros: $\Rightarrow$ legvalószínűbb (középső) kimenet
- n páratlan: $\Rightarrow$ két legvalószínűbb kimenet átlaga
- $\boxed{?}$ Ez mindig így van?
- $\boxed{?}$ Mi a helyzet végtelen kimenet esetén?

Várható érték

Feladat

Mennyi a kovetkező végtelen összeg értéke?

$$S = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + ... + n \cdot \frac{1}{2^n} + ...$$

Várható érték

Feladat

Mennyi a kovetkező végtelen összeg értéke?

$$S = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + ... + n \cdot \frac{1}{2^n} + ...$$

(*8 osztály - Valószínűségszámítás bevezetése, Összegzések*)

Várható érték

Feladat

Mennyi a kovetkező végtelen összeg értéke?

$$S = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + ... + n \cdot \frac{1}{2^n} + ...$$

(*8 osztály - Valószínűségszámítás bevezetése, Összegzések*)

- Az összeg tekinthető egy várható értéknek

Várható érték

Feladat

Mennyi a kovetkező végtelen összeg értéke?

$$S = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + n \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots$$

(*8 osztály - Valószínűségszámítás bevezetése, Összegzések*)

- Az összeg tekinthető egy várható értéknek
- Dobjunk fel egy érmét az első fejig

Várható érték

Feladat

Mennyi a kovetkező végtelen összeg értéke?

$$S = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \dots + n \cdot \frac{1}{2^n} + \dots$$

(*8 osztály - Valószínűségszámítás bevezetése, Összegzések*)

- Az összeg tekinthető egy várható értéknek
- Dobjunk fel egy érmét az első fejig
- Várhatóan hányszor dobtunk közben?

Várható érték

Feladat

Mennyi a kovetkező végtelen összeg értéke?

$$S = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + ... + n \cdot \frac{1}{2^n} + ...$$

(*8 osztály - Valószínűségszámítás bevezetése, Összegzések*)

- Az összeg tekinthető egy várható értéknek
- Dobjunk fel egy érmét az első fejig
- Várhatóan hányszor dobtunk közben?
- 1000-szer elvégezve a kísérletet összesen

Várható érték

Feladat

Mennyi a kovetkező végtelen összeg értéke?

$$S = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + n \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots$$

(*8 osztály - Valószínűségszámítás bevezetése, Összegzések*)

- Az összeg tekinthető egy várható értéknek
- Dobjunk fel egy érmét az első fejig
- Várhatóan hányszor dobtunk közben?
- 1000-szer elvégezve a kísérletet összesen
- Hány fejet dobunk?

Várható érték

Feladat

Mennyi a kovetkező végtelen összeg értéke?

$$S = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + n \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots$$

(*8 osztály - Valószínűségszámítás bevezetése, Összegzések*)

- Az összeg tekinthető egy várható értéknek
- Dobjunk fel egy érmét az első fejig
- Várhatóan hányszor dobtunk közben?
- 1000-szer elvégezve a kísérletet összesen
- Hány fejet dobunk? Eközben "körülbelül" hány írást dobunk?

Várható érték

Feladat

Mennyi a kovetkező végtelen összeg értéke?

$$S = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + n \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots$$

(*8 osztály - Valószínűségszámítás bevezetése, Összegzések*)

- Az összeg tekinthető egy várható értéknek
- Dobjunk fel egy érmét az első fejig
- Várhatóan hányszor dobtunk közben?
- 1000-szer elvégezve a kísérletet összesen
- Hány fejet dobunk? Eközben "körülbelül" hány írást dobunk?
- $\boxed{?}$ $S = 2$?

Sorsoljunk

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

1.Mo.) Dobjuk fel az érmét 2-szer (3-szor,...,$n-1$-szer)!

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

1.Mo.) Dobjuk fel az érmét 2-szer (3-szor,...,$n-1$-szer)!

Fejek száma?

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

1.Mo.) Dobjuk fel az érmét 2-szer (3-szor,...,$n-1$-szer)!

Fejek száma?	0	1	2

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

1.Mo.) Dobjuk fel az érmét 2-szer (3-szor,...,$n-1$-szer)!

Fejek száma?	0	1	2
Kié a könyv?			

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

1.Mo.) Dobjuk fel az érmét 2-szer (3-szor,...,$n-1$-szer)!

Fejek száma?	0	1	2
Kié a könyv?	A	B	Z

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

1.Mo.) Dobjuk fel az érmét 2-szer (3-szor,…,$n-1$-szer)!

Fejek száma?	0	1	2
Kié a könyv?	A	B	Z

- ? Véletlenszerű?

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

1.Mo.) Dobjuk fel az érmét 2-szer (3-szor,...,$n-1$-szer)!

Fejek száma?	0	1	2
Kié a könyv?	A	B	Z

- ? Véletlenszerű? Igazságos?

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

2.Mo.) Tegyük igazságossá az előző módszert!

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

2.Mo.) Tegyük igazságossá az előző módszert!

- Sorsoljunk 3-szor (4-szer,…,n-szer)!

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

2.Mo.) Tegyük igazságossá az előző módszert!

- Sorsoljunk 3-szor (4-szer,...,n-szer)!

Hanyadik sorsolás?	1	2	3

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

2.Mo.) Tegyük igazságossá az előző módszert!

- Sorsoljunk 3-szor (4-szer,...,n-szer)!

Hanyadik sorsolás?	1	2	3
Gyerekek sorrendje			

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

2.Mo.) Tegyük igazságossá az előző módszert!

- Sorsoljunk 3-szor (4-szer,...,n-szer)!

Hanyadik sorsolás?	1	2	3
Gyerekek sorrendje	A,B,Z		

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

2.Mo.) Tegyük igazságossá az előző módszert!

- Sorsoljunk 3-szor (4-szer,...,n-szer)!

Hanyadik sorsolás?	1	2	3
Gyerekek sorrendje	A,B,Z	B,Z,A	

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

2.Mo.) Tegyük igazságossá az előző módszert!

- Sorsoljunk 3-szor (4-szer,...,n-szer)!

Hanyadik sorsolás?	1	2	3
Gyerekek sorrendje	A,B,Z	B,Z,A	Z,A,B

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

2.Mo.) Tegyük igazságossá az előző módszert!

- Sorsoljunk 3-szor (4-szer,...,n-szer)!

Hanyadik sorsolás?	1	2	3
Gyerekek sorrendje	A,B,Z	B,Z,A	Z,A,B

- Azé a könyv, aki a legtöbb sorsolást nyerte meg.

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

2.Mo.) Tegyük igazságossá az előző módszert!

- Sorsoljunk 3-szor (4-szer,...,n-szer)!

Hanyadik sorsolás?	1	2	3
Gyerekek sorrendje	A,B,Z	B,Z,A	Z,A,B

- Azé a könyv, aki a legtöbb sorsolást nyerte meg.
- Ha mindenki 1-t nyert

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

2.Mo.) Tegyük igazságossá az előző módszert!

- Sorsoljunk 3-szor (4-szer,...,n-szer)!

Hanyadik sorsolás?	1	2	3
Gyerekek sorrendje	A,B,Z	B,Z,A	Z,A,B

- Azé a könyv, aki a legtöbb sorsolást nyerte meg.
- Ha mindenki 1-t nyert $\Rightarrow$ dobjunk újra...

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

2.Mo.) Tegyük igazságossá az előző módszert!

- Sorsoljunk 3-szor (4-szer,...,n-szer)!

Hanyadik sorsolás?	1	2	3
Gyerekek sorrendje	A,B,Z	B,Z,A	Z,A,B

- Azé a könyv, aki a legtöbb sorsolást nyerte meg.
- Ha mindenki 1-t nyert $\Rightarrow$ dobjunk újra...
- $\boxed{?}$ Igazságos?

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

2.Mo.) Tegyük igazságossá az előző módszert!

- Sorsoljunk 3-szor (4-szer,...,n-szer)!

Hanyadik sorsolás?	1	2	3
Gyerekek sorrendje	A,B,Z	B,Z,A	Z,A,B

- Azé a könyv, aki a legtöbb sorsolást nyerte meg.
- Ha mindenki 1-t nyert $\Rightarrow$ dobjunk újra...
- $\boxed{?}$ Igazságos? Véges?

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

3.Mo.) Egyszerűsítsük az előző módszert!

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

3.Mo.) Egyszerűsítsük az előző módszert!

- Kétszer dobva a lehetőségek

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

3.Mo.) Egyszerűsítsük az előző módszert!

- Kétszer dobva a lehetőségek II, IF, FI, FF

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

3.Mo.) Egyszerűsítsük az előző módszert!

- Kétszer dobva a lehetőségek II, IF, FI, FF

Dobások

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

3.Mo.) Egyszerűsítsük az előző módszert!

- Kétszer dobva a lehetőségek II, IF, FI, FF

Dobások	II	IF	FI	FF

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

3.Mo.) Egyszerűsítsük az előző módszert!

- Kétszer dobva a lehetőségek II, IF, FI, FF

Dobások	II	IF	FI	FF
Kié a könyv?				

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

3.Mo.) Egyszerűsítsük az előző módszert!

- Kétszer dobva a lehetőségek II, IF, FI, FF

Dobások	II	IF	FI	FF
Kié a könyv?	A	B	Z	

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

3.Mo.) Egyszerűsítsük az előző módszert!

- Kétszer dobva a lehetőségek II, IF, FI, FF

Dobások	II	IF	FI	FF
Kié a könyv?	A	B	Z	$\boxed{?}$

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

3.Mo.) Egyszerűsítsük az előző módszert!

- Kétszer dobva a lehetőségek II, IF, FI, FF

Dobások	II	IF	FI	FF
Kié a könyv?	A	B	Z	$\boxed{?}$

- Ha nincs döntés (FF) it is dobjunk tovább...

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

3.Mo.) Egyszerűsítsük az előző módszert!

- Kétszer dobva a lehetőségek II, IF, FI, FF

Dobások	II	IF	FI	FF
Kié a könyv?	A	B	Z	?

- Ha nincs döntés (FF) it is dobjunk tovább...
- ? Még mindig nem véges?

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/Számrendszerek*)

3.Mo.) Egyszerűsítsük az előző módszert!

- Kétszer dobva a lehetőségek II, IF, FI, FF

Dobások	II	IF	FI	FF
Kié a könyv?	A	B	Z	?

- Ha nincs döntés (FF) it is dobjunk tovább...
- ? Még mindig nem véges? Egyszerűbb?

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Geometriai valószínűség*)

Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Geometriai valószínűség*)

4.Mo.) "Gurítsuk el a pénzérmét" (ábra)!

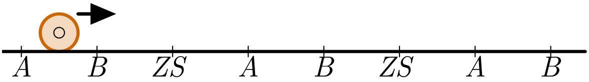
Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Geometriai valószínűség*)

4.Mo.) "Gurítsuk el a pénzérmét" (ábra)!



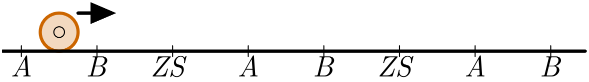
Sorsoljunk

Feladat

Adott 3 $(4, 5, ..., n)$ gyerek A(nna), B(ea), Z(solti).
Sorsoljunk ki köztük egyetlen könyvet egy érme néhányszori feldobásával!

(*7-8 osztály - Geometriai valószínűség*)

4.Mo.) "Gurítsuk el a pénzérmét" (ábra)!



- Amelyik névhez legközelebb van az érme középpontja, az a kisorsolt
- ? Mi van, ha az érme középpontja "félúton van"?
- ? Leolvasható-e pontosan a középpont helyzete?
- ? (Hujter Bálint) Tudunk-e "véletlenszerűen gurítani"?

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

b) ...a kezdő győzelmi esélye adott $0 < \frac{p}{q} (\in \mathbb{Q}) < 1$ racionális szám?

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

b) ...a kezdő győzelmi esélye adott $0 < \frac{p}{q} (\in \mathbb{Q}) < 1$ racionális szám?

c) ...a kezdő győzelmi esélye mondjuk $\frac{1}{\sqrt{2}} (\notin \mathbb{Q})$ irracionális szám?

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

b) ...a kezdő győzelmi esélye adott $0 < \frac{p}{q} (\in \mathbb{Q}) < 1$ racionális szám?

c) ...a kezdő győzelmi esélye mondjuk $\frac{1}{\sqrt{2}} (\notin \mathbb{Q})$ irracionális szám?

(*7-8 osztály - Valószínűségszámítás/valós számok bináris alakja*)

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

b) ...a kezdő győzelmi esélye adott $0 < \frac{p}{q}(\in \mathbb{Q}) < 1$ racionális szám?

Mo/*b*) Lásd előző feladat!

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

b) ...a kezdő győzelmi esélye adott $0 < \frac{p}{q} (\in \mathbb{Q}) < 1$ racionális szám?

Mo/*b*) Lásd előző feladat!

- Válasszunk q gyermeket

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

b) ...a kezdő győzelmi esélye adott $0 < \frac{p}{q} (\in \mathbb{Q}) < 1$ racionális szám?

Mo/*b*) Lásd előző feladat!

- Válasszunk q gyermeket
- sorsoljunk ki igazságosan köztük 1 könyvet

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

b) ...a kezdő győzelmi esélye adott $0 < \frac{p}{q}(\in \mathbb{Q}) < 1$ racionális szám?

Mo/*b*) Lásd előző feladat!

- Válasszunk q gyermeket
- sorsoljunk ki igazságosan köztük 1 könyvet
- kezdő nyer, ha $1, 2, ..., p$-dik gyermeké a könyv

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

b) ...a kezdő győzelmi esélye adott $0 < \frac{p}{q}(\in \mathbb{Q}) < 1$ racionális szám?

Mo/*b*) Lásd előző feladat!

- Válasszunk q gyermeket
- sorsoljunk ki igazságosan köztük 1 könyvet
- kezdő nyer, ha $1, 2, \ldots, p$-dik gyermeké a könyv
- második nyer, ha $p+1, p+2, \ldots, q$-dik gyermeké a könyv

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

b) ...a kezdő győzelmi esélye adott $0 < \frac{p}{q} (\in \mathbb{Q}) < 1$ racionális szám?

Mo/*b*) Lásd előző feladat!

- Válasszunk q gyermeket
- sorsoljunk ki igazságosan köztük 1 könyvet
- kezdő nyer, ha $1, 2, \ldots, p$-dik gyermeké a könyv
- második nyer, ha $p + 1, p + 2, \ldots, q$-dik gyermeké a könyv
- *b*) $\Rightarrow$ *a*)

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

Mo/*a*) Fölösleges még egyszer!?

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{3}$?

Mo/*a*) Fölösleges még egyszer!?

- Válasszunk 3 gyermeket, sorsoljunk ki köztük 2 dobással 1 könyvet

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

Mo/*a*) Fölösleges még egyszer!?

- Válasszunk 3 gyermeket, sorsoljunk ki köztük 2 dobással 1 könyvet
- Kezdő nyer: II, IF esetén, második nyer: FI esetén, FF: újradobás

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

Mo/*a*) Fölösleges még egyszer!?

- Válasszunk 3 gyermeket, sorsoljunk ki köztük 2 dobással 1 könyvet
- Kezdő nyer: II, IF esetén, második nyer: FI esetén, FF: újradobás

Kezdő játékos nyer

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{3}$?

Mo/*a*) Fölösleges még egyszer!?

- Válasszunk 3 gyermeket, sorsoljunk ki köztük 2 dobással 1 könyvet
- Kezdő nyer: II, IF esetén, második nyer: FI esetén, FF: újradobás

Kezdő játékos nyer	II, IF

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

Mo/*a*) Fölösleges még egyszer!?

- Válasszunk 3 gyermeket, sorsoljunk ki köztük 2 dobással 1 könyvet
- Kezdő nyer: II, IF esetén, második nyer: FI esetén, FF: újradobás

Kezdő játékos nyer | II, IF $\Rightarrow$ I...

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

Mo/*a*) Fölösleges még egyszer!?

- Válasszunk 3 gyermeket, sorsoljunk ki köztük 2 dobással 1 könyvet
- Kezdő nyer: II, IF esetén, második nyer: FI esetén, FF: újradobás

Kezdő játékos nyer	I...
Második nyer	FI

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{3}$?

Mo/*a*) Fölösleges még egyszer!?

- Válasszunk 3 gyermeket, sorsoljunk ki köztük 2 dobással 1 könyvet
- Kezdő nyer: II, IF esetén, második nyer: FI esetén, FF: újradobás

Kezdő játékos nyer	I...
Második nyer	FI...
Tovább dobunk	

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{3}$?

Mo/*a*) Fölösleges még egyszer!?

- Válasszunk 3 gyermeket, sorsoljunk ki köztük 2 dobással 1 könyvet
- Kezdő nyer: II, IF esetén, második nyer: FI esetén, FF: újradobás

Kezdő játékos nyer	I...
Második nyer	FI...
Tovább dobunk	FF

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

Mo/*a*) Fölösleges még egyszer!?

