Átjáró a geometriai testek, a gráfok és a csoportelmélet között

Surányi László

Rátz László Vándorgyűlés, 2017, Székesfehérvár.[1]

Abból indulunk ki, hogy van egy heurisztikus elképzelésünk arról, mikor „egyforma”, vagy meg-különböztethetetlen, azonos szerepű egy gráf két pontja (vagy éle!) és mikor nem. Mikor „néz ki ugyanúgy” a gráf két pontból.

Előzetes megjegyzés. Egy alternatív felépítés lehet:

- a Petersen gráfról szóló 28. feladattal kezdjük,
- megállapítjuk, hogy az ott látott szerkezetet kapjuk, bármely pontból indulunk, tehát a gráf minden pontjából ugyanúgy néz ki,
- megállapítjuk, hogy az ott látott szerkezetet kapjuk, bármely pontból indulunk, tehát a gráf minden pontjából ugyanúgy néz ki,
- és az alábbi feladatok csak ez után jönnek.

Ha később fel akarjuk adni az 5. feladatot, akkor itt még nem áruljuk el, hogy a Petersen gráfról van szó, csak ott, a feladat után.

Példák

Mondunk pár példát:

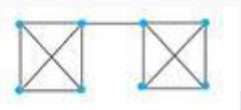
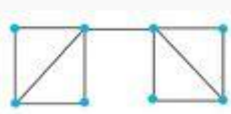
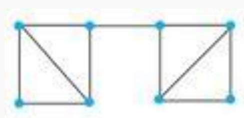
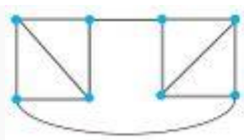
- Egy (gráfelméleti) kör pontjai nyilván nem meg-különböztethetők,
- Egy teljes gráf pontjai sem.
- Egy csillagban viszont a telített pont megkülönböztethető a többitől, viszont a többi egymástól nem.
- Egy út két végpontja nyilván nem megkülönböztethető és bármely két pont, ami a két végponttól egyenlő távol van, egymástól szintén nem, de az összes többitől éppen a végponttól való távolsága révén igen.

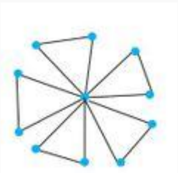
Ami az éleket illeti, a kör és a teljes gráf, de a csillag élei sem megkülönböztethetők. Viszont az út élei igen. Kérünk további példákat a diákoktól. Már most leszögezhetjük:

Csak azonos fokú pontok lehetnek „egyformák”.

Megjegyzés. Ha a szélességi keresés már volt, és valaki már itt hivatkozik rá, akkor érdemes kiemelni ezt az érvet.

1. feladat. Hány „különböző” pont/él van az alábbi gráfokban?

a)  b)  c)  d) 

e) 

[1] Köszönet Abért Miklósnak, aki a témára és taníthatóságára felhívta a figyelmemet.

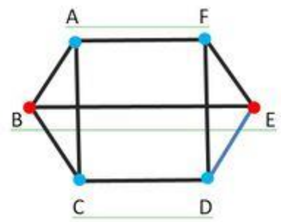
Megjegyzés: Ezen a ponton még nem feltétlenül kell kijavítani a rossz példákat, majd kiderül úgyis a folyamat során.

2. feladat. Rajzoljunk további olyan gráfokat, amelyekben
a) minden csúcs „egyforma”;
b) nem minden csúcs egyforma;
b’) minden csúcs „különböző”.

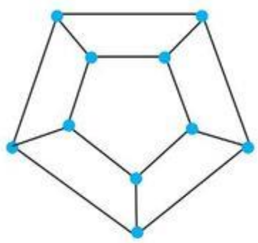
3. feladat. Melyik a legkisebb (egyszerű) gráf, amelyik megfelel a 2.b') feladat feltételének?

4. feladat. Hány „különböző” típusú pont/él van az alábbi gráfokban?

a) ABCDEF hatszög az AC, BE, DF átlókkal.



b) Két ötszög, köztük egy párosítás:



Megjegyzés. A tanuló csoport "tempójától" függően már itt megkérdezhetjük, hogy hányféleképp vihetjük át önmagukba a feladat gráfjait. Később visszatérünk még erre a kérdésre.

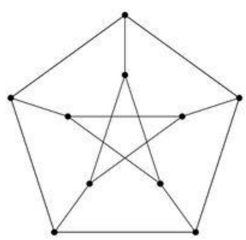
Csúcstranzitív gráfok; az automorfizmus definíciója

Elnevezés. Ha egy gráf minden pontja „egyforma”, ezt röviden úgy fogjuk kifejezni, hogy a gráf **csúcstranzitív**. Persze egyelőre persze még csak heurisztikus fogalmunk van arról, hogy mit jelent az „egyforma”.

Eddigi tapasztalataink alapján adódik a kérdés:

4' feladat. Létezik-e reguláris (egyszerű) gráf, amelyben vannak nem-egyforma pontok?
Vagyis: létezik-e reguláris, nem csúcstranzitív (egyszerű) gráf?

5. feladat. Hányfajta pont van az alábbi, ún. Petersen gráfban?



Átvihető-e a belső köre a külsőbe úgy, hogy a gráf „ugyanaz” maradjon?

Megjegyzés: Itt érdemes tisztázni, hogy MIT JELENT, HOGY "EGYFORMA", VAGYIS "ÁTVIHETŐ" (csak azért, hogy legyen fogódzónk, ha "eltévednénk", különben továbbra is nyugodtan támaszkodhatunk a heurisztikus fogalmunkra).

6. (definíciós) feladat. Próbáljuk megfogalmazni pontosabban, hogy mikor nevezzük egy gráf két csúcsát/pontját *egyformának*, vagy másképp: mikor mondjuk, hogy a gráf egyik csúcsa/pontja *átvihető* a gráf egy másik csúcsába/pontjába!

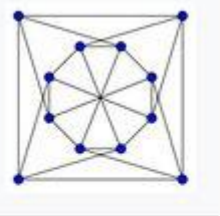
Ez után a feladat után kimondható az alábbi

Definíció (vagy inkább: elnevezés). Egy gráf csúcsainak éltartó permutációit nevezzük a gráf **automorfizmusainak**.

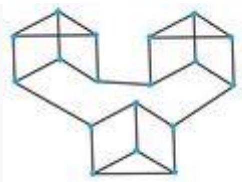
Orbitok

7. feladat. Hány „különböző” típusú pont van az alábbi gráfokban?