- Válasszunk 3 gyermeket, sorsoljunk ki köztük 2 dobással 1 könyvet
- Kezdő nyer: II, IF esetén, második nyer: FI esetén, FF: újradobás

Kezdő játékos nyer	I...
Második nyer	FI...
Tovább dobunk	FF

...és így tovább...

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{3}$?

Mo/*a*) Fölösleges még egyszer!?

- Válasszunk 3 gyermeket, sorsoljunk ki köztük 2 dobással 1 könyvet
- Kezdő nyer: II, IF esetén, második nyer: FI esetén, FF: újradobás

Kezdő játékos nyer	I...	FFI...	FFFFI...	FFFFFI...
Második nyer	FI...	FFFI...	FFFFFI...	FFFFFFFI...
Tovább dobunk	FF	FFFFF	FFFFFF	FFFFFFFF

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

Kezdő játékos nyer	I...	FFI...	FFFFI...	FFFFFFI...
Második nyer	FI...	FFFI...	FFFFFI...	FFFFFFFI...
Tovább dobunk	FF	FFFF	FFFFFF	FFFFFFFF

- Kezdő nyer, ha az első I

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

Kezdő játékos nyer	I...	FFI...	FFFFI...	FFFFFFI...
Második nyer	FI...	FFFI...	FFFFFI...	FFFFFFFI...
Tovább dobunk	FF	FFFF	FFFFFF	FFFFFFFF

- Kezdő nyer, ha az első I páratlanadik dobásra,

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

Kezdő játékos nyer	I...	FFI...	FFFFI...	FFFFFFI...
Második nyer	FI...	FFFI...	FFFFFI...	FFFFFFFI...
Tovább dobunk	FF	FFFF	FFFFFF	FFFFFFFF

- Kezdő nyer, ha az első I páratlanadik dobásra,
- második nyer, ha az első I párosadik dobásra következik be

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{3}$?

Kezdő játékos nyer	I...	FFI...	FFFFI...	FFFFFFI...
Második nyer	FI...	FFFI...	FFFFFI...	FFFFFFFI...
Tovább dobunk	FF	FFFF	FFFFFF	FFFFFFFF

- Kezdő nyer, ha az első I páratlanadik dobásra,
- második nyer, ha az első I párosadik dobásra következik be
- $\boxed{?}$ Nyertünk-e valami újat?

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

Kezdő játékos nyer	I...	FFI...	FFFFI...	FFFFFFI...
Második nyer	FI...	FFFI...	FFFFFI...	FFFFFFFI...
Tovább dobunk	FF	FFFF	FFFFFF	FFFFFFFF

- Kezdő nyer, ha az első I páratlanadik dobásra,
- második nyer, ha az első I párosadik dobásra következik be
- $\boxed{?}$ Nyertünk-e valami újat? *c*) megoldása közelebb van-e?

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{3}$?

- Kezdő nyertes sorozatai maradjanak, II IF

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

- Kezdő nyertes sorozatai maradjanak, II IF
- második nyertes sorozata legyen FF,

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{3}$?

- Kezdő nyertes sorozatai maradjanak, II IF
- második nyertes sorozata legyen FF, újradobás: FI esetén.

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

- Kezdő nyertes sorozatai maradjanak, II IF
- második nyertes sorozata legyen FF, újradobás: FI esetén.

Kezdő játékos nyer	I...	FII...	FIFII...	FIFIFII...
Második nyer	FF...	FIFF...	FIFIFF...	FIFIFIFF...
Tovább dobunk	FI	FIFI	FIFIFI	FIFIFIFI

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{3}$?

- Kezdő nyertes sorozatai maradjanak, II IF
- második nyertes sorozata legyen FF, újradobás: FI esetén.

Kezdő játékos nyer	I...	FII...	FIFII...	FIFIFII...
Második nyer	FF...	FIFF...	FIFIFF...	FIFIFIFF...
Tovább dobunk	FI	FIFI	FIFIFI	FIFIFIFI

- I $\rightarrow$ 0; F $\rightarrow$ 1

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

- Kezdő nyertes sorozatai maradjanak, II IF
- második nyertes sorozata legyen FF, újradobás: FI esetén.

Kezdő játékos nyer	I...	FII...	FIFII...	FIFIFII...
Második nyer	FF...	FIFF...	FIFIFF...	FIFIFIFF...
Tovább dobunk	FI	FIFI	FIFIFI	FIFIFIFI

- I $\rightarrow$ 0; F $\rightarrow$ 1
- és írjunk a "számunk" elé egy "kettedesvesszőt"

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

Kezdő játékos nyer	0,0...	0,100...	0,10100...	0,1010100...
Második nyer	0,11...	0,1011...	0,101011...	0,10101011...
Tovább dobunk	0,10	0,1010	0,101010	0,10101010

- Kezdő nyer, ha

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

Kezdő játékos nyer	0,0...	0,100...	0,10100...	0,1010100...
Második nyer	0,11...	0,1011...	0,101011...	0,10101011...
Tovább dobunk	0,10	0,1010	0,101010	0,10101010

- Kezdő nyer, ha a kidobált szám$< 0,101010..._2$

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

Kezdő játékos nyer	0,0...	0,100...	0,10100...	0,1010100...
Második nyer	0,11...	0,1011...	0,101011...	0,10101011...
Tovább dobunk	0,10	0,1010	0,101010	0,10101010

- Kezdő nyer, ha a kidobált szám$< 0,101010\ldots_2$
- Második nyer, ha

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{3}$?

Kezdő játékos nyer	0,0...	0,100...	0,10100...	0,1010100...
Második nyer	0,11...	0,1011...	0,101011...	0,10101011...
Tovább dobunk	0,10	0,1010	0,101010	0,10101010

- Kezdő nyer, ha a kidobált szám$< 0,101010..._2$
- Második nyer, ha a kidobált szám$> 0,101010..._2$

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

a) ...a játékosok győzelmi esélyei: $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$?

Kezdő játékos nyer	0,0...	0,100...	0,10100...	0,1010100...
Második nyer	0,11...	0,1011...	0,101011...	0,10101011...
Tovább dobunk	0,10	0,1010	0,101010	0,10101010

- Kezdő nyer, ha a kidobált szám$< 0,101010\ldots_2$
- Második nyer, ha a kidobált szám$> 0,101010\ldots_2$
- $0,101010\ldots_2 = \frac{2}{3}$

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

c) ...a kezdő győzelmi esélye mondjuk $\frac{1}{\sqrt{2}}(\notin \mathbb{Q})$ irracionális szám?

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

c) ...a kezdő győzelmi esélye mondjuk $\frac{1}{\sqrt{2}} (\notin \mathbb{Q})$ irracionális szám?

Mo/*c*)

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

c) ...a kezdő győzelmi esélye mondjuk $\frac{1}{\sqrt{2}} (\notin \mathbb{Q})$ irracionális szám?

Mo/*c*) Lásd előző megoldás!

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

c) ...a kezdő győzelmi esélye mondjuk $\frac{1}{\sqrt{2}} (\notin \mathbb{Q})$ irracionális szám?

Mo/*c*) Lásd előző megoldás!

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_i \ldots {}_2$

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

c) ...a kezdő győzelmi esélye mondjuk $\frac{1}{\sqrt{2}}(\notin \mathbb{Q})$ irracionális szám?

Mo/*c*) Lásd előző megoldás!

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_i \ldots_2$
- Egy 0/1 érmét addig dobálok $(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_i, \ldots)$, amíg

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

c) ...a kezdő győzelmi esélye mondjuk $\frac{1}{\sqrt{2}} (\notin \mathbb{Q})$ irracionális szám?

Mo/*c*) Lásd előző megoldás!

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_i \ldots{}_2$
- Egy 0/1 érmét addig dobálok $(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_i, \ldots)$, amíg
- $d_i \neq x_i$ be nem következik

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

c) ...a kezdő győzelmi esélye mondjuk $\frac{1}{\sqrt{2}}(\notin \mathbb{Q})$ irracionális szám?

Mo/*c*) Lásd előző megoldás!

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_i \ldots_2$
- Egy 0/1 érmét addig dobálok $(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_i, \ldots)$, amíg
- $d_i \neq x_i$ be nem következik
- kezdő nyer, ha ekkor

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

c) ...a kezdő győzelmi esélye mondjuk $\frac{1}{\sqrt{2}}(\notin \mathbb{Q})$ irracionális szám?

Mo/*c*) Lásd előző megoldás!

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_i \ldots {}_2$
- Egy 0/1 érmét addig dobálok $(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_i, \ldots)$, amíg
- $d_i \neq x_i$ be nem következik
- kezdő nyer, ha ekkor $(0 =) d_i < x_i (= 1)$,

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

c) ...a kezdő győzelmi esélye mondjuk $\frac{1}{\sqrt{2}}(\notin \mathbb{Q})$ irracionális szám?

Mo/*c*) Lásd előző megoldás!

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_i \ldots{}_2$
- Egy 0/1 érmét addig dobálok $(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_i, \ldots)$, amíg
- $d_i \neq x_i$ be nem következik
- kezdő nyer, ha ekkor $(0 =) d_i < x_i (= 1)$,
- második nyer, ha ekkor

Játékok győzelmi esélye...

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

c) ...a kezdő győzelmi esélye mondjuk $\frac{1}{\sqrt{2}}(\notin \mathbb{Q})$ irracionális szám?

Mo/*c*) Lásd előző megoldás!

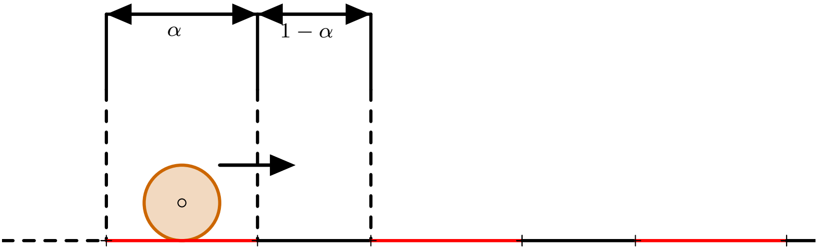
- $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_i \ldots_2$
- Egy 0/1 érmét addig dobálok $(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_i, \ldots)$, amíg
- $d_i \neq x_i$ be nem következik
- kezdő nyer, ha ekkor $(0 =) d_i < x_i (= 1)$,
- második nyer, ha ekkor $(1 =) d_i > x_i (= 0)$

Játékok győzelmi esélye geometriai módon

Feladat

Tudunk-e olyan kétszemélyes játékot definiálni, ahol egy szabályos pénzérmét kell dobálnunk, és ...

...a kezdő győzelmi esélye tetszőlges $0 < \alpha (\in \mathbb{R}) < 1$ valós szám?



Válasszunk véletlenszerűen...

Válasszunk véletlenszerűen...egy háromszöget

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Válasszunk véletlenszerűen...egy háromszöget

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

(*7-12 osztály...*

Válasszunk véletlenszerűen...egy háromszöget

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

(*7-12 osztály... bárhol...*

Válasszunk véletlenszerűen...egy háromszöget

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

(*7-12 osztály... bárhol... bármikor...*

Válasszunk véletlenszerűen...egy háromszöget

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

(*7-12 osztály... bárhol... bármikor... akár többször is...*

Válasszunk véletlenszerűen...egy háromszöget

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

(*7-12 osztály... bárhol... bármikor... akár többször is...
Valószínűségszámítás/Geo-és-koordinátageo/Integrálás/Programozás*)

Válasszunk véletlenszerűen...egy háromszöget

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

(*7-12 osztály... bárhol... bármikor... akár többször is...*
Valószínűségszámítás/Geo-és-koordinátageo/Integrálás/Programozás)

Mo)

Válasszunk véletlenszerűen...egy háromszöget

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

(*7-12 osztály... bárhol... bármikor... akár többször is... Valószínűségszámítás/Geo-és-koordinátageo/Integrálás/Programozás*)

Mo)

- Válasszunk véletlenszerűen három pontot (a háromszög csúcspontjait) a síkon...

Válasszunk véletlenszerűen...egy háromszöget

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

(*7-12 osztály... bárhol... bármikor... akár többször is...*
Valószínűségszámítás/Geo-és-koordinátageo/Integrálás/Programozás)

Mo)

- Válasszunk véletlenszerűen három pontot (a háromszög csúcspontjait) a síkon... $\boxed{?}$

Válasszunk véletlenszerűen...egy háromszöget

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

(*7-12 osztály... bárhol... bármikor... akár többször is... Valószínűségszámítás/Geo-és-koordinátageo/Integrálás/Programozás*)

Mo)

- Válasszunk véletlenszerűen három pontot (a háromszög csúcspontjait) a síkon... **?**
- **?** Hogyan választunk véletlenszerűen egyetlen pontot?

Válasszunk véletlenszerűen...egy háromszöget

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

(*7-12 osztály... bárhol... bármikor... akár többször is... Valószínűségszámítás/Geo-és-koordinátageo/Integrálás/Programozás*)

Mo)

- Válasszunk véletlenszerűen három pontot (a háromszög csúcspontjait) a síkon... ?
- ? Hogyan választunk véletlenszerűen egyetlen pontot?
- ? Hogyan választunk véletlenszerűen egyetlen valós számot?

Válasszunk véletlenszerűen...egy valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot?

Válasszunk véletlenszerűen...egy valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot?

b) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot a $[0; 1]$ intervallumból?

Válasszunk véletlenszerűen...egy valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot?

b) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot a $[0; 1]$ intervallumból?

(*8-9 osztály - Valószínűségszámítás/Valós számok alakja n-alapú számrendszerekben, 11.osztály - Határérték fogalma*)

Válasszunk véletlenszerűen...egy $[0;1]$ valós számot

Feladat

b) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot a $[0;1]$ intervallumból?

Mo1)

Válasszunk véletlenszerűen...egy $[0;1]$ valós számot

Feladat

b) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot a $[0;1]$ intervallumból?

Mo1) Rábökök a $[0;1]$ intervallum egy pontjára

Válasszunk véletlenszerűen...egy $[0;1]$ valós számot

Feladat

b) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot a $[0;1]$ intervallumból?

Mo1) Rábökök a $[0;1]$ intervallum egy pontjára

- $\boxed{?}$

Válasszunk véletlenszerűen...egy $[0;1]$ valós számot

Feladat

b) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot a $[0;1]$ intervallumból?

Mo1) Rábökök a $[0;1]$ intervallum egy pontjára

- $\boxed{?}$ A ceruza hegye nem pontszerű!?

Válasszunk véletlenszerűen...egy $[0;1]$ valós számot

Feladat

b) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot a $[0;1]$ intervallumból?

Mo1) Rábökök a $[0;1]$ intervallum egy pontjára

- $\boxed{?}$ A ceruza hegye nem pontszerű!? A szemem nem elég éles!?

Válasszunk véletlenszerűen...egy $[0;1]$ valós számot

Feladat

b) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot a $[0;1]$ intervallumból?

Mo2)

Válasszunk véletlenszerűen...egy $[0; 1]$ valós számot

Feladat

b) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot a $[0; 1]$ intervallumból?

Mo2) Lásd előző feladat irracionális nyerési esélye!

Válasszunk véletlenszerűen...egy $[0;1]$ valós számot

Feladat

b) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot a $[0;1]$ intervallumból?

Mo2) Lásd előző feladat irracionális nyerési esélye!

- Egy 0/1 érmét dobálva a dobások: $d_1, d_2, d_3, ..., d_i, ...$

Válasszunk véletlenszerűen...egy $[0;1]$ valós számot

Feladat

b) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot a $[0;1]$ intervallumból?

Mo2) Lásd előző feladat irracionális nyerési esélye!

- Egy 0/1 érmét dobálva a dobások: $d_1, d_2, d_3, ..., d_i, ...$
- A számom:$x = 0, d_1 d_2 d_3 ... d_i ..._2$

Válasszunk véletlenszerűen...egy $[0;1]$ valós számot

Feladat

b) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot a $[0;1]$ intervallumból?

Mo2) Lásd előző feladat irracionális nyerési esélye!

- Egy 0/1 érmét dobálva a dobások: $d_1, d_2, d_3, ..., d_i, ...$
- A számom:$x = 0, d_1 d_2 d_3 ... d_i ..._2$
- $\boxed{?}$ Ez nem véges!?

Válasszunk véletlenszerűen...egy $[0;1]$ valós számot

Feladat

b) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot a $[0;1]$ intervallumból?

Mo2) Lásd előző feladat irracionális nyerési esélye!

- Egy 0/1 érmét dobálva a dobások: $d_1, d_2, d_3, ..., d_i, ...$
- A számom:$x = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots d_i \ldots_2$
- $\boxed{?}$ Ez nem véges!? Igazságos!?

Válasszunk véletlenszerűen...egy $[0;1]$ valós számot

Feladat

b) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot a $[0;1]$ intervallumból?

Mo3)

Válasszunk véletlenszerűen...egy $[0;1]$ valós számot

Feladat

b) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot a $[0;1]$ intervallumból?

Mo3) Megkérjük a számítógépünket generáljon egy ilyen számot.

- $\boxed{?}$???

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot?

Mo1)

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot?

Mo1) Rábökök a valós számegyenes egy pontjára

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy valós számot?

Mo1) Rábökök a valós számegyenes egy pontjára

- $\boxed{?}$ Van-e bármi különbség a *b*) hasonló megoldásához képest?

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo2)

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo2) Szabályos 0/1 érmével

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo2) Szabályos 0/1 érmével

- Addig dobálok ($d \in \mathbb{N}^+$) amíg 0-t nem kapok

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo2) Szabályos 0/1 érmével

- Addig dobálok $(d \in \mathbb{N}^{+})$ amíg 0-t nem kapok
- Ha $d - 1 = 0 \Rightarrow [x] = 0$, ha $d - 1 = 1 \Rightarrow [x] = 1$

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo2) Szabályos $0/1$ érmével

- Addig dobálok ($d \in \mathbb{N}^{+}$) amíg 0-t nem kapok
- Ha $d - 1 = 0 \Rightarrow [x] = 0$, ha $d - 1 = 1 \Rightarrow [x] = 1$
- Különben $d - 1$-jegyű lesz x szám egészrésze binárisan, első jegye 1-es, és...

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo2) Szabályos 0/1 érmével

- Addig dobálok $(d \in \mathbb{N}^+)$ amíg 0-t nem kapok
- Ha $d-1=0 \Rightarrow [x]=0$, ha $d-1=1 \Rightarrow [x]=1$
- Különben $d-1$-jegyű lesz x szám egészrésze binárisan, első jegye 1-es, és...
- $[x]$ egészrész maradék jegyeit $d-2$ dobással meghatározzuk

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo2) Szabályos $0/1$ érmével

- Addig dobálok $(d \in \mathbb{N}^+)$ amíg 0-t nem kapok
- Ha $d - 1 = 0 \Rightarrow [x] = 0$, ha $d - 1 = 1 \Rightarrow [x] = 1$
- Különben $d - 1$-jegyű lesz x szám egészrésze binárisan, első jegye 1-es, és...
- $[x]$ egészrész maradék jegyeit $d - 2$ dobással meghatározzuk
- $\{x\}$ törtrészt megadja

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo2) Szabályos 0/1 érmével

- Addig dobálok ($d \in \mathbb{N}^+$) amíg 0-t nem kapok
- Ha $d-1=0 \Rightarrow [x]=0$, ha $d-1=1 \Rightarrow [x]=1$
- Különben $d-1$-jegyű lesz x szám egészrésze binárisan, első jegye 1-es, és...
- $[x]$ egészrész maradék jegyeit $d-2$ dobással meghatározzuk
- $\{x\}$ törtrészt megadja *b*) második megoldása

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo2) Szabályos 0/1 érmével

- Addig dobálok $(d \in \mathbb{N}^{+})$ amíg 0-t nem kapok
- Ha $d - 1 = 0 \Rightarrow [x] = 0$, ha $d - 1 = 1 \Rightarrow [x] = 1$
- Különben $d - 1$-jegyű lesz x szám egészrésze binárisan, első jegye 1-es, és...
- $[x]$ egészrész maradék jegyeit $d - 2$ dobással meghatározzuk
- $\{x\}$ törtrészt megadja *b*) második megoldása
- $x = [x] + \{x\}$

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo2) Szabályos 0/1 érmével

- Addig dobálok ($d \in \mathbb{N}^+$) amíg 0-t nem kapok
- Ha $d-1=0 \Rightarrow [x]=0$, ha $d-1=1 \Rightarrow [x]=1$
- Különben $d-1$-jegyű lesz x szám egészrésze binárisan, első jegye 1-es, és...
- $[x]$ egészrész maradék jegyeit $d-2$ dobással meghatározzuk
- $\{x\}$ törtrészt megadja *b*) második megoldása
- $x=[x]+\{x\}$
- Egy dobással meghatározom x előjelét

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo2) Szabályos 0/1 érmével

- Addig dobálok ($d \in \mathbb{N}^+$) amíg 0-t nem kapok
- Ha $d-1=0 \Rightarrow [x]=0$, ha $d-1=1 \Rightarrow [x]=1$
- Különben $d-1$-jegyű lesz x szám egészrésze binárisan, első jegye 1-es, és...
- $[x]$ egészrész maradék jegyeit $d-2$ dobással meghatározzuk
- $\{x\}$ törtrészt megadja *b*) második megoldása
- $x=[x]+\{x\}$
- Egy dobással meghatározom x előjelét
- $\boxed{?}$

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo2) Szabályos $0/1$ érmével

- Addig dobálok ($d \in \mathbb{N}^+$) amíg 0-t nem kapok
- Ha $d-1=0 \Rightarrow [x]=0$, ha $d-1=1 \Rightarrow [x]=1$
- Különben $d-1$-jegyű lesz x szám egészrésze binárisan, első jegye 1-es, és...
- $[x]$ egészrész maradék jegyeit $d-2$ dobással meghatározzuk
- $\{x\}$ törtrészt megadja *b*) második megoldása
- $x=[x]+\{x\}$
- Egy dobással meghatározom x előjelét
- $\boxed{?}$ Mekkora eséllyel kapok "kis" abszolútértékű számokat?

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo3)

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo3) Halmazok ekvivalenciájánál megszokott módszerekkel

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo3) Halmazok ekvivalenciájánál megszokott módszerekkel

- Válasszunk ki egy $a \in [0; 1]$ számot (lásd *b*) feladat)!

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo3) Halmazok ekvivalenciájánál megszokott módszerekkel

- Válasszunk ki egy $a \in [0; 1]$ számot (lásd *b*) feladat)!
- Ha $a = 0$ válasszunk újra!

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo3) Halmazok ekvivalenciájánál megszokott módszerekkel

- Válasszunk ki egy $a \in [0;1]$ számot (lásd *b*) feladat)!
- Ha $a = 0$ válasszunk újra!
- $x = \dfrac{1}{a} - 1$

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo3) Halmazok ekvivalenciájánál megszokott módszerekkel

- Válasszunk ki egy $a \in [0;1]$ számot (lásd *b*) feladat)!
- Ha $a = 0$ válasszunk újra!
- $x = \dfrac{1}{a} - 1$
- Egy 0/1 dobással meghatározzuk x előjelét

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo3) Halmazok ekvivalenciájánál megszokott módszerekkel

- Válasszunk ki egy $a \in [0;1]$ számot (lásd *b*) feladat)!
- Ha $a = 0$ válasszunk újra!
- $x = \dfrac{1}{a} - 1$
- Egy 0/1 dobással meghatározzuk x előjelét
- $\boxed{?}$

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo3) Halmazok ekvivalenciájánál megszokott módszerekkel

- Válasszunk ki egy $a \in [0;1]$ számot (lásd *b*) feladat)!
- Ha $a = 0$ válasszunk újra!
- $x = \dfrac{1}{a} - 1$
- Egy 0/1 dobással meghatározzuk x előjelét
- $\boxed{?}$ Itt mekkora az esélye $-1 < x < 1$ választásának?

Válasszunk véletlenszerűen...egy $x(\in \mathbb{R})$ valós számot

Feladat

a) Hogyan lehet kiválasztani véletlenszerűen egy x valós számot?

Mo3) Halmazok ekvivalenciájánál megszokott módszerekkel

- Válasszunk ki egy $a \in [0;1]$ számot (lásd *b*) feladat)!
- Ha $a = 0$ válasszunk újra!
- $x = \dfrac{1}{a} - 1$
- Egy 0/1 dobással meghatározzuk x előjelét
- $\boxed{?}$ Itt mekkora az esélye $-1 < x < 1$ választásának?
- "igazságos sorsolás" $\Leftrightarrow$ egyenletes eloszlás

Racionális számok sorsolásának gyakorisága

Tétel

A $[0;1]$ intervallumon egyenletes valószínűséggel választva egy számot 0 valószínűséggel lesz a választott számom racionális.

(*10-11 osztály - Határérték fogalma*)

Mo)A szám bináris $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_i \ldots_2$ alakját érmével sorsolom

DEF.) Egy szám n, k-*gyanús* $(1 \leq k \leq n)$, ha...

- Első $3n$ jegye $x = 0, x_1 \ldots x_n \boxed{x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{3n}} x_{3n+1} \ldots_2$ közül...
- $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{3n}$ jegyek k-ra ciklikusak.
- Pl.: $x = 0,100\boxed{101010}\ldots_2 \Rightarrow 3,2$-gyanús, illetve $x = 0,0000\boxed{11111111}\ldots_2 \Rightarrow 4,1$-gyanús $(4,2/4,3/4,4$-gyanús is$)$
- Ha x n, k-gyanús, akkor $n+1, n+2, \ldots, n+k$-dik jegye kiválasztható
- $n+k+1, n+k+2, \ldots, 3n$-dik jegye (összesen $2n-k$ darab) adott $\Rightarrow$
- $P(x \text{ szám } n, k - \text{gyanús}) = \dfrac{1}{2^{2n-k}}$

Racionális számok sorsolásának gyakorisága

Tétel

A $[0;1]$ intervallumon egyenletes valószínűséggel választva egy számot 0 valószínűséggel lesz a választott számom racionális.

DEF.) Egy szám adott $n \in \mathbb{N}^+$-re n-*gyanús*, ha

$\exists\, 1 \leq k \leq n$, melyre n, k-gyanús

- $P(x: \ n - \text{gyanús}) \leq \sum_{k=1}^{n} P(x: \ n, k - \text{gyanús}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2n-k}} = \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{2n-2}} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}$
- Minden racionális szám véges, vagy végtelen de szakaszos kettedestört alakú
- Minden racionális szám egy idő után gyanús lesz, és az is marad

Racionális számok sorsolásának gyakorisága

Tétel

A $[0;1]$ intervallumon egyenletes valószínűséggel választva egy számot 0 valószínűséggel lesz a választott számom racionális.

- Rögzítsünk egy tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ számot!
- $P(x \in \mathbb{Q}) < P(x:\ n-\text{gyanús}) + P(x:\ n+1-\text{gyanús}) + \ldots = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} P(x:\ k-\text{gyanús})$
- $P(x \in \mathbb{Q}) < \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{n-2}} \to 0$
- Vagyis $P(x \in \mathbb{Q}) = 0$.
- $\boxed{?}$ Számítógép véletlengenerátora: $P(x \in \mathbb{Q}) = 1$ Ez nem gond???

Racionális számok sorsolásának gyakorisága

Tétel

A $[0;1]$ intervallumon egyenletes valószínűséggel választva egy számot 0 valószínűséggel lesz a választott számom racionális.

$P(x \in \mathbb{Q}) = 0.$

? Számítógép véletlengenerátora: $P(x \in \mathbb{Q}) = 1$ Ez nem gond???

Újra: válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

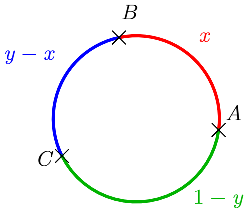
Mo1) A, B, C csúcspontokat egy egységkerületű körvonalon választjuk

Újra: válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo1) A, B, C csúcspontokat egy egységkerületű körvonalon választjuk

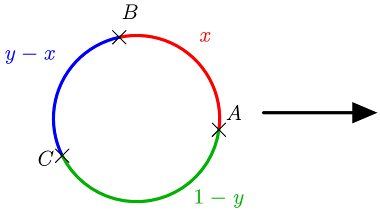


Újra: válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo1) A, B, C csúcspontokat egy egységkerületű körvonalon választjuk

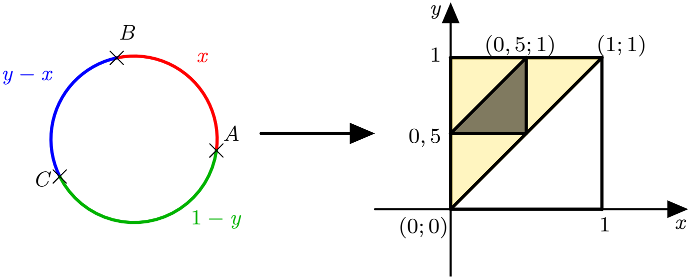


Újra: válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo1) A, B, C csúcspontokat egy egységkerületű körvonalon választjuk

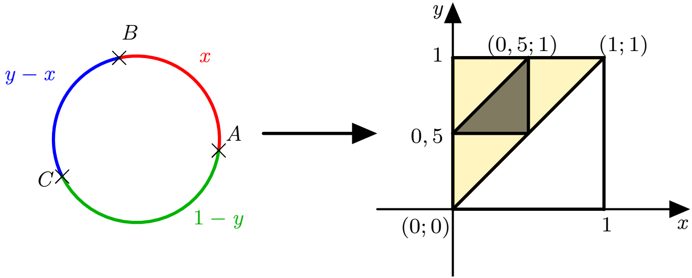


Újra: válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo1) A, B, C csúcspontokat egy egységkerületű körvonalon választjuk



$$P(\text{hegyesszögű}) = \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_{\text{összes}}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo2) α, β, γ szögek

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo2) α, β, γ szögek arányait a $[0;1]^3$-ből választjuk

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo2) α, β, γ szögek arányait a $[0;1]^3$-ből választjuk

- Hegyesszögű háromszög

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo2) α, β, γ szögek arányait a $[0;1]^3$-ből választjuk

- Hegyesszögű háromszög $\Leftrightarrow \alpha + \beta > \gamma$, $\beta + \gamma > \alpha$, $\gamma + \alpha > \beta$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

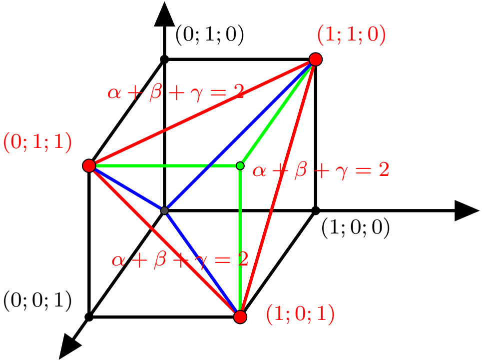
Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo2) α, β, γ szögek arányait a $[0; 1]^3$-ből választjuk

- Hegyesszögű háromszög $\Leftrightarrow \alpha + \beta > \gamma$, $\beta + \gamma > \alpha$, $\gamma + \alpha > \beta$
- α, β, γ-tengelyű koordinátarendszerben $\Rightarrow$

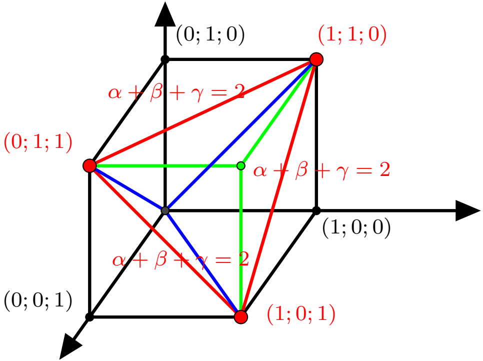
Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

$$\alpha + \beta > \gamma\,,\ \beta + \gamma > \alpha\,,\ \gamma + \alpha > \beta$$



Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

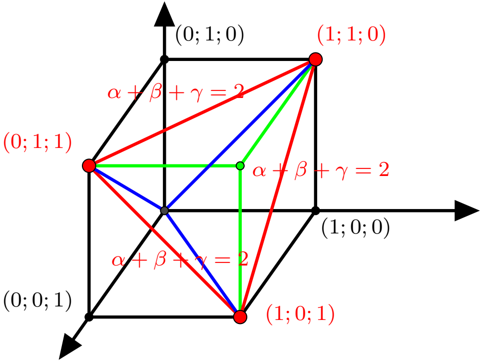
$$\alpha+\beta>\gamma\,,\ \beta+\gamma>\alpha\,,\ \gamma+\alpha>\beta$$



$P(\text{hegyesszögű}) =$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

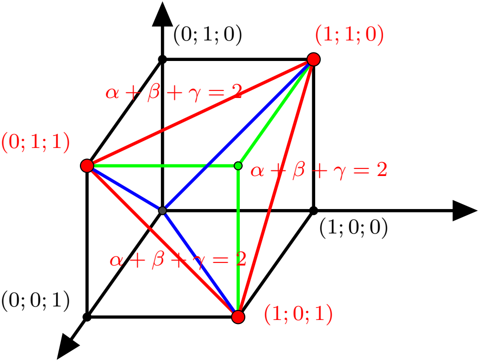
$$\alpha+\beta>\gamma\,,\ \beta+\gamma>\alpha\,,\ \gamma+\alpha>\beta$$



$$P(\text{hegyesszögű})=\frac{V_{\text{kedvező}}}{V_{\text{összes}}}=$$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

$$\alpha+\beta>\gamma\,,\ \beta+\gamma>\alpha\,,\ \gamma+\alpha>\beta$$



$$P(\text{hegyesszögű})=\frac{V_{\text{kedvező}}}{V_{\text{összes}}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo3) a, b, c oldalak