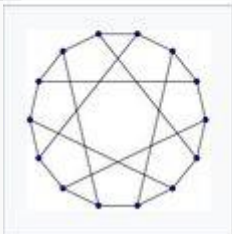
a) Chvátal gráf:



b) Ez a 18 pontú gráf:



c) Az úgynevezett Heawood gráf:



Definíció. Azokat a csúcsokat, amelyekbe a gráf egy *A* pontja átvihető, e pont **orbitjának**, vagy **pályájának** nevezzük.

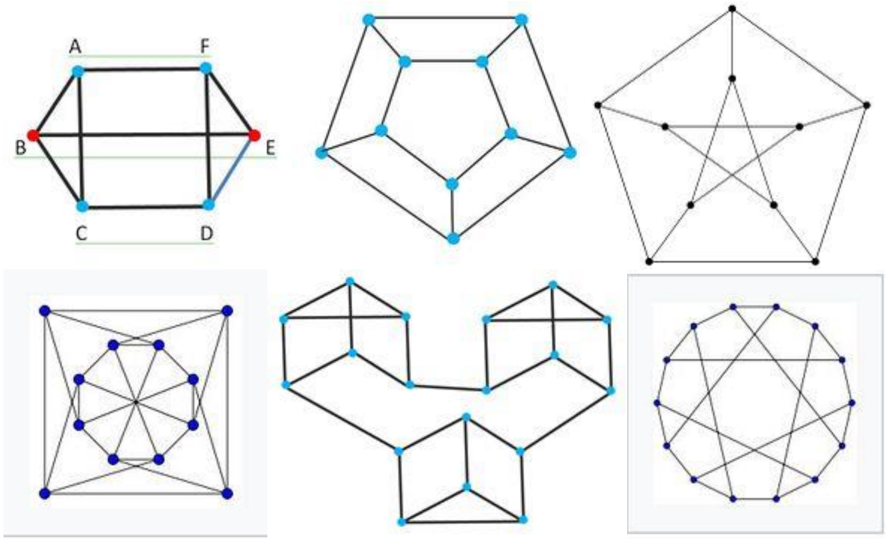
Megjegyzés: Minden pont beletartozik saját orbitjába!

8. feladat. Gondoljuk meg, hogy két csúcs orbitja vagy azonos, vagy nincs közös pontjuk.

Megjegyzés: Ez nem más, mint annak megfogalmazása, hogy miért használhattuk eddig a *különböző* és *egyforma pontok* kifejezéseket.

Megjegyzés: Két állításról van szó:
Két éltartó permutáció egymásutánja is éltartó permutáció.
Éltartó permutáció inverze is éltartó permutáció.
Elég, ha ezt a két állítást meg tudják fogalmazni a diákok (l. a 6. feladatot is), nem érdemes belemenni a szemléletesen nyilvánvaló állítások formális bizonyításába. Viszont gyakorlásként megkérdezhetjük: Hogyan fogalmazható meg az "orbitok nyelvén", hogy egy gráf csúcstranzitív?

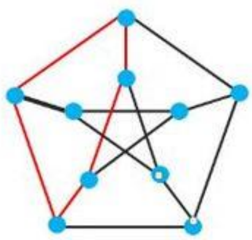
9. (gyakorló) feladat. Vizsgáljuk meg, hogy hány orbitja van
a) a 4., 5. és 7. feladat gráfjainak:



b) a két egyforma hosszú útból és közte egy 1-faktorból álló gráfnak;
c) egy nyolcszög két szemközti rövid átlóval;
d) egy kör két metsző/nem-metsző/közös pontból induló rövid átlóval.

Gyakorló feladatok

10. feladat. Tekintsük újra a Petersen gráfot. A külső és belső ötszög között futó éleket nevezzük küllőknek. Kiszíneztünk pirosra egy ötszöget, amelyiknek van küllő-éle is:



Átvihető-e ez automorfizmussal (= éltartó permutációval) a külső körbe?

10a. feladat.

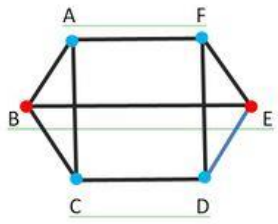
- Hány ötszög van a Petersen gráfban?
- Átvihető-e bármely két ötszög egymásba automorfizmussal?

Itt következhetnek "adjunk meg automorfizmust, amely ..." és "automorfizmus-e" típusú gyakorló feladatok. Példák:

11. feladat.

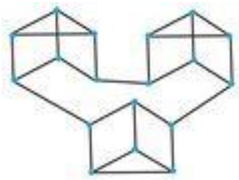
a) Automorfizmusa-e az alábbi gráfnak ez a permutáció:

```
A B C D E F
A F E D C B
```



Van-e a BE élt a AF élbe átvivő automorfizmus?
És a BE élt az AC élbe átvivő automorfizmus?

b) Van-e olyan automorfizmusa (a csúcsoknak olyan éltartó permutációja) a 4. feladat e) gráfjának (l. alább is), amely a bal felső élt a jobb felső élbe viszi?



c) Mely függőleges élek vihetők egymásba ebben a gráfban?

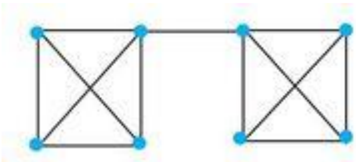
Van-e olyan automorfizmus, amely e gráf fenti rajzában két szomszédos függőleges élt megcserél?

d) Van-e olyan automorfizmusa a Chvátal gráfnak, amely a belső nyolcszöget "eggyel elforgatja"?

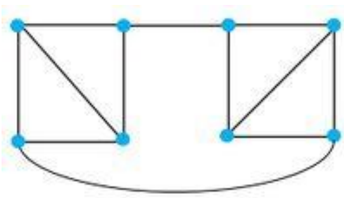
e) Adjunk meg a Chvátal gráfnak olyan automorfizmusát, amely a bal szélső élét a jobb szélső élébe viszi át!

f) A 11 pontú barátság gráf melyik élei vihetők át egymásba?

g) Az alábbi gráf melyik "függőleges" éle vihető át melyik "vízszintes" élbe automorfizmussal?



h) Ugyanez a kérdés az alábbi gráfnál:



12. feladat. Gondoljuk meg, hogy a következő állítások ekvivalensek (annak pontosabb megfogalmazásai, hogy egy gráf minden pontja "különböző"):

- Egy gráf minden orbitja egyetlen pontból áll.
- Egy gráfnak csak egyetlen automorfizmusa van: az, amely minden csúcsot önmagába visz.

Ennek alapján a 4' feladat így fogalmazható:

Van-e olyan reguláris gráf, amelynek csak egy automorfizmusa van?
"1. BONUS FELADAT": Próbáljuk megválaszolni ezt a kérdést!

(Bonus feladatnak azokat nevezem, amelyek nehezebbek, csak erősebb/érdkelődőbb diákoknak célszerű feladni.)