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo3) a, b, c oldalak arányait a $[0;1]^3$-ből választjuk

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo3) a, b, c oldalak arányait a $[0; 1]^3$-ből választjuk

- Van háromszög

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo3) a, b, c oldalak arányait a $[0;1]^3$-ből választjuk

- Van háromszög $\Leftrightarrow a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo3) a, b, c oldalak arányait a $[0;1]^3$-ből választjuk

- Van háromszög $\Leftrightarrow a + b > c,\ b + c > a,\ c + a > b$
- Eseménytér $=$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo3) a, b, c oldalak arányait a $[0;1]^3$-ből választjuk

- Van háromszög $\Leftrightarrow a + b > c,\ b + c > a,\ c + a > b$
- Eseménytér = Előző kísérlet kedvező kimenetelei ($V_{\text{E.Tér}} = \frac{1}{2}$)

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo3) a, b, c oldalak arányait a $[0;1]^3$-ből választjuk

- Van háromszög $\Leftrightarrow a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b$
- Eseménytér $=$ Előző kísérlet kedvező kimenetelei ($V_{\text{E.Tér}} = \dfrac{1}{2}$)
- Hegyesszögű háromszög

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo3) a, b, c oldalak arányait a $[0;1]^3$-ből választjuk

- Van háromszög $\Leftrightarrow a + b > c,\ b + c > a,\ c + a > b$
- Eseménytér $=$ Előző kísérlet kedvező kimenetelei ($V_{\text{E.Tér}} = \dfrac{1}{2}$)
- Hegyesszögű háromszög $\Leftrightarrow a^2 + b^2 > c^2,\ b^2 + c^2 > a^2,\ c^2 + a^2 > b^2$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo3) a, b, c oldalak arányait a $[0;1]^3$-ből választjuk

- Van háromszög $\Leftrightarrow a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b$
- Eseménytér = Előző kísérlet kedvező kimenetelei ($V_{\text{E.Tér}} = \frac{1}{2}$)
- Hegyesszögű háromszög $\Leftrightarrow a^2+b^2>c^2,\ b^2+c^2>a^2,\ c^2+a^2>b^2$
- $c = \sqrt{c^2} < \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt{2}\frac{a+b}{2} < a+b$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo3) a, b, c oldalak arányait a $[0;1]^3$-ből választjuk

- Van háromszög $\Leftrightarrow a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b$
- Eseménytér $=$ Előző kísérlet kedvező kimenetelei ($V_{\text{E.Tér}} = \frac{1}{2}$)
- Hegyesszögű háromszög $\Leftrightarrow a^2+b^2>c^2,\ b^2+c^2>a^2,\ c^2+a^2>b^2$
- $c = \sqrt{c^2} < \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt{2}\frac{a+b}{2} < a+b$
- $a(=x), b(=y), c(=z)$-tengelyű koordinátarendszerben $\Rightarrow$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Hegyesszög "határa" $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 + z^2 = x^2$, $z^2 + x^2 = y^2$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

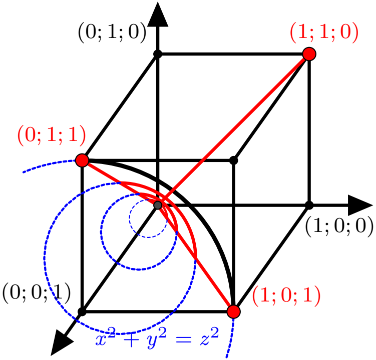
Hegyesszög "határa" $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 + z^2 = x^2$, $z^2 + x^2 = y^2$
Milyen felület?

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Hegyesszög "határa" $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 + z^2 = x^2$, $z^2 + x^2 = y^2$
Milyen felület? $\Rightarrow$ Három egymást érintő kúppalást

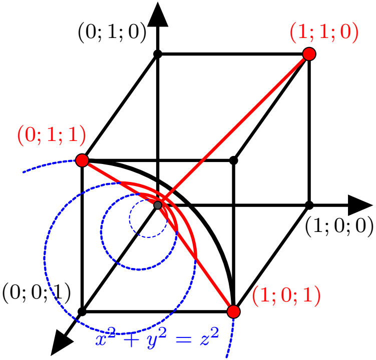
Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Hegyesszög "határa" $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 + z^2 = x^2$, $z^2 + x^2 = y^2$
Milyen felület? $\Rightarrow$ Három egymást érintő kúppalást



Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Hegyesszög "határa" $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 + z^2 = x^2$, $z^2 + x^2 = y^2$
Milyen felület? $\Rightarrow$ Három egymást érintő kúppalást



$$P(\text{hegyesszögű}) = \frac{V_{\text{kedvező}}}{V_{\text{összes}}} = \frac{1 - 3 \cdot \frac{\pi}{12}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{\pi}{2} \approx \boxed{0,4292}$$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo4) $a \leq b \leq c$ oldalak közül $c = 1$; a, b-t válasszuk véletlenszerűen

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo4) $a \leq b \leq c$ oldalak közül $c = 1$; a, b-t válasszuk véletlenszerűen

- Háromszög van, ha $\Rightarrow$ $a + b > 1$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo4) $a \leq b \leq c$ oldalak közül $c = 1$; a, b-t válasszuk véletlenszerűen

- Háromszög van, ha $\Rightarrow$ $a + b > 1$
- ez hegyesszögű, ha $\Rightarrow$ $a^2 + b^2 > 1$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo4) $a \leq b \leq c$ oldalak közül $c = 1$; a, b-t válasszuk véletlenszerűen

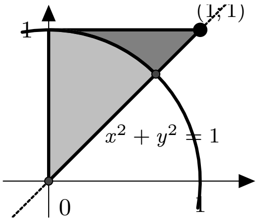
- Háromszög van, ha $\Rightarrow$ $a + b > 1$
- ez hegyesszögű, ha $\Rightarrow$ $a^2 + b^2 > 1$
- $a = x; c = y$ $\Rightarrow$ koordinátarendszerben: $0 < x \leq y \leq 1; \quad 1 < x^2 + y^2$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

$a = x; c = y \Rightarrow$ koordinátarendszerben: $0 < x \leq y \leq 1; \quad 1 < x^2 + y^2$

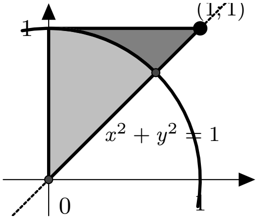
Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

$a = x; c = y \Rightarrow$ koordinátarendszerben: $0 < x \leq y \leq 1; \quad 1 < x^2 + y^2$



Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

$a = x; c = y \;\Rightarrow$ koordinátarendszerben: $0 < x \le y \le 1; \quad 1 < x^2 + y^2$



$$P(\text{hegyesszögű}) = \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_{\text{összes}}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx \boxed{0,2146}$$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo5) $a \leq b \leq c$ oldalak közül $b = 1$; a, c-t válasszuk véletlenszerűen

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo5) $a \leq b \leq c$ oldalak közül $b = 1$; a, c-t válasszuk véletlenszerűen

- Háromszög van, ha $\Rightarrow$ $a + 1 > c$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo5) $a \leq b \leq c$ oldalak közül $b = 1$; a, c-t válasszuk véletlenszerűen

- Háromszög van, ha $\Rightarrow$ $a + 1 > c$
- ez hegyesszögű, ha $\Rightarrow$ $a^2 + 1 > c^2$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo5) $a \leq b \leq c$ oldalak közül $b = 1$; a, c-t válasszuk véletlenszerűen

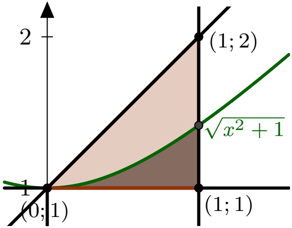
- Háromszög van, ha $\Rightarrow$ $a + 1 > c$
- ez hegyesszögű, ha $\Rightarrow$ $a^2 + 1 > c^2$
- $a = x; c = y$ $\Rightarrow$ koordinátarendszerben:
  $0 < x < 1; \quad 1 < y < x + 1; \quad y^2 < x^2 + 1 \leftrightarrow y < \sqrt{x^2 + 1}$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

$$0 < x < 1; \quad 1 < y < x + 1; \quad y^2 < x^2 + 1 \leftrightarrow y < \sqrt{x^2 + 1}$$

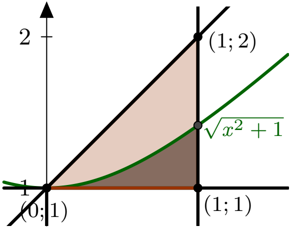
Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

$$0 < x < 1; \quad 1 < y < x + 1; \quad y^2 < x^2 + 1 \leftrightarrow y < \sqrt{x^2 + 1}$$



Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

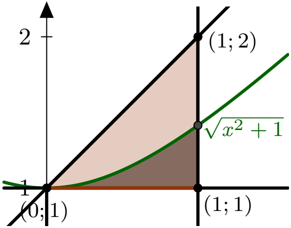
$$0 < x < 1; \quad 1 < y < x + 1; \quad y^2 < x^2 + 1 \leftrightarrow y < \sqrt{x^2 + 1}$$



$P(\text{hegyesszögű}) =$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

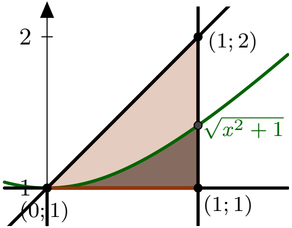
$$0 < x < 1; \quad 1 < y < x + 1; \quad y^2 < x^2 + 1 \leftrightarrow y < \sqrt{x^2 + 1}$$



$$P(\text{hegyesszögű}) = \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_{\text{összes}}} =$$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

$$0 < x < 1; \quad 1 < y < x+1; \quad y^2 < x^2 + 1 \leftrightarrow y < \sqrt{x^2+1}$$



$$P(\text{hegyesszögű}) = \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_{\text{összes}}} =$$

$$\frac{\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{dx} - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\right]_0^1 - 1}{\frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} - 1\right) - 2 \approx \boxed{0,2956}$$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo6) Válasszunk véletlenszerűen három pontot (a háromszög csúcspontjait) a sík

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo6) Válasszunk véletlenszerűen három pontot (a háromszög csúcspontjait) a sík egy R korlátos részén.

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo6) Válasszunk véletlenszerűen három pontot (a háromszög csúcspontjait) a sík egy R korlátos részén.

- R szabályos háromszög $\Rightarrow P(\text{háromszögben}) =?$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo6) Válasszunk véletlenszerűen három pontot (a háromszög csúcspontjait) a sík egy R korlátos részén.

- R szabályos háromszög $\Rightarrow P(\text{háromszögben}) =?$
- R négyzet $\Rightarrow P(\text{négyzetben}) =?$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo6) Válasszunk véletlenszerűen három pontot (a háromszög csúcspontjait) a sík egy R korlátos részén.

- R szabályos háromszög $\Rightarrow P(\text{háromszögben}) = ?$
- R négyzet $\Rightarrow P(\text{négyzetben}) = ?$
- R kör $\Rightarrow P(\text{körben}) = ?$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo6) Válasszunk véletlenszerűen három pontot (a háromszög csúcspontjait) a sík egy R korlátos részén.

- R szabályos háromszög $\Rightarrow P(\text{háromszögben}) =?$
- R négyzet $\Rightarrow P(\text{négyzetben}) =?$
- R kör $\Rightarrow P(\text{körben}) =?$
- R $\sqrt{2}:1$ oldalarányú téglalap $\Rightarrow P(\text{füzetben}) =?$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo6) Válasszunk véletlenszerűen három pontot (a háromszög csúcspontjait) a sík egy R korlátos részén.

- R szabályos háromszög $\Rightarrow P(\text{háromszögben}) =?$
- R négyzet $\Rightarrow P(\text{négyzetben}) =?$
- R kör $\Rightarrow P(\text{körben}) =?$
- R $\sqrt{2}:1$ oldalarányú téglalap $\Rightarrow P(\text{füzetben}) =?$
- Hasonló alakzatoknál azonos arány

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo6) Válasszunk véletlenszerűen három pontot (a háromszög csúcspontjait) a sík egy R korlátos részén.

- R szabályos háromszög $\Rightarrow P(\text{háromszögben}) = ?$
- R négyzet $\Rightarrow P(\text{négyzetben}) = ?$
- R kör $\Rightarrow P(\text{körben}) = ?$
- R $\sqrt{2} : 1$ oldalarányú téglalap $\Rightarrow P(\text{füzetben}) = ?$
- Hasonló alakzatoknál azonos arány $\Rightarrow$ elég $[0;1]^2$-n dolgozni

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo6) Válasszunk véletlenszerűen három pontot (a háromszög csúcspontjait) a sík egy R korlátos részén.

- R szabályos háromszög $\Rightarrow P(\text{háromszögben}) = ?$
- R négyzet $\Rightarrow P(\text{négyzetben}) = ?$
- R kör $\Rightarrow P(\text{körben}) = ?$
- R $\sqrt{2} : 1$ oldalarányú téglalap $\Rightarrow P(\text{füzetben}) = ?$
- Hasonló alakzatoknál azonos arány $\Rightarrow$ elég $[0;1]^2$-n dolgozni
- Hat egymástól független koordináta + feltételek

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

Mo6) Válasszunk véletlenszerűen három pontot (a háromszög csúcspontjait) a sík egy R korlátos részén.

- R szabályos háromszög $\Rightarrow P(\text{háromszögben}) = ?$
- R négyzet $\Rightarrow P(\text{négyzetben}) = ?$
- R kör $\Rightarrow P(\text{körben}) = ?$
- R $\sqrt{2}:1$ oldalarányú téglalap $\Rightarrow P(\text{füzetben}) = ?$
- Hasonló alakzatoknál azonos arány $\Rightarrow$ elég $[0;1]^2$-n dolgozni
- Hat egymástól független koordináta + feltételek $\Rightarrow$ nehéznek tűnik

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...

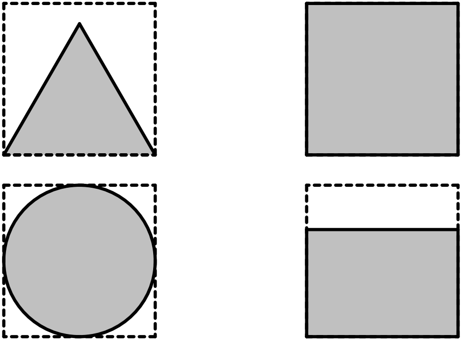
Feladat

Válasszunk véletlenszerűen egy háromszöget a síkon.
Mekkora az esélye, hogy a kiválasztott háromszög hegyesszögű?

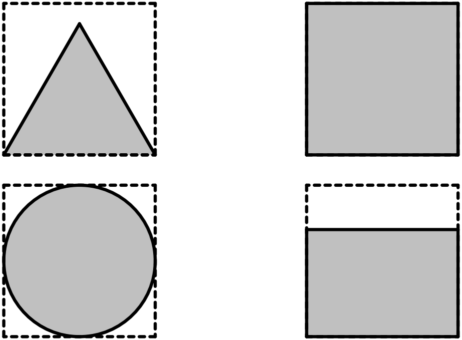
Mo6) Válasszunk véletlenszerűen három pontot (a háromszög csúcspontjait) a sík egy R korlátos részén.

- R szabályos háromszög $\Rightarrow P(\text{háromszögben}) = ?$
- R négyzet $\Rightarrow P(\text{négyzetben}) = ?$
- R kör $\Rightarrow P(\text{körben}) = ?$
- R $\sqrt{2}:1$ oldalarányú téglalap $\Rightarrow P(\text{füzetben}) = ?$
- Hasonló alakzatoknál azonos arány $\Rightarrow$ elég $[0;1]^2$-n dolgozni
- Hat egymástól független koordináta + feltételek $\Rightarrow$ nehéznek tűnik
- $\boxed{?}$ Szimuláció számítógéppel?