Gráfok automorfizmusainak a száma

13. feladat. Hány automorfizmusa van a következő gráfoknak:

a) Az n pontú teljes gráf.
b) Az n pontú kör.
c) Az n pontú út.
d) Egy n pontú teljes páros gráf.
e) Két egyforma hosszú út, közte 1-faktor.
f) Nyolcszög két szemközti rövid átlóval.
g) Kör két metsző/nem-metsző/közös pontból induló rövid átlóval.
(Rövid átlónak a másodszomszéd csúcsokat összekötő átlókat nevezzük.)

14. feladat. Hány automorfizmusa van a 1. feladat gráfjainak?

Érdemes megszámláltatni a 4. feladat gráfjainak az automorfizmusait is. (Lásd a 29. feladatot is.) A **Petersen gráf** és a **Heawood gráf** azonban külön téma, ezeket külön-külön fejezetben tárgyaljuk alább. A többiről pedig feladható ez az alábbi formában:

15. feladat. Keressünk az eddig megismert (és még nem vizsgált) gráfok között olyant, amelyeknek 6, 8, 10 illetve 12 automorfizmusa van. Adjunk meg további ilyen gráfokat.

A következő feladat viszont találékonyságot kíván, ezt segíti az a) részfeladat.

16. feladat. Adjunk meg olyan
a) irányított,
b) egyszerű
gráfot, amelynek pontosan három automorfizmusa van.
c) Adjunk meg több olyan gráfot, amelynek pontosan két automorfizmusa van.

17. feladat. A G csúcstranzitív gráf automorfizmusainak a számát Andris a következőképpen számolta ki. Aránylag könnyen meg tudta számolni, hány automorfizmus viszi az x csúcsot önmagába. Ezt a számot megszorozta a csúcsok számával. Azt állítja, hogy az így kapott szám a gráf automorfizmusainak a száma.

Jól okoskodott-e Andris?

18. feladat. Milyen n-ekre van olyan egyszerű gráf, amelynek pontosan n automorfizmusa van?

19. További gyakorló feladatok.

19A) Hány automorfizmusa lehet egy öt-, hat-, hétpontú csúcstranzitív gráfnak? Hány ilyen gráf van?

19B) Lehet-e egy százpontú csúcstranzitív gráfnak 150 automorfizmusa?

19C) Hány automorfizmusa van annak a gráfnak, amely egy pontból kiinduló három, páronként pontdiszjunkt, háromélű útból áll (tehát 10 pontja van)? Hány orbitja van a pontjainak (és hány osztálya az éleinek)?

Megjegyzés: A zárójelben álló kérdést a következő fejezet előkészítéseként lehet feladni.

D) Igaz-e, hogy egy csúcstranzitív gráf minden pontját ugyanannyi automorfizmus hagyja a helyén?

D’) Igaz-e az állítás "fordítottja" is: ha egy gráf minden pontját ugyanannyi automorfizmus hagy a helyén, akkor a gráf csúcstranzitív?

E) Hogyan általánosítható a 13. feladatban kapott állítás?

Élosztályok, éltranzitív gráfok

Ugyanúgy, ahogy van csúcstranzitív gráf, van éltranzitív gráf is:

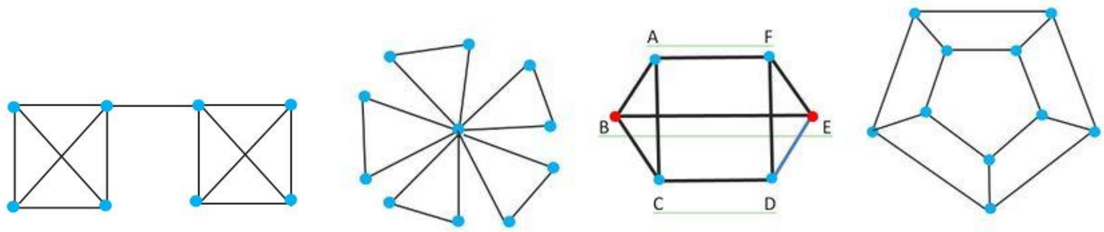
Definíció. Azokat a gráfokat nevezzük éltranzitív gráfnak, amelyekben bármely él átvihető bármelyik másikba automorfizmussal.

Megjegyzés. A definíció így még nem egyértelmű. Követelhetjük azt, hogy minden él átvihető legyen minden élbe, de követelhetjük azt is, hogy minden (x,y) él átvihető legyen minden (u,v) élbe. Előbbi esetén egy élpárhoz csak egy automorfizmus kell, az utóbbi esetén két különböző automorfizmus, mert itt megmondtuk, hogy az él melyik végpontja a képél melyik végpontjába menjen. Az utóbbit is teljesítő *ív-tranzitív* gráfoknak nevezik.
Ha a diákok nem veszik észre a kétértelműséget, egyelőre nem beszélünk róla: majd lesz feladat, amelynél más a válasz a kétféle lehetséges definíció esetén.

Példák: A teljes gráfok, a körök, a szabályos testek élhálózatai, a teljes páros gráfok, amelyeknek mindkét osztályában ugyanannyi pont van. (Ezek teljesítik az erősebb követelményt is, azaz ív-tranzitívak.)

20. feladat. Mondjunk további példákat éltranzitív gráfokra!

21. feladat. Melyik gráf éltranzitív az alábbiak közül:
a) A csillag.
b) Az 1. feladat a) és d) gráfja, valamint a 4. feladat a) és b) gráfja:



c) Általában: két pontdiszjunk n hosszú körből és köztük a megfelelő pontok közötti párosításból álló gráf?

22. feladat. Igaz-e, hogy
a) csúcstranzitív gráf komplementere is csúcstranzitív?
b) éltranzitív gráf komplementere is éltranzitív?

23. feladat. Lehet-e éltranzitív egy nem csúcstranzitív gráf?

Megjegyzés. Ez a kérdés kétszeresen becsapós!

23a feladat. Van-e olyan 3-reguláris él- és csúcstranzitív gráf, amely nem ív-tranzitív?

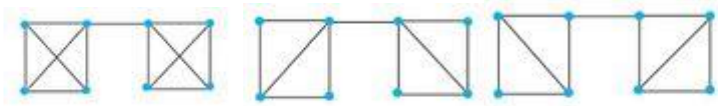
24. feladat. Mutassunk minél több, minél bonyolultabb példát
a) csúcs- és éltranzitív,
b) csúcs-, de nem éltranzitív,
c) él-, de nem csúcstranzitív gráfokra.
Az éltranzitivitást itt a gyengébb értelemben értjük.

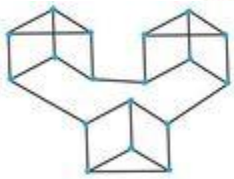
Már az előző feladatokból is kiderült, hogy érdemes az élek osztályait is vizsgálni: két él akkor van egy osztályban, ha van automorfizmus, amely az egyiket (a gyengébb értelemben) a másikba viszi.

Az éltranzitív gráfok azok, amelyekben minden él ugyanabban az egy osztályban van. Láttuk már, hogy a barátsággráf éleinek két osztálya van, az ötszög alapú hasáb élhálózatának - és általában a hasáb élhálózatának - is, kivéve a kockát.

25. feladat. Vizsgáljuk meg, hány osztálya van a már ismert gráfjaink közül az alábbi gráfok éleinek:

a) Az 1. feladat gráfjainak:



b) A 18 pontú gráfnak:  .

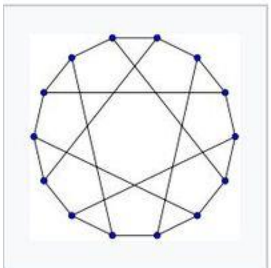
c) A Chvátal gráfnak.

26. feladat.

a) Lehet-e több élosztály egy csúcstranzitív gráfban?

b) BONUS feladat: Lehet-e akárhány fajta él egy csúcstranzitív gráfban?

27. feladat (azonos a H1a feladattal). Éltranzitív-e a Heawood gráf?



Gráfok automorfizmuscsoportja

Előzmény: Az alábbi geometriai alakzatok transzformációcsoportjának részletesebb áttekintése:

- A szabályos *n*-szögé: a D_n diédercsoport,
- a szabályos tetraéderé az S_4 szimmetrikus csoport,
- a kockaé (és az oktaéderé) S_4 X Z_2 (ez utóbbit nem föltétlenül szükséges így leírni, csak azt jó, ha látják a diákok, hogy két szabályos tetraéderről van szó, azok bármely transzformációja jó és a két tetraédert fel is cserélhetjük.
- Esetleg az ikozaéder és a dodakaéder transzformációcsoportját is megnézhetjük A_4 X Z_2.

Érdemes még megemlíteni, hogy a szabályos sokszög alapú egyenes gúláé is a D_n diédercsoport, a szabályos sokszög alapú hasábé pedig ez szorozva Z_2-vel - kivéve a kockáét!!!

Visszatérhetünk a 8a feladatra is, amely szerint az automorfizmusok a gráf "egybevágósági transzformációi" - tehát ugyanúgy csoportot alkotnak, mint a geometriai alakzatoké:

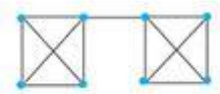
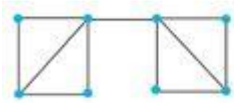
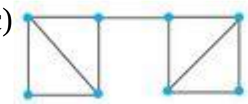
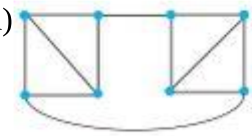
A 6. feladat megoldásában, majd a 8. feladat után volt szó arról, hogy automorfizmus inverze is automorfizmus (és a minden csúcsot a helyén hagyó automorfizmus az identitás). Itt még megemlítjük, hogy ha *a, b, c* három permutáció, akkor *a(bc)* és *(ab)c* egyaránt azt jelenti, hogy végrehajtjuk egymás után előbb az *a*, majd a *b*, végül a *c* permutációt. Ha a transzformációcsoportok már megvoltak, akkor itt elég utalnunk erre. (Általában sem érdemes kérdésessé tenni olyan műveleti tulajdonságokat, amelyekre a diákok még nem láttak ellenpéldát.)

Ez után következhetnek a korábban szerepelt gráfok automorfizmuscsoportjai:

28. feladat. Mi az alábbi gráfok automorfizmuscsoportja:

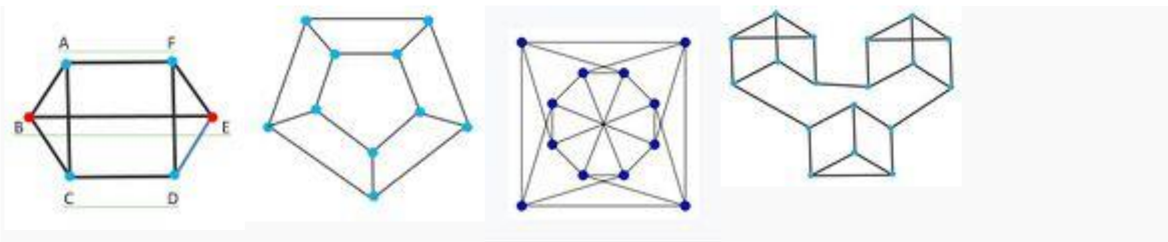
- Az *n* pontú teljes gráf.
- Az *n* pontú kör.
- Az *n* pontú út.
- Az *n* pontú csillag.
- A 3-ház-3-kút gráf.
- A $K_{i,j}$ teljes páros gráf.
- A kocka élhálózata.
- Az oktaéder élhálózata.

29. feladat. Mi az alábbi (az 1. feladatban szerepelt) gráfok automorfizmuscsoportja:

a)  b)  c)  d) 

e)

30. feladat. Állapítsuk meg az alábbi gráfok automorfizmuscsoportját (l. a 4. és a 7. feladatot):



A Petersen gráf automorfizmuscsoportját a Petersen gráf fejezet, a Heawood gráfét pedig a Heawood gráf fejezet tárgyalja.

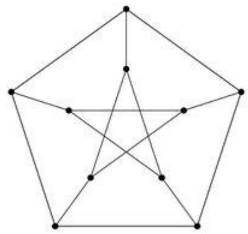
31. Milyen *n*-ekre van olyan gráf, amelynek automorfizmuscsoportja éppen az *n*-edrendű ciklikus csoport, Z_n?

Általánosabban is felmerül a kérdés, hogy milyen *G* (véges) csoporthoz van olyan egyszerű gráf, amelynek automorfizmuscsoportja éppen *G*? A választ Frucht alábbi tétele adta meg Graphs of degree 3 with a given abstract group c. 1948-as cikkében (l. https://cms.math.ca/cjm/v1/p365):

Frucht tétele: Minden véges csoport előáll egy véges egyszerű gráf automorfizmuscsoportjaként, sőt: egy 3-reguláris egyszerű gráf automorfizmuscsoportjaként is.