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...szimulációval

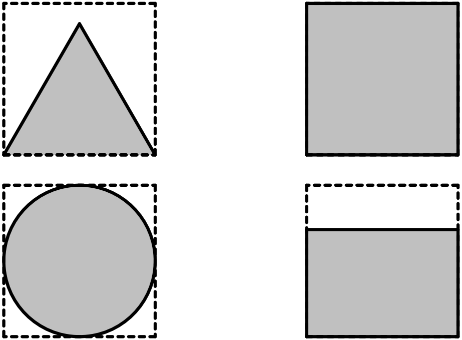


Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...szimulációval



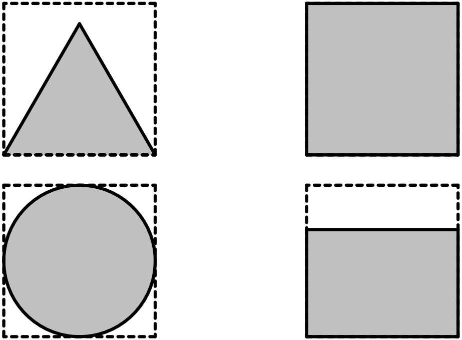
- 1 millió $(10 \cdot 100.000$ db$)$ kísérlet alapján

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...szimulációval



- 1 millió $(10 \cdot 100.000$ db) kísérlet alapján
- Hegyesszögű háromszög esélye

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...szimulációval



- 1 millió $(10 \cdot 100.000$ db) kísérlet alapján
- Hegyesszögű háromszög esélye
- 100.000 kísérletnél az esélyek minimuma/maximuma/szórása

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...szimulációval

- 1 millió ($10 \cdot 100.000$ db) kísérlet alapján
- Hegyesszögű háromszög esélye
- 100.000 kísérletnél az esélyek minimuma/maximuma/szórása

Alakzat $\rightarrow$	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$	A4
Átlag	$25,1282\%$	$27,3961\%$	$28,0604\%$	$25,4407\%$
Min.	$24,992\%$	$27,230\%$	$27,833\%$	$25,186\%$
Max.	$25,308\%$	$27,550\%$	$28,371\%$	$25,588\%$
Szórás	$0,00132$	$0,00116$	$0,00151$	$0,00118$

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...szimulációval

- $\boxed{?}$ Mennyire pontos a módszer?

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...szimulációval

- $\boxed{?}$ Mennyire pontos a módszer?
- Két korábbi megoldás ($\alpha : \beta : \gamma$ szögek illetve $a : b : c$ oldalak arányait a $[0;1]^3$-ből véve...) precíz, illetve szimulált valószínűsége

Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...szimulációval

- $\boxed{?}$ Mennyire pontos a módszer?
- Két korábbi megoldás ($\alpha : \beta : \gamma$ szögek illetve $a : b : c$ oldalak arányait a $[0; 1]^3$-ből véve...) precíz, illetve szimulált valószínűsége
- 1.000.000 kísérlet alapján $\Rightarrow$

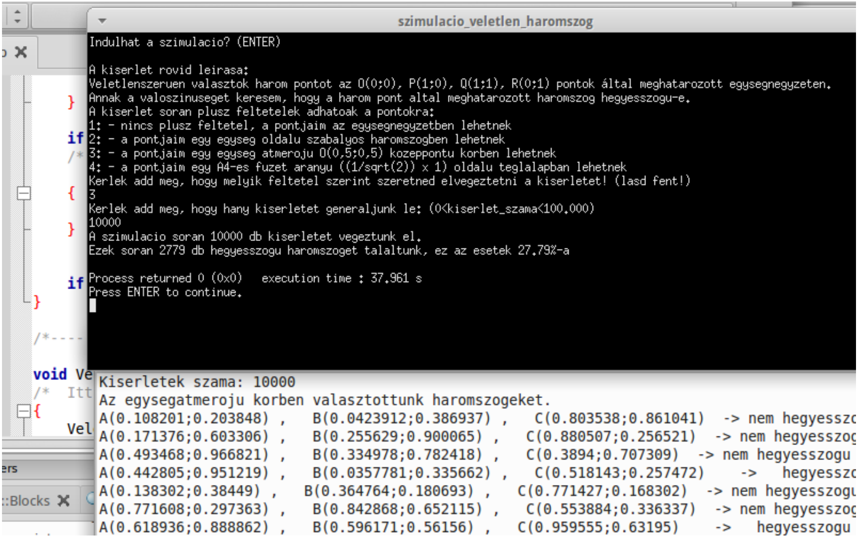
Válasszunk véletlenszerűen háromszöget...szimulációval

- $\boxed{?}$ Mennyire pontos a módszer?
- Két korábbi megoldás ($\alpha : \beta : \gamma$ szögek illetve $a : b : c$ oldalak arányait a $[0;1]^3$-ből véve...) precíz, illetve szimulált valószínűsége
- 1.000.000 kísérlet alapján $\Rightarrow$

Kísérlet	$\alpha : \beta : \gamma \in [0;1]^3$	$a : b : c \in [0;1]^3$
Valódi v.sz.	$\frac{1}{2} = 0,5$	$2 - \frac{\pi}{2} \approx 0,429204$
Szimulát v.sz.	$0,500406$	$0,429132$

- C++ forráskódok, .txt-ben az eredmények (10.000 kísérletre)
- http://matek.berzsenyi.hu/tanarok/sztranyak/rlv-2017

A szimulációs pogram kódja, futása, eredménye



W.L.Putnam verseny 1958-dik év 3-dik feladat

W.L.Putnam verseny 1958-dik év 3-dik feladat

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \dots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?
(*Például* $a_1 + a_2 + \dots + a_{11} < 1 \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{11} + a_{12}$ *esetén* 12 *számot sorsoltunk ki.*)

W.L.Putnam verseny 1958-dik év 3-dik feladat

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0; 1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?
(*Például* $a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} < 1 \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} + a_{12}$ *esetén* 12 *számot sorsoltunk ki.*)

És eredeti nyelven is:
A sequence of numbers $a_i \in [0; 1]$ is chosen at random.

Show that the expected value of n, where $\sum_{i}^{n} a_i > 1$ and $\sum_{i}^{n-1} a_i \leq 1$ is ...!

W.L.Putnam verseny 1958-dik év 3-dik feladat

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?
(*Például* $a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} < 1 \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} + a_{12}$ *esetén* 12 *számot sorsoltunk ki.*)

És eredeti nyelven is:
A sequence of numbers $a_i \in [0;1]$ is chosen at random.

Show that the expected value of n, where $\sum_i^n a_i > 1$ and $\sum_i^{n-1} a_i \leq 1$ is ...!

(*11 osztály - Deriválás(Taylor-sorok),Térfogat bevezetése*)

...de először egy másik feladat

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, ..., a_n$ számokat egészen addig, amíg az $a_1, a_2, ..., a_n$ számok szigorúan monoton növő sorozatot képeznek.
Várhatóan hány darab számot sorsoltunk ki?
(*Ha például a sorsolt számok:*$a_1 = 0,27; a_2 = \frac{1}{3}; a_3 = \frac{5}{7}; a_4 = 0,47$ *, akkor* $a_1 < a_2 < a_3 > a_4$ *miatt három hosszú növekvő sorozatot sorsoltunk ki.*)

...de először egy másik feladat

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, ..., a_n$ számokat egészen addig, amíg az $a_1, a_2, ..., a_n$ számok szigorúan monoton növő sorozatot képeznek.
Várhatóan hány darab számot sorsoltunk ki?
(*Ha például a sorsolt számok:*$a_1 = 0,27; a_2 = \frac{1}{3}; a_3 = \frac{5}{7}; a_4 = 0,47$, *akkor* $a_1 < a_2 < a_3 > a_4$ *miatt három hosszú növekvő sorozatot sorsoltunk ki.*)

(*11 osztály - Deriválás(Taylor-sorok),Térfogat bevezetése*)

...de először egy másik feladat

Feladat

Várhatóan hány darab számot $a_1 < a_2 < \ldots < a_n (\geq a_{n+1}) \quad (a_i \in [0;1])$ sorsolunk ki?

Mo)

...de először egy másik feladat

Feladat

Várhatóan hány darab számot $a_1 < a_2 < \ldots < a_n (\geq a_{n+1}) \quad (a_i \in [0;1])$ sorsolunk ki?

Mo) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ különböző véletlen számok esetén

...de először egy másik feladat

Feladat

Várhatóan hány darab számot $a_1 < a_2 < \ldots < a_n (\geq a_{n+1}) \quad (a_i \in [0; 1])$ sorsolunk ki?

Mo) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ különböző véletlen számok esetén

- $n!$ lehetséges sorrend,

...de először egy másik feladat

Feladat

Várhatóan hány darab számot $a_1 < a_2 < \ldots < a_n (\geq a_{n+1}) \quad (a_i \in [0;1])$ sorsolunk ki?

Mo) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ különböző véletlen számok esetén

- $n!$ lehetséges sorrend, ezek közül pontosan 1 jó (növekvő a sorozat)

...de először egy másik feladat

Feladat

Várhatóan hány darab számot $a_1 < a_2 < \ldots < a_n (\geq a_{n+1}) \quad (a_i \in [0;1])$ sorsolunk ki?

Mo) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ különböző véletlen számok esetén

- $n!$ lehetséges sorrend, ezek közül pontosan 1 jó (növekvő a sorozat)
- X_i (esemény): a kisorsolt számok ξ darabszáma **legalább** $i \Rightarrow$

...de először egy másik feladat

Feladat

Várhatóan hány darab számot $a_1 < a_2 < \ldots < a_n (\geq a_{n+1}) \quad (a_i \in [0; 1])$ sorsolunk ki?

Mo) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ különböző véletlen számok esetén

- $n!$ lehetséges sorrend, ezek közül pontosan 1 jó (növekvő a sorozat)
- X_i (esemény): a kisorsolt számok ξ darabszáma **legalább** $i \Rightarrow$
- $P(\xi \geq i) = P(X_i) = \dfrac{1}{i!}$

...de először egy másik feladat

Feladat

Várhatóan hány darab számot $a_1 < a_2 < ... < a_n (\geq a_{n+1}) \quad (a_i \in [0; 1])$ sorsolunk ki?

Mo) $a_1, a_2, ..., a_n$ különböző véletlen számok esetén

- $n!$ lehetséges sorrend, ezek közül pontosan 1 jó (növekvő a sorozat)
- X_i (esemény): a kisorsolt számok ξ darabszáma **legalább** $i \Rightarrow$
- $P(\xi \geq i) = P(X_i) = \dfrac{1}{i!}$
- Y_i (esemény): a kisorsolt számok ξ darabszáma **pontosan** $i \Rightarrow$

...de először egy másik feladat

Feladat

Várhatóan hány darab számot $a_1 < a_2 < \ldots < a_n (\geq a_{n+1}) \quad (a_i \in [0;1])$ sorsolunk ki?

Mo) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ különböző véletlen számok esetén

- $n!$ lehetséges sorrend, ezek közül pontosan 1 jó (növekvő a sorozat)
- X_i (esemény): a kisorsolt számok ξ darabszáma **legalább** $i \Rightarrow$
- $P(\xi \geq i) = P(X_i) = \dfrac{1}{i!}$
- Y_i (esemény): a kisorsolt számok ξ darabszáma **pontosan** $i \Rightarrow$
- $P(\xi = i) = P(Y_i) = P(\xi \geq i) - P(\xi \geq (i+1)) = \dfrac{1}{i!} - \dfrac{1}{(i+1)!}$

...de először egy másik feladat

Feladat

Várhatóan hány darab számot $a_1 < a_2 < \ldots < a_n (\geq a_{n+1}) \quad (a_i \in [0;1])$ sorsolunk ki?

Mo) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ különböző véletlen számok esetén

- $n!$ lehetséges sorrend, ezek közül pontosan 1 jó (növekvő a sorozat)
- X_i (esemény): a kisorsolt számok ξ darabszáma **legalább** $i \Rightarrow$
- $P(\xi \geq i) = P(X_i) = \dfrac{1}{i!}$
- Y_i (esemény): a kisorsolt számok ξ darabszáma **pontosan** $i \Rightarrow$
- $P(\xi = i) = P(Y_i) = P(\xi \geq i) - P(\xi \geq (i+1)) = \dfrac{1}{i!} - \dfrac{1}{(i+1)!}$
- Innen a várható érték $\Rightarrow E = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} P(Y_i) \cdot i$

...de először egy másik feladat

Feladat

Várhatóan hány darab számot $a_1 < a_2 < ... < a_n (\geq a_{n+1}) \quad (a_i \in [0;1])$ sorsolunk ki?

$$E = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_i) \cdot i$$

...de először egy másik feladat

Feladat

Várhatóan hány darab számot $a_1 < a_2 < \ldots < a_n (\geq a_{n+1}) \quad (a_i \in [0;1])$ sorsolunk ki?

$$E = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_i) \cdot i$$

$$E = 1 \cdot \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + \ldots$$

...de először egy másik feladat

Feladat

Várhatóan hány darab számot $a_1 < a_2 < ... < a_n (\geq a_{n+1}) \quad (a_i \in [0;1])$ sorsolunk ki?

$$E = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_i) \cdot i$$

$$E = 1 \cdot \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + ...$$

$$E = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot (-1 + 2) + \frac{1}{3!} \cdot (-2 + 3) + ... + \frac{1}{i!} (-(i-1) + i) + ...$$

...de először egy másik feladat

Feladat

Várhatóan hány darab számot $a_1 < a_2 < \ldots < a_n (\geq a_{n+1}) \quad (a_i \in [0;1])$ sorsolunk ki?

$$E = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_i) \cdot i$$

$$E = 1 \cdot \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + \ldots$$

$$E = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot (-1+2) + \frac{1}{3!} \cdot (-2+3) + \ldots + \frac{1}{i!}\left(-(i-1)+i\right) + \ldots$$

$$E = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{i!} + \ldots = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i!} =$$

...de először egy másik feladat

Feladat

Várhatóan hány darab számot $a_1 < a_2 < \ldots < a_n (\geq a_{n+1}) \quad (a_i \in [0;1])$ sorsolunk ki?

$$E = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_i) \cdot i$$

$$E = 1 \cdot \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + \ldots$$

$$E = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot (-1+2) + \frac{1}{3!} \cdot (-2+3) + \ldots + \frac{1}{i!}(-(i-1)+i) + \ldots$$

$$E = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{i!} + \ldots = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i!} = \boxed{e - 1 \approx 1,718281\ldots}$$

Vissza a Putnam verseny 1958/3 feladathoz

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo1) Hasonlóan az előzőhöz sorsoljunk $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \in [0;1]$ számokat

Vissza a Putnam verseny 1958/3 feladathoz

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \dots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo1) Hasonlóan az előzőhöz sorsoljunk $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \in [0;1]$ számokat

- X_i (esemény): **legalább** i számot kell sorsolni, vagyis az első $i-1$ szám összege $< 1 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{i-1} a_k < 1$

Vissza a Putnam verseny 1958/3 feladathoz

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo1) Hasonlóan az előzőhöz sorsoljunk $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \in [0;1]$ számokat

- X_i (esemény): **legalább** i számot kell sorsolni, vagyis az első $i-1$ szám összege $< 1 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{i-1} a_k < 1$
- Y_i (esemény): **pontosan** i szám kell $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{i-1} a_k < 1 \leq \sum\limits_{k=1}^{i} a_k$

Vissza a Putnam verseny 1958/3 feladathoz

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0; 1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo1) Hasonlóan az előzőhöz sorsoljunk $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \in [0; 1]$ számokat

- X_i (esemény): **legalább** i számot kell sorsolni, vagyis az első $i-1$ szám összege $< 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{i-1} a_k < 1$
- Y_i (esemény): **pontosan** i szám kell $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{i-1} a_k < 1 \leq \sum_{k=1}^{i} a_k$
- $P(Y_i) = P(X_i) - P(X_{i+1})$, most is elég $P(X_i)$-t tudni

Vissza a Putnam verseny 1958/3 feladathoz

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \dots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

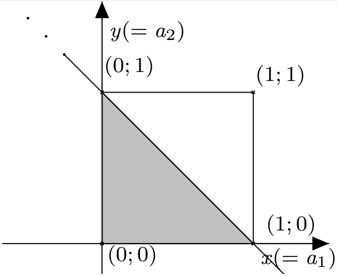
Mo1) Hasonlóan az előzőhöz sorsoljunk $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \in [0;1]$ számokat

- X_i (esemény): **legalább** i számot kell sorsolni, vagyis az első $i-1$ szám összege $< 1 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{i-1} a_k < 1$
- Y_i (esemény): **pontosan** i szám kell $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{i-1} a_k < 1 \leq \sum\limits_{k=1}^{i} a_k$
- $P(Y_i) = P(X_i) - P(X_{i+1})$, most is elég $P(X_i)$-t tudni
- $P(X_2) = 1$, a többi X_i-hez használjunk geometriai valószínűséget

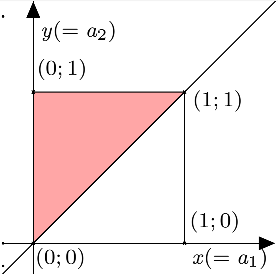
Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \dots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?



bal ábra: jelenlegi

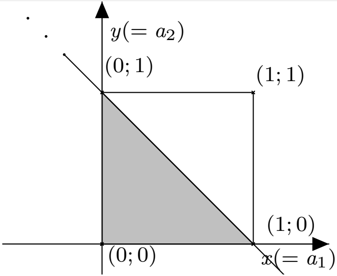


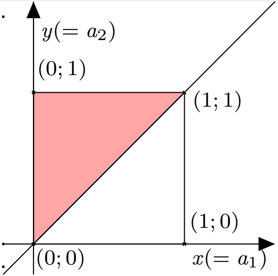
jobb ábra: előző feladat

Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?