A Petersen gráf

A Petersen gráf legismertebb alakja:

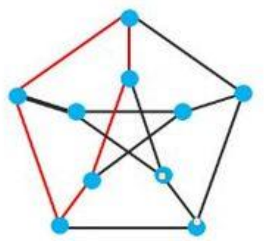


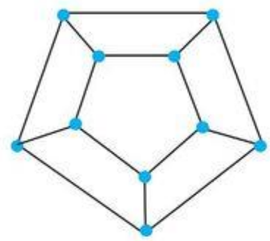
Sok szempontból nevezetes gráf. Így például olyan 3-reguláris gráf, amely nem bontható három 1-faktorra (három, páronként éldiszjunkt teljes párosításra). Ebből következik az is, hogy nincs Hamilton-köre, hiszen az két éldiszjunkt teljes párosítást adna, és a maradó élek is egy teljes párosítást adnának. Ebből az érvből az is kitetszik, hogy az előző állítás bizonyításához elég belátni, hogy bármely két teljes párosításának van közös éle! (MIÉRT?)

A gráfautomorfizmusok bevezetésénél az 5. feladat foglalkozott azzal, hogy hányfajta pont van a Petersen gráfban. Vagyis: hány orbitja van a gráfnak?

"Ránézésre" látszik, hogy a külső pontok bármelyike bármelyikbe átvihető "forgatással", és a megoldásnál láttuk, hogy a külső és a belső kör is felcserélhető automorfizmussal (a csúcsok éltartó permutációjával), tehát a gráf csúcstranzitív, egyetlen orbitból áll.

Ebből az is következik, hogy a belső és a külső élek is átvihetők egymásba automorfizmussal. A "küllőkre" vonatkozott a 10. feladat. Ott kiszíneztünk pirosra egy ötszöget, amelyiknek van küllő-éle is, és olyan automorfizmust kellett keresni, amelyik a külső ötszöget ebbe az ötszögbe viszi:





A 10a feladatban megszámoltuk a gráf ötszögeit, és tisztáztuk, hogy bármely ötszög átvihető bármelyik másikba automorfizmussal. Az is következett ebből, hogy a Petersen gráf bármely éle átvihető bármelyik másikba, tehát éltranzitív (ráadásul az erősebb értelemben): ívtranzitív. Ebből következett az is, ami elsőre talán meglepő, hogy a Petersen gráfnak több automorfizmusa van, mint a látszatra "szimmetrikusabb" fenti gráfnak, ami az ötoldalú hasáb élhálója.

Ennek a gráfnak ugyanis 20 automorfizmusa van: a külső ötszögnek tíz és minden esetben vagy külső marad, vagy felcseréljük a belsővel. A belső ötszög képe ezzel egyértelműen meg van határozva.

Ugyanez elmondható a Petersen gráf olyan automorfizmusairól, amelyek a külső ötszöget a külső ötszögbe viszik (ebből van tíz), illetve amelyek a belsőbe viszik (ebből is van tíz). A fenti feladat azonban új automorfizmusokat ad ehhez. A kérdés ezután

A Petersen gráf automorfizmusainak száma

32. Feladat. Hány automorfizmusa van a Petersen gráfnak?

1. megoldás. A 10. feladatban a piros élekből álló ötszöget átvittük a külső ötszögbe. Ezután az ötszöget még körbe is forgathatjuk és a forgatás után tükrözhetjük is, ez újabb tíz automorfizmust jelent. Öt ilyen ötszög van, ez tehát ötven új automorfizmus. De a külső és belső ötszöget meg is cserélhetjük, ez újabb ötven automorfizmust jelent, így összesen 120 automorfizmust kaptunk.

Több nincs. Ezt így is beláthatjuk: a gráf minden ötszöge vagy öt külső élt tartalmaz, vagy egyet sem – ilyenből egy-egy van –, vagy két szomszédosat (és egy belső élt), vagy egy külsőt és két belső szomszédosat, ilyenből öt-öt van. Ez összesen 12 ötszög és több nincs. Bármelyiket tudjuk kívülre tenni, majd forgatni és tükrözni, tehát mindegyikhez 10-10 automorfizmus tartozik.

Egy másik megoldást abból fogunk kapni, hogy másképp építjük fel a Petersen gráfot. Az alábbi, ismert feladat „új oldaláról" mutatja be a gráfot:

33. feladat. Bergengócia bizonyos városait oda-vissza repülőjárat köt össze. Minden városból legfeljebb három repülőjárat indul és bármely városból bármely másik városba el lehet jutni legfeljebb egy átszállással. Legfeljebb hány városa van Bergengóciának?

Megoldás. Tekintsük Bergengócia városait egy gráf pontjainak, a gráf két pontja között akkor húzzunk be élt, ha van közöttük repülőjárat.

Vegyük Bergengócia egy tetszőleges *x* városát. Legyen S_x azoknak a városoknak a halmaza, amelyekbe van *x*-ből repülőjárat. Legyen továbbá T_x a maradó városok halmaza. A feladat feltétele szerint T_x minden városába megy repülőjárat valamelyik S_x-beli városból. A feladat másik feltétele szerint S_x-ben legfeljebb három város van, s ezekből egyenként legfeljebb két új – *x*-től különböző – városba van repülőjárat, tehát T_x-ben legfeljebb hat város van. Bergengóciában tehát legfeljebb tíz város van.

Még meg kell mutatnunk, hogy Bergengóciának tényleg lehet is tíz városa. Ehhez a következők kellenek:

a) minden *x* városból ténylegesen három járat induljon,

b) S_x városai ne legyenek egymással összekötve,

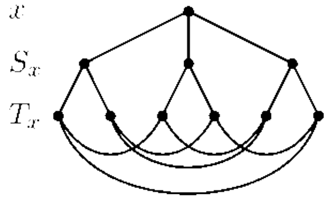
c) S_x semelyik két városából ne induljon T_x azonos városába járat.

Az a) feltétel azt jelenti, hogy nincs három város, amelyek közül bármelyik kettőt járat köt össze, a c) feltétel pedig azt, hogy nincs két város, amelyből egymásba egy átszállással két különböző módon lehetne eljutni. (A két feltételt együtt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy bármely két város között csak egyféleképp lehet legfeljebb egy átszállással közlekedni.)

Ez viszont azt jelenti, hogy T_x bármely városából két járat indul T_x-beli városba. Ez csak úgy lehetséges a) miatt, ha

d) a T_x-beli városok közötti járatok egyetlen hatpontú – gráfelméleti értelemben vett – kört alkotnak.

Ha most a)-d) feltételek figyelembe vételével fel akarjuk rajzolni a járatok által alkotott gráfot, akkor lényegében egyetlen módon tehetjük ezt, amit az ábra mutat. Ez a gráf valóban megfelel a feladat minden feltételének és 10 pontja van.

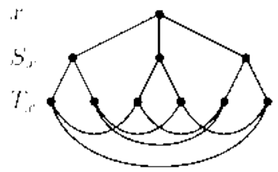


34. feladat. Ebből az alakból nem látszik, hogy a Petersen gráfról van szó. Bizonyítsuk be, hogy a kapott gráf a Petersen gráf.