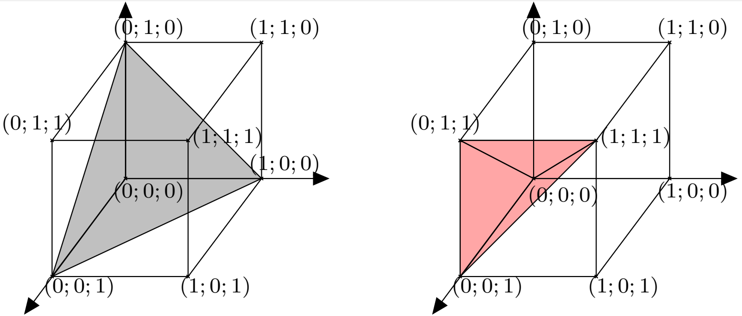
bal ábra: jelenlegi — jobb ábra: előző feladat

$$P(X_3) = \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_{\text{összes}}} = \frac{1}{2} = P(X_2') \left(= P(X_2)_{\text{előző}}\right)$$

Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

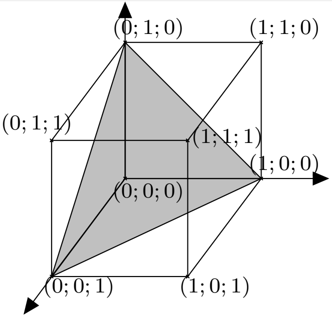
Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

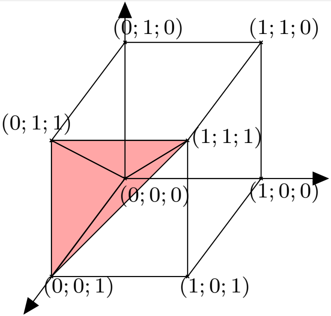


Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?





$$P(X_4) = \frac{V_{\text{kedvező}}}{V_{\text{összes}}} = \frac{1}{6} = P(X_3')$$

Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

- $P(X_{n+1})$-hez tartozó geometriai alakzat $\Rightarrow$

Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

- $P(X_{n+1})$-hez tartozó geometriai alakzat $\Rightarrow$
- $(1;0;0;\ldots;0), (0;1;0;\ldots;0), \ldots, (0;0;0;\ldots;0;1)$ egységvektorok által meghatározott n-D-s "háromszög"

Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

- $P(X_{n+1})$-hez tartozó geometriai alakzat $\Rightarrow$
- $(1;0;0;\ldots;0), (0;1;0;\ldots;0), \ldots, (0;0;0;\ldots;0;1)$ egységvektorok által meghatározott n-D-s "háromszög"
- Tipp: $P(X_5) = P(X_4') = \dfrac{1}{4!}$

Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

- $P(X_{n+1})$-hez tartozó geometriai alakzat $\Rightarrow$
- $(1;0;0;\ldots;0), (0;1;0;\ldots;0), \ldots, (0;0;0;\ldots;0;1)$ egységvektorok által meghatározott n-D-s "háromszög"
- Tipp: $P(X_5) = P(X'_4) = \dfrac{1}{4!}$
- 2D-ben egybevágó ábrák, 3D-ben már nem...4D-ben???

Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

- $P(X_{n+1})$-hez tartozó geometriai alakzat $\Rightarrow$
- $(1;0;0;\ldots;0), (0;1;0;\ldots;0), \ldots, (0;0;0;\ldots;0;1)$ egységvektorok által meghatározott n-D-s "háromszög"
- Tipp: $P(X_5) = P(X_4') = \dfrac{1}{4!}$
- 2D-ben egybevágó ábrák, 3D-ben már nem...4D-ben???
- $\boxed{?}$ Cavalieri-elv magasabb dimenzióban?

Kis kitérő...

Feladat

Két $x, y \in [0; 1]$ egyenletes eloszlással véletlenül választott számra az $\{x + y\}$ értéke egyenletes eloszlású véletlenszám a $[0; 1]$-n.

Kis kitérő...

Feladat

Két $x, y \in [0;1]$ egyenletes eloszlással véletlenül választott számra az $\{x+y\}$ értéke egyenletes eloszlású véletlenszám a $[0;1]$-n.

(*Igazi cél: Ha ez igaz, akkor (indukcióval) $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0;1]$ egyenletes eloszlású véletlenszámra az $\{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$ értéke is egyenletes eloszlású véletlenszám a $[0;1]$-n.*)

Kis kitérő...

Feladat

Két $x, y \in [0;1]$ egyenletes eloszlással véletlenül választott számra az $\{x+y\}$ értéke egyenletes eloszlású véletlenszám a $[0;1]$-n.

(*Igazi cél: Ha ez igaz, akkor (indukcióval) $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0;1]$ egyenletes eloszlású véletlenszámra az $\{a_1 + a_2 + \dots + a_n\}$ értéke is egyenletes eloszlású véletlenszám a $[0;1]$-n.*)

- $\{x+y\} \in [0;1]$

Kis kitérő...

Feladat

Két $x, y \in [0;1]$ egyenletes eloszlással véletlenül választott számra az $\{x+y\}$ értéke egyenletes eloszlású véletlenszám a $[0;1]$-n.

(*Igazi cél: Ha ez igaz, akkor (indukcióval)* $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0;1]$ *egyenletes eloszlású véletlenszámra az* $\{a_1 + a_2 + \dots + a_n\}$ *értéke is egyenletes eloszlású véletlenszám a* $[0;1]$*-n.*)

- $\{x+y\} \in [0;1]$
- $\boxed{?}$ $P(a < \{x+y\} < b) = b - a$ minden $0 \le a < b \le 1$ esetén?

Kis kitérő...

Feladat

Két $x, y \in [0;1]$ egyenletes eloszlással véletlenül választott számra az $\{x+y\}$ értéke egyenletes eloszlású véletlenszám a $[0;1]$-n.

(*Igazi cél: Ha ez igaz, akkor (indukcióval)* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0;1]$ *egyenletes eloszlású véletlenszámra az* $\{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$ *értéke is egyenletes eloszlású véletlenszám a* $[0;1]$*-n.*)

- $\{x+y\} \in [0;1]$
- $\boxed{?}$ $P(a < \{x+y\} < b) = b - a$ minden $0 \le a < b \le 1$ esetén?
- Elég megmutatni, hogy $P(\{x+y\} < b) = b$

Kis kitérő...

Feladat

Két $x, y \in [0;1]$ egyenletes eloszlással véletlenül választott számra az $\{x+y\}$ értéke egyenletes eloszlású véletlenszám a $[0;1]$-n.

(*Igazi cél: Ha ez igaz, akkor (indukcióval)* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0;1]$ *egyenletes eloszlású véletlenszámra az* $\{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$ *értéke is egyenletes eloszlású véletlenszám a* $[0;1]$*-n.*)

- $\{x+y\} \in [0;1]$
- $\boxed{?}$ $P(a < \{x+y\} < b) = b - a$ minden $0 \le a < b \le 1$ esetén?
- Elég megmutatni, hogy $P(\{x+y\} < b) = b$
- $P(\{x+y\} < b) = P(x+y < b) + P(1 \le x+y < 1+b)$

Kis kitérő...

Feladat

Két $x, y \in [0;1]$ egyenletes eloszlással véletlenül választott számra az $\{x+y\}$ értéke egyenletes eloszlású véletlenszám a $[0;1]$-n.

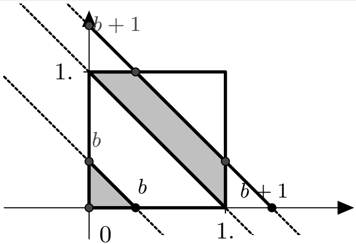
(*Igazi cél: Ha ez igaz, akkor (indukcióval)* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0;1]$ *egyenletes eloszlású véletlenszámra az* $\{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$ *értéke is egyenletes eloszlású véletlenszám a* $[0;1]$*-n.*)

- $\{x+y\} \in [0;1]$
- $\boxed{?}$ $P(a < \{x+y\} < b) = b - a$ minden $0 \leq a < b \leq 1$ esetén?
- Elég megmutatni, hogy $P(\{x+y\} < b) = b$
- $P(\{x+y\} < b) = P(x+y < b) + P(1 \leq x+y < 1+b)$
- Használjunk geometriai valószínűséget!

Kis kitérő...

Feladat

Két $x, y \in [0;1]$ egyenletes eloszlással véletlenül választott számra az $\{x+y\}$ értéke egyenletes eloszlású véletlenszám a $[0;1]$-n.

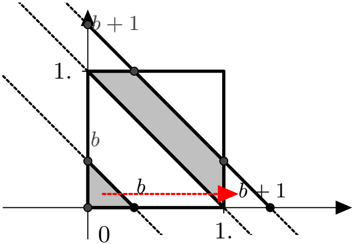


$$P(\{x+y\} < b) = P(x+y < b) + P(1 \leq x+y < 1+b) = b?$$

Kis kitérő...

Feladat

Két $x, y \in [0;1]$ egyenletes eloszlással véletlenül választott számra az $\{x+y\}$ értéke egyenletes eloszlású véletlenszám a $[0;1]$-n.

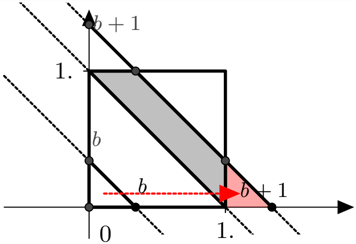


$$P(\{x+y\} < b) = P(x+y < b) + P(1 \leq x+y < 1+b) = b?$$

Kis kitérő...

Feladat

Két $x, y \in [0;1]$ egyenletes eloszlással véletlenül választott számra az $\{x+y\}$ értéke egyenletes eloszlású véletlenszám a $[0;1]$-n.



$$P(\{x+y\} < b) = P(x+y < b) + P(1 \leq x+y < 1+b) = b \ \checkmark$$

...és most már tényleg a Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, ..., a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

...és most már tényleg a Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, ..., a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo2) Sorsoljunk $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \in [0;1]$ számokat

...és most már tényleg a Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, ..., a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo2) Sorsoljunk $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \in [0;1]$ számokat

- $P($valamely $a_i = 0,$ vagy $1) = 0$

...és most már tényleg a Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, ..., a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo2) Sorsoljunk $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \in [0;1]$ számokat

- $P(\text{valamely } a_i = 0, \text{ vagy } 1) = 0$
- $b_1 := a_1; b_2 := \{a_1 + a_2\}; ...; b_n := \{a_1 + a_2 + ... + a_n\}; ...$

...és most már tényleg a Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo2) Sorsoljunk $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \in [0;1]$ számokat

- $P(\text{valamely } a_i = 0, \text{ vagy } 1) = 0$
- $b_1 := a_1; b_2 := \{a_1 + a_2\}; \ldots; b_n := \{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}; \ldots$
- $b_1, b_2, \ldots$ számok egyenletes eloszlású véletlenszámok a $[0;1]$-n.

...és most már tényleg a Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, ..., a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo2) Sorsoljunk $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \in [0;1]$ számokat

- $P(\text{valamely } a_i = 0, \text{ vagy } 1) = 0$
- $b_1 := a_1; b_2 := \{a_1 + a_2\}; ...; b_n := \{a_1 + a_2 + ... + a_n\}; ...$
- $b_1, b_2, ...$ számok egyenletes eloszlású véletlenszámok a $[0;1]$-n.
- $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n < 1 \Leftrightarrow b_1 < b_2 < ... < b_n$

...és most már tényleg a Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo2) Sorsoljunk $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \in [0;1]$ számokat

- $P(\text{valamely } a_i = 0, \text{ vagy } 1) = 0$
- $b_1 := a_1; b_2 := \{a_1 + a_2\}; \ldots; b_n := \{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}; \ldots$
- $b_1, b_2, \ldots$ számok egyenletes eloszlású véletlenszámok a $[0;1]$-n.
- $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n < 1 \Leftrightarrow b_1 < b_2 < \ldots < b_n$
- X_i (esemény): $\sum\limits_{k=1}^{i-1} a_k < 1 \Rightarrow X_{i+1} \ : \ \sum\limits_{k=1}^{i} a_k < 1$

...és most már tényleg a Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, ..., a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo2) Sorsoljunk $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \in [0;1]$ számokat

- $P(\text{valamely } a_i = 0, \text{ vagy } 1) = 0$
- $b_1 := a_1; b_2 := \{a_1 + a_2\}; ...; b_n := \{a_1 + a_2 + ... + a_n\}; ...$
- $b_1, b_2, ...$ számok egyenletes eloszlású véletlenszámok a $[0;1]$-n.
- $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n < 1 \Leftrightarrow b_1 < b_2 < ... < b_n$
- X_i (esemény): $\sum_{k=1}^{i-1} a_k < 1 \Rightarrow X_{i+1} : \sum_{k=1}^{i} a_k < 1$
- X_i' (esemény): a "sorsolt" (növekvő) b_i számok darabszáma legalább i

...és most már tényleg a Putnam verseny 1958/3 feladata

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, ..., a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo2) Sorsoljunk $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \in [0;1]$ számokat

- $P(\text{valamely } a_i = 0, \text{ vagy } 1) = 0$
- $b_1 := a_1; b_2 := \{a_1 + a_2\}; ...; b_n := \{a_1 + a_2 + ... + a_n\}; ...$
- $b_1, b_2, ...$ számok egyenletes eloszlású véletlenszámok a $[0;1]$-n.
- $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n < 1 \Leftrightarrow b_1 < b_2 < ... < b_n$
- X_i (esemény): $\sum_{k=1}^{i-1} a_k < 1 \Rightarrow X_{i+1} : \sum_{k=1}^{i} a_k < 1$
- X_i' (esemény): a "sorsolt" (növekvő) b_i számok darabszáma legalább i
- $P(X_{i+1}) = P(X_i') = \frac{1}{i!}$

...a várható érték az előző ötlet alapján

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

1 db a_1 szám esetén $P(a_1 = 1) = 0 \Rightarrow P(Y_1) = 0$

...a várható érték az előző ötlet alapján

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

1 db a_1 szám esetén $P(a_1 = 1) = 0 \Rightarrow P(Y_1) = 0$

$P(Y_{i+1}) = P(X_{i+1}) - P(X_i) = P(X_i') - P(X_{i-1}') = P(Y_i')$

...a várható érték az előző ötlet alapján

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

1 db a_1 szám esetén $P(a_1 = 1) = 0 \Rightarrow P(Y_1) = 0$

$P(Y_{i+1}) = P(X_{i+1}) - P(X_i) = P(X'_i) - P(X'_{i-1}) = P(Y'_i)$

$E = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_i) \cdot i \Leftrightarrow E' = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y'_i) \cdot i = e - 1$

...a várható érték az előző ötlet alapján

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

1 db a_1 szám esetén $P(a_1 = 1) = 0 \Rightarrow P(Y_1) = 0$

$$P(Y_{i+1}) = P(X_{i+1}) - P(X_i) = P(X'_i) - P(X'_{i-1}) = P(Y'_i)$$

$$E = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_i) \cdot i \Leftrightarrow E' = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y'_i) \cdot i = e - 1$$

$$E = P(Y_2) \cdot 2 + \quad P(Y_3) \cdot 3 + \quad P(Y_4) \cdot 4 + \ \ldots \quad + P(Y_{i+1}) \cdot (i+1) + \ldots$$

$$E' = P(Y'_1) \cdot 1 + \quad P(Y'_2) \cdot 2 + \quad P(Y'_3) \cdot 3 + \ \ldots \quad + P(Y'_i) \cdot i + \ldots$$

...a várható érték az előző ötlet alapján

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, ..., a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

1 db a_1 szám esetén $P(a_1 = 1) = 0 \Rightarrow P(Y_1) = 0$

$$P(Y_{i+1}) = P(X_{i+1}) - P(X_i) = P(X'_i) - P(X'_{i-1}) = P(Y'_i)$$

$$E = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_i) \cdot i \Leftrightarrow E' = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y'_i) \cdot i = e - 1$$

$$E = P(Y_2) \cdot 2 + \quad P(Y_3) \cdot 3 + \quad P(Y_4) \cdot 4 + \ ... \quad + P(Y_{i+1}) \cdot (i+1) + ...$$

$$E' = P(Y'_1) \cdot 1 + \quad P(Y'_2) \cdot 2 + \quad P(Y'_3) \cdot 3 + \ ... \quad + P(Y'_i) \cdot i + ...$$

Mennyivel több E E'-től?

...a várható érték az előző ötlet alapján

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, ..., a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

1 db a_1 szám esetén $P(a_1 = 1) = 0 \Rightarrow P(Y_1) = 0$

$$P(Y_{i+1}) = P(X_{i+1}) - P(X_i) = P(X'_i) - P(X'_{i-1}) = P(Y'_i)$$

$$E = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_i) \cdot i \Leftrightarrow E' = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y'_i) \cdot i = e - 1$$

$$E = P(Y_2) \cdot 2 + \quad P(Y_3) \cdot 3 + \quad P(Y_4) \cdot 4 + \ ... \quad + P(Y_{i+1}) \cdot (i+1) + ...$$

$$E' = P(Y'_1) \cdot 1 + \quad P(Y'_2) \cdot 2 + \quad P(Y'_3) \cdot 3 + \ ... \quad + P(Y'_i) \cdot i + ...$$

Mennyivel több E E'-től?

$$E - E' = P(Y_2) + P(Y_3) + P(Y_4) + ... + P(Y_i) + ... = 1 \Rightarrow$$

...a várható érték az előző ötlet alapján

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, ..., a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

1 db a_1 szám esetén $P(a_1 = 1) = 0 \Rightarrow P(Y_1) = 0$

$$P(Y_{i+1}) = P(X_{i+1}) - P(X_i) = P(X_i') - P(X_{i-1}') = P(Y_i')$$

$$E = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_i) \cdot i \Leftrightarrow E' = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_i') \cdot i = e - 1$$

$$E = P(Y_2) \cdot 2 + \quad P(Y_3) \cdot 3 + \quad P(Y_4) \cdot 4 + \; ... \quad + P(Y_{i+1}) \cdot (i+1) + ...$$

$$E' = P(Y_1') \cdot 1 + \quad P(Y_2') \cdot 2 + \quad P(Y_3') \cdot 3 + \; ... \quad + P(Y_i') \cdot i + ...$$

Mennyivel több E E'-től?

$$E - E' = P(Y_2) + P(Y_3) + P(Y_4) + ... + P(Y_i) + ... = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{E = e \approx 2,718281...}$$

...algebrailag a várható érték

Feladat

Válasszunk egymás után egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább 1 nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

$$P(Y_i) = P(X_i) - P(X_{i+1}) = \frac{1}{(i-1)!} - \frac{1}{i!}$$

$$E = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_i) \cdot i$$

$$E = 2 \cdot \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \ldots$$

$$E = 2 + \frac{1}{2!} \cdot (-2+3) + \frac{1}{3!} \cdot (-3+4) + \ldots + \frac{1}{i!}(-i + (i+1)) + \ldots$$

$$E = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{i!} + \ldots = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} = \boxed{e \approx 2,718281\ldots}$$

Putnam verseny 1958/3 feladata: következmény

? Következmények

Putnam verseny 1958/3 feladata: következmény

? Következmények

- Ha az n-D-s egységkocka "térfogata": $V = 1 \Rightarrow$

Putnam verseny 1958/3 feladata: következmény

$\boxed{?}$ Következmények

- Ha az n-D-s egységkocka "térfogata": $V = 1 \Rightarrow$

  az $(1; 0; 0; ...; 0), (0; 1; 0; ...; 0), ..., (0; 0; 0; ...; 0; 1)$ egységvektorok által meghatározott n-D-s "tetraéder" "térfogata": $V = \dfrac{1}{n!} \Rightarrow$

Putnam verseny 1958/3 feladata: következmény

? Következmények

- Ha az n-D-s egységkocka "térfogata": $V = 1 \Rightarrow$
  az $(1; 0; 0; ...; 0), (0; 1; 0; ...; 0), ..., (0; 0; 0; ...; 0; 1)$ egységvektorok által meghatározott n-D-s "tetraéder" "térfogata": $V = \dfrac{1}{n!} \Rightarrow$
  a $(c; 0; 0; ...; 0), (0; c; 0; ...; 0), ..., (0; 0; 0; ...; 0; c)$ $(c \in \mathbb{R}^+)$ vektorok által meghatározott n-D-s "tetraéder" "térfogata": $V_n(c) = \dfrac{c^n}{n!}$

Putnam verseny 1958/3 feladata: következmény

$\boxed{?}$ Következmények

- Ha az n-D-s egységkocka "térfogata": $V = 1 \Rightarrow$
  az $(1;0;0;...;0), (0;1;0;...;0), ..., (0;0;0;...;0;1)$ egységvektorok által meghatározott n-D-s "tetraéder" "térfogata": $V = \frac{1}{n!} \Rightarrow$
  a $(c;0;0;...;0), (0;c;0;...;0), ..., (0;0;0;...;0;c)$ $(c \in \mathbb{R}^+)$ vektorok által meghatározott n-D-s "tetraéder" "térfogata": $V_n(c) = \frac{c^n}{n!}$
- $\boxed{?}$ $P \Rightarrow V???$

Putnam verseny 1958/3 feladat általánosítása

Feladat

Válasszunk egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább c $(0 \leq c \leq 1)$ nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo)

Putnam verseny 1958/3 feladat általánosítása

Feladat

Válasszunk egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább c $(0 \leq c \leq 1)$ nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo) A $(c;0;0;\ldots;0), (0;c;0;\ldots;0), \ldots, (0;0;0;\ldots;0;c)$ $(0 \leq c \leq 1)$ vektorok által meghatározott n-D-s tetraéder térfogata: $V_n(c) = \frac{c^n}{n!}$

Putnam verseny 1958/3 feladat általánosítása

Feladat

Válasszunk egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább c $(0 \le c \le 1)$ nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo) A $(c;0;0;\ldots;0),(0;c;0;\ldots;0),\ldots,(0;0;0;\ldots;0;c)$ $(0 \le c \le 1)$ vektorok által meghatározott n-D-s tetraéder térfogata: $V_n(c) = \frac{c^n}{n!}$

- $X_i : \sum\limits_{k=1}^{i-1} a_k < c \Rightarrow X_i$-hez tartozó $i-1$-D-s alakzat éppen a fenti tetraéder $\Rightarrow P(X_i) = \frac{c^{i-1}}{(i-1)!}$, és persze $P(X_1) = 1$

Putnam verseny 1958/3 feladat általánosítása

Feladat

Válasszunk egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább c $(0 \le c \le 1)$ nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo) A $(c;0;0;\ldots;0),(0;c;0;\ldots;0),\ldots,(0;0;0;\ldots;0;c)$ $(0 \le c \le 1)$ vektorok által meghatározott n-D-s tetraéder térfogata: $V_n(c) = \frac{c^n}{n!}$

- $X_i : \sum\limits_{k=1}^{i-1} a_k < c \Rightarrow X_i$-hez tartozó $i-1$-D-s alakzat éppen a fenti tetraéder $\Rightarrow P(X_i) = \frac{c^{i-1}}{(i-1)!}$, és persze $P(X_1) = 1$
- Y_i (esemény): $\sum\limits_{k=1}^{i-1} a_k < 1 \le \sum\limits_{k=1}^{i} a_k$

Putnam verseny 1958/3 feladat általánosítása

Feladat

Válasszunk egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább c $(0 \leq c \leq 1)$ nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

Mo) A $(c;0;0;\ldots;0), (0;c;0;\ldots;0), \ldots, (0;0;0;\ldots;0;c)$ $(0 \leq c \leq 1)$ vektorok által meghatározott n-D-s tetraéder térfogata: $V_n(c) = \frac{c^n}{n!}$

- X_i : $\sum\limits_{k=1}^{i-1} a_k < c \Rightarrow X_i$-hez tartozó $i-1$-D-s alakzat éppen a fenti tetraéder $\Rightarrow P(X_i) = \frac{c^{i-1}}{(i-1)!}$, és persze $P(X_1) = 1$
- Y_i (esemény): $\sum\limits_{k=1}^{i-1} a_k < 1 \leq \sum\limits_{k=1}^{i} a_k$
- $P(Y_i) = P(X_i) - P(X_{i+1}) = \dfrac{c^{i-1}}{(i-1)!} - \dfrac{c^i}{i!}$

Putnam verseny 1958/3 feladat általánosítása

Feladat

Válasszunk egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább c $(0 \leq c \leq 1)$ nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

$$P(Y_i) = \frac{c^{i-1}}{(i-1)!} - \frac{c^i}{i!} \Rightarrow$$

Putnam verseny 1958/3 feladat általánosítása

Feladat

Válasszunk egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább c $(0 \leq c \leq 1)$ nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

$$P(Y_i) = \frac{c^{i-1}}{(i-1)!} - \frac{c^i}{i!} \Rightarrow$$
$$E = 1 \cdot P(Y_1) + 2 \cdot P(Y_2) + 3 \cdot P(Y_3) + \ldots$$

Putnam verseny 1958/3 feladat általánosítása

Feladat

Válasszunk egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább c $(0 \leq c \leq 1)$ nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

$$P(Y_i) = \frac{c^{i-1}}{(i-1)!} - \frac{c^i}{i!} \Rightarrow$$

$$E = 1 \cdot P(Y_1) + 2 \cdot P(Y_2) + 3 \cdot P(Y_3) + \ldots$$

$$E = 1 \cdot \left(1 - \frac{c}{1!}\right) + 2 \cdot \left(\frac{c}{1!} - \frac{c^2}{2!}\right) + 3 \cdot \left(\frac{c^2}{2!} - \frac{c^3}{3!}\right) + 4 \cdot \left(\frac{c^3}{3!} - \frac{c^4}{4!}\right) + \ldots$$

Putnam verseny 1958/3 feladat általánosítása

Feladat

Válasszunk egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább c $(0 \leq c \leq 1)$ nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

$$P(Y_i) = \frac{c^{i-1}}{(i-1)!} - \frac{c^i}{i!} \Rightarrow$$

$$E = 1 \cdot P(Y_1) + 2 \cdot P(Y_2) + 3 \cdot P(Y_3) + \ldots$$

$$E = 1 \cdot \left(1 - \frac{c}{1!}\right) + 2 \cdot \left(\frac{c}{1!} - \frac{c^2}{2!}\right) + 3 \cdot \left(\frac{c^2}{2!} - \frac{c^3}{3!}\right) + 4 \cdot \left(\frac{c^3}{3!} - \frac{c^4}{4!}\right) + \ldots$$

$$E = 1 + \frac{c}{1!}(-1+2) + \frac{c^2}{2!} \cdot (-2+3) + \frac{c^3}{3!} \cdot (-3+4) + \frac{c^4}{4!}(-4+5) + \ldots$$

Putnam verseny 1958/3 feladat általánosítása

Feladat

Válasszunk egymástól függetlenül a $[0;1]$ intervallumból valós $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészen addig, amíg az összegük legalább c $(0 \leq c \leq 1)$ nem lesz. Várhatóan hány darab számot sorsolunk ki?

$$P(Y_i) = \frac{c^{i-1}}{(i-1)!} - \frac{c^i}{i!} \Rightarrow$$

$$E = 1 \cdot P(Y_1) + 2 \cdot P(Y_2) + 3 \cdot P(Y_3) + \ldots$$

$$E = 1 \cdot \left(1 - \frac{c}{1!}\right) + 2 \cdot \left(\frac{c}{1!} - \frac{c^2}{2!}\right) + 3 \cdot \left(\frac{c^2}{2!} - \frac{c^3}{3!}\right) + 4 \cdot \left(\frac{c^3}{3!} - \frac{c^4}{4!}\right) + \ldots$$

$$E = 1 + \frac{c}{1!}(-1+2) + \frac{c^2}{2!} \cdot (-2+3) + \frac{c^3}{3!} \cdot (-3+4) + \frac{c^4}{4!}(-4+5) + \ldots$$

$$E = 1 + \frac{c}{1!} + \frac{c^2}{2!} + \frac{c^3}{3!} + \ldots + \frac{c^i}{i!} + \ldots = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{c^i}{i!} = \boxed{e^c}$$

Néhány "hasonló" saját feladat

Néhány további "hasonló" feladat:

Feladat

Bergengóciában az egy irányba tartó villamosok közti követési távolság 0, és c közötti egyenletes eloszlású v.változónak tekinthető. Az utasok felvétele nem vesz igénybe időt.Minden feladatnál egy olyan véletlenszerűnek tekinthető napközbeni időpontban megyünk a megállóba, amikor az első pár kora hajnalban induló villamos már elment régen.

a) Éppen akkor érünk a megállóba, amikor az orrunk előtt megy el egy jó (abba az irányba menő villamos, amerre menni akarunk), és egy rossz (másik irányú) villamos is.
Várhatóan hány rossz villamos megy el, amíg nem jön egy jó?

b) Véletlenszerű időpontban érkezve (nem tudjuk a korábbi rossz/jó villamosok mikor mentek el) várhatóan hány rossz villamos megy el, amíg nem jön egy jó?

Néhány "hasonló" saját feladat

Feladat

Egy nxn-es táblázatba egymástól függetlenül véletlenszerűen választunk számokat a $[0; 1[$ intervallumból. Az i-dik sorban kiválasztjuk az ottani maximális s_i számot, és ezeket az s_i számokat minden $1 \leq i \leq n$ sor esetén összeszorozzuk.
Mekkora az így kapott szorzat várható értéke?

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

(*8-9 osztály Átlag/Közepek/Szummázási technikák*)

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

(*8-9 osztály Átlag/Közepek/Szummázási technikák*)

Mo1) A villamosokat cimkézzük $c(\in \mathbb{R}^+)$-vel, ha az előző villamos c perce ment el

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

(*8-9 osztály Átlag/Közepek/Szummázási technikák*)

Mo1) A villamosokat cimkézzük $c(\in \mathbb{R}^+)$-vel, ha az előző villamos c perce ment el

- A c cimkéjű villamosra átlagosan $\dfrac{c}{2}$ percet várok

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

(*8-9 osztály Átlag/Közepek/Szummázási technikák*)

Mo1) A villamosokat cimkézzük $c(\in \mathbb{R}^+)$-vel, ha az előző villamos c perce ment el

- A c cimkéjű villamosra átlagosan $\frac{c}{2}$ percet várok
- kisorsolva átlagosan a $\frac{12}{2} = 6$-os villamossal megyek

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

(*8-9 osztály Átlag/Közepek/Szummázási technikák*)

Mo1) A villamosokat cimkézzük $c(\in \mathbb{R}^+)$-vel, ha az előző villamos c perce ment el

- A c cimkéjű villamosra átlagosan $\frac{c}{2}$ percet várok
- kisorsolva átlagosan a $\frac{12}{2} = 6$-os villamossal megyek
- Átlagosan $\frac{6}{2} = \boxed{3}$ percet várok

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

(*8-9 osztály Átlag/Középek/Szummázási technikák*)

Mo1) A villamosokat cimkézzük $c(\in \mathbb{R}^+)$-vel, ha az előző villamos c perce ment el

- A c cimkéjű villamosra átlagosan $\frac{c}{2}$ percet várok
- kisorsolva átlagosan a $\frac{12}{2} = 6$-os villamossal megyek
- Átlagosan $\frac{6}{2} = \boxed{3}$ percet várok
- $\boxed{?}$ Melyik a "rosszabb" villamos az 1-es vagy a 10-es?

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

(*8-9 osztály Átlag/Közepek/Szummázási technikák*)

Mo1) A villamosokat cimkézzük $c(\in \mathbb{R}^+)$-vel, ha az előző villamos c perce ment el

- A c cimkéjű villamosra átlagosan $\frac{c}{2}$ percet várok
- kisorsolva átlagosan a $\frac{12}{2} = 6$-os villamossal megyek
- Átlagosan $\frac{6}{2} = \boxed{3}$ percet várok
- $\boxed{?}$ Melyik a "rosszabb" villamos az 1-es vagy a 10-es?
- $\boxed{?}$

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

(*8-9 osztály Átlag/Közepek/Szummázási technikák*)

Mo1) A villamosokat cimkézzük $c(\in \mathbb{R}^+)$-vel, ha az előző villamos c perce ment el

- A c cimkéjű villamosra átlagosan $\frac{c}{2}$ percet várok
- kisorsolva átlagosan a $\frac{12}{2} = 6$-os villamossal megyek
- Átlagosan $\frac{6}{2} = \boxed{3}$ percet várok
- $\boxed{?}$ Melyik a "rosszabb" villamos az 1-es vagy a 10-es?
- $\boxed{?}$ Miért?

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

(*8-9 osztály Átlag/Közepek/Szummázási technikák*)

Mo1) A villamosokat cimkézzük $c(\in \mathbb{R}^+)$-vel, ha az előző villamos c perce ment el

- A c cimkéjű villamosra átlagosan $\frac{c}{2}$ percet várok
- kisorsolva átlagosan a $\frac{12}{2} = 6$-os villamossal megyek
- Átlagosan $\frac{6}{2} = \boxed{3}$ percet várok
- $\boxed{?}$ Melyik a "rosszabb" villamos az 1-es vagy a 10-es?
- $\boxed{?}$ Miért? $\Rightarrow$ Sajnos rossz a megoldás.

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

Mo2) Tegyük "diszkrétté" a feladatot!

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

Mo2) Tegyük "diszkrétté" a feladatot!

- cimkézzük $c(\in \{1;2;...;12\})$-vel a villamosokat

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

Mo2) Tegyük "diszkrétté" a feladatot!

- cimkézzük $c(\in \{1; 2; ...; 12\})$-vel a villamosokat
- cimkézzük $b(\in \{1; 2; ...; 12\})$-vel a várakozókat

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

Mo2) Tegyük "diszkrétté" a feladatot!

- cimkézzük $c(\in \{1; 2; ...; 12\})$-vel a villamosokat
- cimkézzük $b(\in \{1; 2; ...; 12\})$-vel a várakozókat
- A c villamoson $1; 2; ...; c$ cimkéjű utasok utazhatnak

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

Mo2) Tegyük "diszkrétté" a feladatot!