Megoldás. Ezt kétféleképp tehetjük. Vagy keresünk manuálisan egy izomorfizmust, vagy meggondoljuk, hogy a Petersen gráf megfelel a feltételeknek (tízpontú, nincs benne háromszög és négyszög és kettő az átmérője), másrészt láttuk, hogy csak egy ilyen gráf van.

E feladat segítségével tehát még egy módon megszámolhatjuk a Petersen gráf automorfizmusait:

32. feladat 2. megoldása. A 33. feladat megoldásánál ezt a gráfot kaptuk:



De az is kiderült, hogy a kapott gráf így néz ki, **akármelyik pontjából indulunk**. Az *x* pontot tehát tízféleképp választhatjuk.
De tovább is mehetünk. Az első emelet három pontját (S_x három pontját) is tetszőlegesen permutálhatjuk. Ez további hat lehetőség mind a tíz esetben, eddig tehát már van 60 automorfizmusunk.
És még? Az S_x "első" pontjának megfelelő pont második emeleti szomszédjait is tetszőleges sorrendben letehetjük, ez viszont már meghatározza, hogy az S_x másik két pontjának megfelelő pontok második emeleti szomszédjait milyen sorrendben kell letennünk, hogy a gráfunk egy automorfizmusát kapjuk.
Ez tehát még két lehetőség mind a 60 esetben. Vagyis összesen 120 automorfizmusa van a Petersen gráfnak.

A Petersen gráf további tulajdonságai

Ezek a 33. feladatra adott megoldásból jól kiolvashatók, már használtuk is őket:

A Petersen gráf átmérője kettő. Vagyis bármely két pontja között vagy él, vagy két élből álló út fut. Azt is látjuk, hogy *a legnagyobb ilyen, 3-reguláris gráf.* (Sőt, a legnagyobb kettő átmérőjű gráf, amelyben minden pont foka legfeljebb három. Épp ezt bizonyítottuk.)

Másrészt azt is láthatjuk, hogy *a legkisebb olyan 3-reguláris gráf, amelyben nincs három és négy hosszúságú kör, a legkisebb köre öt hosszú.*

Megjegyzés. A legkisebb olyan 3-reguláris gráfo(ka)t, amely(ek)nek legkisebb köre *k* hosszúságú, (3,*k*)-kalitkának, vagy egyszerűen *k*-kalitkának is szokták nevezni. A Petersen gráf az egyetlen 5-kalitka, az egyetlen 4-kalitka a "3-ház-3-kút" (a 3-3 pontú teljes páros gráf). Az egyetlen 6-kalitka a más szempontokból is fontos Heawood gráf.

A fentiekből a Petersen gráf egy további nevezetes tulajdonsága is következik:

35. (gyakorló) feladat. Jól színezhetők-e a Petersen gráf élei három színnel? (Jó színezésnek az élek olyan színezését nevezzük, ahol azonos színű éleknek nincs közös végpontja.)

Megoldás. Tegyük fel, hogy sikerült három színnel jól kiszíneznünk a gráf éleit. Válasszuk ki az egyik színt és hagyjuk el az ilyen színű éleit. Mivel a gráf 3-reguláris, a maradó két szín 2-reguláris gráfot alkot, tehát pont- és éldiszjunkt körökből áll. Láttuk, hogy a gráf legkisebb körei 5 hosszúak. Másrészt egy páratlan kör éleinek jó színezéséhez három szín kell, tehát a maradó két szín által alkotott gráf csupa páros körből áll. Ez 10 pont esetén csak úgy lehetséges, ha egy 10 pontú körből áll (nincs négy hosszú kör!). Vagyis: a maradó két szín a gráfnak egy Hamilton-körét alkotja. Márpedig ellenőrizhető, hogy a Petersen gráfnak *nincs* Hamilton-köre:
Ha volna Hamilton-köre, az tartalmazna "küllőt", mégpedig páros sokat, tehát vagy kettőt vagy négyet.

- Azonnal látható, hogy négy küllő nem egészíthető ki Hamilton-körré.
- Ha két egymás melletti küllőt tartalmaz, akkor a belső körből fog legalább egy pont kimaradni.
- Ha két nem egymás melletti küllőt tartalmaz, akkor a külső körből fog legalább egy pont kimaradni.

(Az utóbbit úgy is befejezhetjük, hogy automorfizmussal a külső és belső kört megcseréljük, s ekkor már két egymás melletti küllőről van szó.)

Ezzel beláttuk a Petersen gráfnak azt a tulajdonságát, amelyet már a fejezet elején említettünk:

A Petersen gráf ellenpélda arra a sejtésre, hogy minden 3-reguláris gráf élei három színnel jól színezhetők.

Megjegyzés. Ez azért érdekes, mert König egy tétele szerint minden 3-reguláris páros gráf élei három színnel jól színezhetők.

A Petersen gráf automorfizmuscsoportja

A Petersen gráf automorfizmusainak a számára kapott 120 gyanús lehet, hiszen S_5-nek is ennyi eleme van. De a dodekaéder csoportnak is, ami $A_5 \times Z_2$. És van más 120 elemű csoport is (például a Z_{120}). Nem könnyű eldönteni, melyik a Petersen gráf automorfizmuscsoportja. Egy csel segít: A Petersen gráfot megkaphatjuk még egy módon, mint ún. Kneser gráfot.

Kneser gráfok

Definíció. A $KG_{n,k}$ Kneser gráfot a következőképp definiáljuk: csúcsai az $\{1,2,...,n\}$ halmaz k elemű részhalmazai. Két csúcs akkor van összekötve, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak.

Nyilvánvalóak a következők:

ha $k>n/2$, akkor a gráfnak nincsen éle;
$k=n/2$ esetén a gráf egy 1-faktorból (teljes párosításból) áll,
$k=1$ esetén teljes gráfot kapunk.
A háromszögön kívül nincs olyan kör, amely Kneser-gráf volna.

36. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a Petersen gráf alkalmas (n,k) értékekre Kneser gráf.

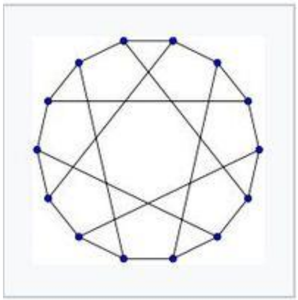
Megoldás. Valójában ez az első "érdekes" Kneser gráf: a Petersen gráf a $KG_{5,2}$ gráf.
Hogyan bizonyítható ez? Nyilván felrajzolhatjuk, és ez aránylag nem nagy munka, hiszen csak tíz pontja van és minden pontja harmadfokú. De egyszerűbben is célt érünk. Az ötelemű halmaz két kételemű részhalmaza vagy diszjunkt, és akkor össze vannak kötve a megfelelő pontok, vagy nem diszjunkt és akkor van egy kételemű halmaz, amelyik mindkettőjüktől diszjunkt, tehát van közös szomszéduk. Tehát bármely pontból eljuthatunk bármely pontba vagy élen, vagy egy kétélű úton: a gráf átmérője kettő.) Vagyis ez a gráf megfelel a 33. feladat feltételeinek. Ott viszont láttuk, hogy egyetlen tízpontú gráf felel meg: a Petersen gráf.

37. Feladat. Az előző feladat alapján bizonyítsuk be, hogy a Petersen gráf automorfizmuscsoportja S_5.

Megoldás. Az rögtön látható, hogy automorfizmuscsoportjának van egy S_5 részcsoportja, hiszen az ötelemű halmaz minden permutációja permutálja a csúcsokat (könnyű látni, hogy az alaphalmaz minden permutációja valóban különböző permutációt ad a gráfban is!). Másrészt láttuk, hogy a Petersen gráfnak pontosan 120 automorfizmusa van, így automorfizmuscsoportja éppen az S_5 szimmetrikus csoport.

A Heawood gráf

A Heawood gráf egyik legismertebb alakja a következő:



A gráf sok tulajdonsága miatt nevezetes. Ezek közül a legegyszerűbbeket a következő feladat tárgyalja:

H1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a Heawood gráf

- páros gráf
- legrövidebb köre 6 élből áll
- élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös pontjuk
- csúcstranzitív
- átmérője 3

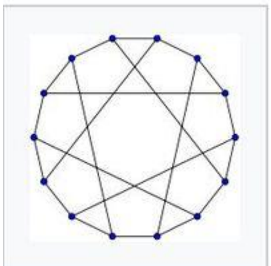
Megoldás.

- Színezzük a 14-szög csúcsait felváltva pirosra és kékre. Világos, hogy csak különböző színű pontok között fut él.
- Hatszög van a gráfban. Mivel a gráf páros, ezért minden köre páros. Így csak annyit kell belátni, hogy nincs benne négy hosszú kör, ami ránézésre látható.
- Az átlók az egyik szín, a 14-szög éleit felváltva színezzük a maradó két színnel. (Két színnel nyilván nem színezhetők az élek, hiszen minden csúcsba három él fut.)
- Azt, hogy a Heawood gráf csúcstranzitív, a 7. feladat c) részében bizonyítottuk.
- Mivel a gráf csúcstranzitív, kiválasztunk egy tetszőleges csúcsot és arra ellenőrizzük, hogy minden más csúcs elérhető belőle legfeljebb három élű úttal. Van olyan csúcs, amely rövidebben nem érhető el.

Kissé nehezebb, ezért különválasztottuk az alábbi feladatot:

H1a feladat. Éltranzitív-e a Heawood gráf?

Megoldás. Nézzük az ábrát:



Az világos, hogy a 14-szög (az ábrán látható Hamilton-kör) élei egymásba vihetők automorfizmussal. Az átlók és a 14-szög éleinek egymásba vihetőségét úgy bizonyítjuk, hogy először mutatunk a gráfnak egy olyan Hamilton-körét, amelynek minden második éle a fenti gráf egy-egy átlója. Ilyet kapunk, ha a csúcsokat valamelyik csúcsból indulva úgy járjuk be, hogy felváltva lépünk egyet pozitív irányba, majd ötöt negatív irányba. (Ha a 14-szög csúcsait sorban, pozitív irányban számozzuk, akkor a {0,1,10,11,6,7,2,3,12,13,8,9,4,5,(0)} sorrendet kapjuk.) Ha felrajzoljuk az így kapott Hamilton-kört, abban minden átló szerepel, és az eredeti Hamilton kör minden második éle marad ki. Ha most az új Hamilton kört rajzoljuk fel szabályos 14-szögként, a kimaradó hét él annak hét átlója lesz, amely ugyanúgy helyezkedik el, mint az eredeti Hamilton-körben az eredeti átlók. Ez tehát egy olyan automorfizmusa a Heawood gráfnak, amely az átlókat "külső" élekkel cseréli fel. Az alábbi permutációról van szó:

```
0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13
0  1  10 11 6  7  2  3  12 13 8   9   4   5
```

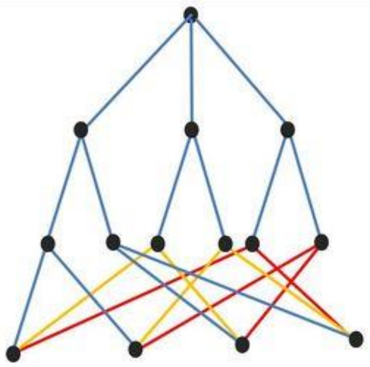
Megjegyzés. Ha az átlókat azokkal az élekkel együtt vesszük, amelyeket a fenti Hamilton-körben kihagytunk, ismét a gráf egy Hamilton-körét kapjuk. Találtunk tehát három olyan teljes párosítást, amelyek közül bármely kettő Hamilton-kört alkot. Másképp: találtunk három olyan teljes párosítást, amelyek közül bármelyiket elhagyva a gráfból a maradó élek Hamilton-kört (s így két éldiszjunkt teljes párosítást) alkotnak. A Heawood gráfnak összesen 24 Hamilton-köre van és a kimaradó élek egy-egy teljes párosítást adnak (l. alább). Ez ekvivalens azzal az állítással, hogy az éleit nyolcféleképpen lehet "jól" színezni, azaz úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontja: minden ilyen színezés három teljes párosítást ad, és ebből bármely kettő Hamilton-kört ad.

A Heawood gráf a legkisebb 3-reguláris gráf, amelynek nincs hatnál rövidebb köre. A Petersen gráf fejezetében bevezetett kifejezéssel: a Heawood gráf 6-kalitka. Ezt az állítást tartalmazza az alábbi feladat "szemléletesebb" fogalmazásban. A feladat egyben mutatja a Heawood gráf rokonságát a Petersen gráffal. A 33. feladatban lényegében szélességi kereséssel állítottuk elő a Petersen gráfot és így bizonyítottuk, hogy az egyetlen 3-reguláris gráf, amelyben a legrövidebb kör hossza öt (vagyis az egyetlen 5-kalitka), majd ennek segítségével meg tudtuk számolni a Petersen gráf automorfizmusait. Ugyanígy az alábbi feladatban a szélességi keresés segítségével állítjuk elő a Heawood gráfot, és ebből azonnal látszani fog, hogy valóban 6-kalitka, sőt, az egyetlen 3-reguláris 14 pontú gráf, amelynek legrövidebb köre hat hosszúságú. Ennek alapján meg fogjuk számolni a Heawood gráf automorfizmusait.