- cimkézzük $c(\in \{1; 2; ...; 12\})$-vel a villamosokat
- cimkézzük $b(\in \{1; 2; ...; 12\})$-vel a várakozókat
- A c villamoson $1; 2; ...; c$ cimkéjű utasok utazhatnak
- Minden lehetséges villamosból, és azokon utazókból 1-1 példányt véve

Egy újabb egyszerű példa

$$E = \frac{1 + (1+2) + \dots + (1+2+\dots+12)}{1+2+\dots+12} = \frac{12 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + \dots + 1 \cdot 12}{1+2+\dots+12}$$

Egy újabb egyszerű példa

$$E = \frac{1 + (1+2) + \ldots + (1+2+\ldots+12)}{1+2+\ldots+12} = \frac{12 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + \ldots + 1 \cdot 12}{1+2+\ldots+12}$$

$$E = \frac{(13-1) \cdot 1 + (13-2) \cdot 2 + \ldots + (13-12) \cdot 12}{1+2+\ldots+12}$$

Egy újabb egyszerű példa

$$E = \frac{1 + (1+2) + \ldots + (1+2+\ldots+12)}{1+2+\ldots+12} = \frac{12\cdot 1 + 11\cdot 2 + \ldots + 1\cdot 12}{1+2+\ldots+12}$$

$$E = \frac{(13-1)\cdot 1 + (13-2)\cdot 2 + \ldots + (13-12)\cdot 12}{1+2+\ldots+12}$$

$$E = \frac{13\cdot(1+2+\ldots+12) - (1^2+2^2+\ldots+12^2)}{1+2+\ldots+12}$$

Egy újabb egyszerű példa

$$E = \frac{1 + (1+2) + \ldots + (1+2+\ldots+12)}{1+2+\ldots+12} = \frac{12 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + \ldots + 1 \cdot 12}{1+2+\ldots+12}$$

$$E = \frac{(13-1) \cdot 1 + (13-2) \cdot 2 + \ldots + (13-12) \cdot 12}{1+2+\ldots+12}$$

$$E = \frac{13 \cdot (1+2+\ldots+12) - (1^2 + 2^2 + \ldots + 12^2)}{1+2+\ldots+12}$$

$$E = 13 - \frac{(12 \cdot 13 \cdot 25) \div 6}{(12 \cdot 13) \div 2} = 13 - \frac{25}{3} = \boxed{\frac{14}{3}} \text{ percet várok}$$

Egy újabb egyszerű példa

$$E = \frac{1 + (1+2) + \ldots + (1+2+\ldots+12)}{1+2+\ldots+12} = \frac{12\cdot 1 + 11\cdot 2 + \ldots + 1\cdot 12}{1+2+\ldots+12}$$

$$E = \frac{(13-1)\cdot 1 + (13-2)\cdot 2 + \ldots + (13-12)\cdot 12}{1+2+\ldots+12}$$

$$E = \frac{13\cdot(1+2+\ldots+12) - (1^2+2^2+\ldots+12^2)}{1+2+\ldots+12}$$

$$E = 13 - \frac{(12\cdot 13\cdot 25)\div 6}{(12\cdot 13)\div 2} = 13 - \frac{25}{3} = \boxed{\frac{14}{3}} \text{ percet várok}$$

? Legfeljebb mennyit tévedtem?

Egy újabb egyszerű példa

$$E = \frac{1 + (1+2) + \ldots + (1+2+\ldots+12)}{1+2+\ldots+12} = \frac{12 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + \ldots + 1 \cdot 12}{1+2+\ldots+12}$$

$$E = \frac{(13-1) \cdot 1 + (13-2) \cdot 2 + \ldots + (13-12) \cdot 12}{1+2+\ldots+12}$$

$$E = \frac{13 \cdot (1+2+\ldots+12) - (1^2 + 2^2 + \ldots + 12^2)}{1+2+\ldots+12}$$

$$E = 13 - \frac{(12 \cdot 13 \cdot 25) \div 6}{(12 \cdot 13) \div 2} = 13 - \frac{25}{3} = \boxed{\frac{14}{3}} \text{ percet várok}$$

? Legfeljebb mennyit tévedtem? Hogyan javíthatom a módszert?

Egy újabb egyszerű példa

Mo2) Javítsunk az előzőn! $n (\in \mathbb{N}^+)$ egység $=$ 12 perc!

Egy újabb egyszerű példa

Mo2) Javítsunk az előzőn! $n(\in \mathbb{N}^+)$ egység $=$ 12 perc!

- cimkézzük $c(\in \{1; 2; ...; n\})$-nel a villamosokat

Egy újabb egyszerű példa

Mo2) Javítsunk az előzőn! $n(\in \mathbb{N}^{+})$ egység $=$ 12 perc!

- cimkézzük $c(\in \{1; 2; ...; n\})$-nel a villamosokat
- cimkézzük $b(\in \{1; 2; ...; n\})$-nel a várakozókat

Egy újabb egyszerű példa

Mo2) Javítsunk az előzőn! $n(\in \mathbb{N}^{+})$ egység $=$ 12 perc!

- cimkézzük $c(\in \{1; 2; ...; n\})$-nel a villamosokat
- cimkézzük $b(\in \{1; 2; ...; n\})$-nel a várakozókat
- A c villamoson $1; 2; ...; n$ cimkéjű utasok utazhatnak

Egy újabb egyszerű példa

Mo2) Javítsunk az előzőn! $n(\in \mathbb{N}^+)$ egység $=$ 12 perc!

- cimkézzük $c(\in \{1; 2; ...; n\})$-nel a villamosokat
- cimkézzük $b(\in \{1; 2; ...; n\})$-nel a várakozókat
- A c villamoson $1; 2; ...; n$ cimkéjű utasok utazhatnak
- Minden lehetséges villamosból, és azokon utazókból 1-1 példányt véve, mint imént:

Egy újabb egyszerű példa

$$E = \frac{1 + (1+2) + \ldots + (1+2+\ldots+n)}{1+2+\ldots+n} = \frac{n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + \ldots + 1 \cdot n}{1+2+\ldots+n}$$

$$E = \frac{(n+1-1) \cdot 1 + (n+1-2) \cdot 2 + \ldots + (n+1-n) \cdot 12}{1+2+\ldots+n}$$

$$E = \frac{(n+1) \cdot (1+2+\ldots+n) - (1^2+2^2+\ldots+n^2)}{1+2+\ldots+n}$$

$$E = (n+1) - \frac{(n(n+1)(2n+1)) \div 6}{n(n+1) \div 2} = (n+1) - \frac{2n+1}{3} = \boxed{\frac{n+2}{3}}$$

$$E = \frac{n+2}{3} \text{ egység } = 4 \text{ perc } + \frac{2}{3} \text{ egység } \approx \boxed{4 \text{ perc}}$$

Egy újabb egyszerű példa

$$E = \frac{1 + (1+2) + \ldots + (1+2+\ldots+n)}{1+2+\ldots+n} = \frac{n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + \ldots + 1 \cdot n}{1+2+\ldots+n}$$

$$E = \frac{(n+1-1) \cdot 1 + (n+1-2) \cdot 2 + \ldots + (n+1-n) \cdot 12}{1+2+\ldots+n}$$

$$E = \frac{(n+1) \cdot (1+2+\ldots+n) - (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)}{1+2+\ldots+n}$$

$$E = (n+1) - \frac{(n(n+1)(2n+1)) \div 6}{n(n+1) \div 2} = (n+1) - \frac{2n+1}{3} = \boxed{\frac{n+2}{3}}$$

$$E = \frac{n+2}{3} \text{ egység } = 4 \text{ perc } + \frac{2}{3} \text{ egység } \approx \boxed{4 \text{ perc}}$$

? Most is legfeljebb 1 egységet tévedtem.

Egy újabb egyszerű példa

$$E = \frac{1 + (1+2) + \ldots + (1+2+\ldots+n)}{1+2+\ldots+n} = \frac{n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + \ldots + 1 \cdot n}{1+2+\ldots+n}$$

$$E = \frac{(n+1-1) \cdot 1 + (n+1-2) \cdot 2 + \ldots + (n+1-n) \cdot 12}{1+2+\ldots+n}$$

$$E = \frac{(n+1) \cdot (1+2+\ldots+n) - (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)}{1+2+\ldots+n}$$

$$E = (n+1) - \frac{(n(n+1)(2n+1)) \div 6}{n(n+1) \div 2} = (n+1) - \frac{2n+1}{3} = \boxed{\frac{n+2}{3}}$$

$$E = \frac{n+2}{3}\text{ egység } = 4\text{ perc } + \frac{2}{3}\text{ egység } \approx \boxed{4\text{ perc}}$$

? Most is legfeljebb 1 egységet tévedtem. Következmény?

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

Mo3) Alkalmazzunk geometriai modellt!

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

Mo3) Alkalmazzunk geometriai modellt!

- cimkézzük $c(\in]0;12])$-vel a villamosokat

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

Mo3) Alkalmazzunk geometriai modellt!

- cimkézzük $c(\in]0;12])$-vel a villamosokat
- cimkézzük $b(\in]0;c]\})$-vel a c villamosra várakozókat

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

Mo3) Alkalmazzunk geometriai modellt!

- cimkézzük $c(\in]0;12])$-vel a villamosokat
- cimkézzük $b(\in]0;c]\})$-vel a c villamosra várakozókat
- Mi az eseménytér?

Egy újabb egyszerű példa

Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

Mo3) Alkalmazzunk geometriai modellt!

- cimkézzük $c(\in]0;12])$-vel a villamosokat
- cimkézzük $b(\in]0;c]\})$-vel a c villamosra várakozókat
- Mi az eseménytér?
- $b \to x; c \to y; 0 < x < y < 12 \;\Rightarrow$ egy háromszög

Egy újabb egyszerű példa

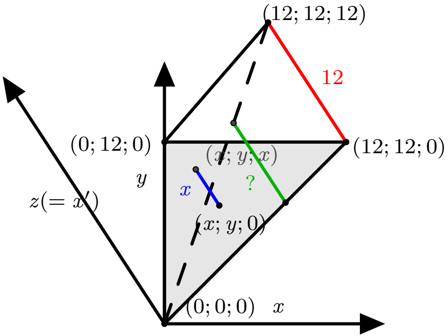
Feladat

Bergengóciában két azonos irányú villamos között eltelt idő 0 és 12 perc között van véletlenszerűen.
A megállóba véletlenszerű időpontban érkezve várhatóan mennyit kell várni?

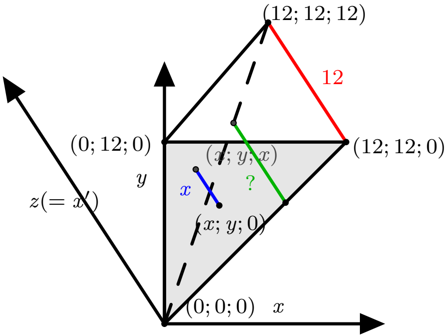
Mo3) Alkalmazzunk geometriai modellt!

- cimkézzük $c(\in]0;12])$-vel a villamosokat
- cimkézzük $b(\in]0;c]\})$-vel a c villamosra várakozókat
- Mi az eseménytér?
- $b \to x; c \to y; 0 < x < y < 12 \ \Rightarrow$ egy háromszög
- A $(b;c) = (x;y)$ pont/esemény esetén a várakozási idő $b = x$.

Egy újabb egyszerű példa

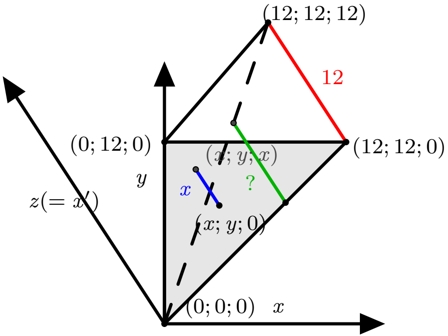


Egy újabb egyszerű példa



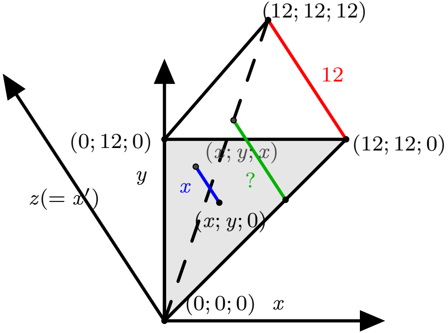
- Az eseménytéren az átlagos várakozási idő:

Egy újabb egyszerű példa



- Az eseménytéren az átlagos várakozási idő:
- A színes $(x; y; 0), (x; y; x)$ szakaszok átlagos hossza

Egy újabb egyszerű példa



- Az eseménytéren az átlagos várakozási idő:
- A színes $(x; y; 0), (x; y; x)$ szakaszok átlagos hossza
- $E = \dfrac{V_{\text{tetraéder}}}{T_{\text{E.tér=háromszög}}} = \dfrac{\frac{T_{\text{E.tér}} \cdot m}{3}}{T_{\text{E.tér}}} = \dfrac{m}{3} = \dfrac{12}{3} = \boxed{4}$

Monte-Carlo

Feladat

A nagy ho-ho-horgász szeretné megtudni, hogy mennyi víz van a Balatonban. Rendelkezésére áll egy centiméter és mindenféle horgászeszköz, meg egy jó ladik. A Főcsalinak van egy műholdfelvétele, így pontosan tudja mekkora a Balaton vízfelülete.
Hogyan határozható meg körülbelül a Balatonban lévő víz mennyisége?

Monte-Carlo

Feladat

A nagy ho-ho-horgász szeretné megtudni, hogy mennyi víz van a Balatonban. Rendelkezésére áll egy centiméter és mindenféle horgászeszköz, meg egy jó ladik. A Főcsalinak van egy műholdfelvétele, így pontosan tudja mekkora a Balaton vízfelülete.
Hogyan határozható meg körülbelül a Balatonban lévő víz mennyisége?

- Monte-Carlo-módszer

Monte-Carlo

Feladat

A nagy ho-ho-horgász szeretné megtudni, hogy mennyi víz van a Balatonban. Rendelkezésére áll egy centiméter és mindenféle horgászeszköz, meg egy jó ladik. A Főcsalinak van egy műholdfelvétele, így pontosan tudja mekkora a Balaton vízfelülete.
Hogyan határozható meg körülbelül a Balatonban lévő víz mennyisége?

- Monte-Carlo-módszer
- ? Hol használható?

Monte-Carlo

Feladat

A nagy ho-ho-horgász szeretné megtudni, hogy mennyi víz van a Balatonban. Rendelkezésére áll egy centiméter és mindenféle horgászeszköz, meg egy jó ladik. A Főcsalinak van egy műholdfelvétele, így pontosan tudja mekkora a Balaton vízfelülete.
Hogyan határozható meg körülbelül a Balatonban lévő víz mennyisége?

- Monte-Carlo-módszer
- $\boxed{?}$ Hol használható? Mi kell hozzá?

Monte-Carlo

Feladat

A nagy ho-ho-horgász szeretné megtudni, hogy mennyi víz van a Balatonban. Rendelkezésére áll egy centiméter és mindenféle horgászeszköz, meg egy jó ladik. A Főcsalinak van egy műholdfelvétele, így pontosan tudja mekkora a Balaton vízfelülete.
Hogyan határozható meg körülbelül a Balatonban lévő víz mennyisége?

- Monte-Carlo-módszer
- $\boxed{?}$ Hol használható? Mi kell hozzá?
- Könnyű szimulálni pl. $T_{\text{kör}}$, $V_{\text{gömb}}$

Monte-Carlo

Feladat

A nagy ho-ho-horgász szeretné megtudni, hogy mennyi víz van a Balatonban. Rendelkezésére áll egy centiméter és mindenféle horgászeszköz, meg egy jó ladik. A Főcsalinak van egy műholdfelvétele, így pontosan tudja mekkora a Balaton vízfelülete.
Hogyan határozható meg körülbelül a Balatonban lévő víz mennyisége?

- Monte-Carlo-módszer
- $\boxed{?}$ Hol használható? Mi kell hozzá?
- Könnyű szimulálni pl. $T_{\text{kör}}$, $V_{\text{gömb}}$
- $\boxed{?}$ Korábban $P \Rightarrow E$, most $E \Rightarrow P(, T, V)$

Pár hivatkozás

- Kosztolányi József, Makay Géza, Pintér Klára, Pintér Lajos: Matematikai problémakalauz I. - ISSN 1218-4071

- An Unexpected Limit of Expected Values ⇒ http://cedar.wwu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1068&context=math_facpubs

---

- 18th Putnam 1958, Putnam website https://mks.mff.cuni.cz/kalva/putnam/putn58.html http://math.scu.edu/putnam/

- Evan Chen and Andrew Critch: Unexpected Expectations ⇒ http://acritch.com/media/math/Andrew_Critch_and_Evan_Chen_-_Unexpected_Expectations.pdf