H2. feladat (a 33. feladat „folytatása”). Bergengócia városairól most azt tudjuk, hogy minden városból pontosan három repülőjárat indul és bármely (repülővel tett) körutazás legalább hat várost érint. A kérdés most az, hogy legalább hány város van Bergengóciában?

Megoldás. A 33. feladathoz hasonlóan most is gráffal ábrázoljuk a feladatot. Egy tetszőleges pontból indulva felrajzoljuk az ún. szélességi fát. Az első emeleten három, a második emeleten hat pont lesz és sem az első, sem a második emelet pontjai között nem futhat él, különben lenne egy hatnál rövidebb kör. Ez eddig tíz pont és a második emeleten levő hat pont mindegyikéből még két él indul. Ez 12 él, tehát van még további legalább négy pont.
Vegyük fel ezt a négy pontot és próbáljuk úgy összekötni őket a második emelet hat pontjával, hogy a négy pont mindegyikéből három él induljon és ne keletkezzen négyszög. Ezt lényegében egyféleképpen lehet: ha a hat pont mindegyikét a négy pontból kettővel-kettővel kötünk össze úgy, hogy a hat pontból semelyik kettő ne legyen ugyanazzal a pontpárral összekötve a négyből. Ezt nyilván megtehetjük, hiszen négy pontból hatféleképpen választható ki pontpár. További feltétel, hogy ha két második emeleti pontnak közös az első emeleti őse, akkor ne legyen közös szomszédjuk a négy harmadik emeleti pont között (ez négyszöget

eredményezne). Vagyis két ilyen ponthoz tartozó harmadik emeleti két pontpár diszjunkt legyen. E kikötés mellet már lényegében - ha a harmadik emelet pontjainak elhelyezkedésétől eltekintünk - egyféleképp tehetjük meg, hiszen a négy pontból két-két diszjunkt pontpárt pontosan háromféleképpen választhatunk ki.



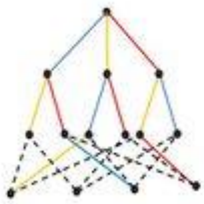
Beláttuk, hogy lényegében egyetlen 14 pontú, 3-reguláris gráf van, amelyben a legrövidebb kör hat hosszúságú. Tudjuk, hogy a Heawood gráf ilyen tulajdonságú, tehát a feladat megoldásaként a Heawood gráfot kaptuk.

Ezzel beláttuk, hogy a Heawood 6-kalitka, azaz a legkisebb olyan 3-reguláris gráf, amelynek legrövidebb köre hat hosszú, és azt is, hogy csak egy ilyen 14 pontú gráf van.

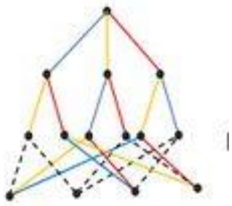
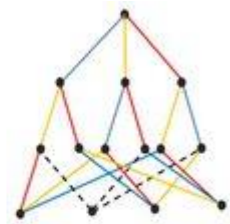
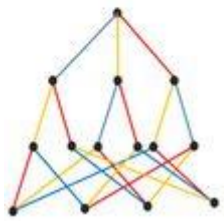
Most pár gyakorló feladat:

HGy1. gyakorló feladat. Hányféleképp lehet a Heawood gráf éleit jól színezni három színnel (azaz úgy színezni, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontja)?
Igaz-e, hogy a fenti jó színezések közül bármely kettő átvihető egymásba automofizmussal?

Megoldás. A fenti H2 feladat megoldásában szereplő ábrát használjuk. Az "emeleteket" fentről lefele számoljuk, a legfelső csúcs a "földszint", alatta az első emelet három pontja, stb. A földszintről három él indul, ezeket három különböző színnel kell színezni (az ábrán sárgát, kéket, pirosat használunk). Az első szint minden pontjából két-két él indul a második szintre, ezek színének sorrendje minden esetben két lehetőséget ad, ez összesen nyolc lehetőség eddig.
Most megmutatjuk, hogy a második és a harmadik szint közötti élek színe ezzel egyértelműen meg van határozva.
Először azt vegyük észre, hogy a legalsó szinten pl. a bal oldalt álló pontból induló három él közül kettő olyanba fut, amelybe már fut sárga él. Így az innen induló harmadik élnek kell sárgának lennie. Ugyanígy találunk egy-egy pirosra, ill. kékre színezendő élt is (a még



meghatározatlan színű éleket szaggatott vonallal jelöljük):
Másodszor azt vegyük észre, hogy a második szinten van már három olyan pont, amelyből induló három él közül kettőnek már rögzítettük a színét. Így a harmadik él színe is meg van

határozva (ismét egy-egy sárga, piros és kék élt kapunk). 
Harmadszor ismét a harmadik szintet nézzük, most itt van három pont, amelyből induló élek közül kettő színe már rögzített. Ezekből induló harmadik él színe is egyértelmű (ismét egy-egy sárga, piros és kék élt kapunk). 
Végül ismét a második szinten találunk három pontot, amelyből induló élek közül kettő-kettő színe már rögzített. A harmadik él színét is behúzva megkapjuk a második és harmadik szint között futó élek egyértelmű színezését: 
A kapott színezés valóban jó színezés.

Ezzel azt is beláttuk, hogy a Heawood gráf éleinek bármely két jó három-színezése a gráf automorfizmusával egymásba vihető.

HGy2. gyakorló feladat. Hány Hamilton-köre van a Heawood gráfnak?

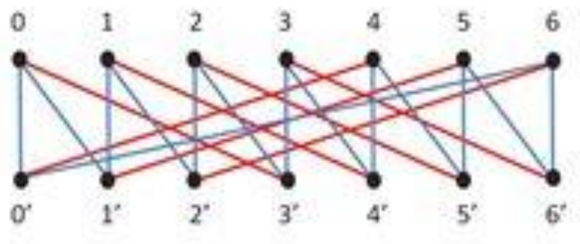
Megoldás. Mivel a gráf 3-reguláris, minden Hamilton-körre igaz, hogy a kimaradó élek egy teljes párosítást adnak. A Hamilton-kör élei két színnel színezhetők. Így minden Hamilton-kör egy három-színezést ad.
Másrészt az előző feladatban láttuk, hogy a Heawood gráf éleinek jó három-színezései automorfizmussal egymásba vihetők. Egy jó három-színezésről már láttuk, hogy bármely két színe Hamilton-kört ad, így bármelyik jó három-színezésre igaz ugyanez. Tehát a gráfnak 24 Hamilton-köre van (és ezek közül bármelyik kettő átvihető automorfizmussal egymásba).

H3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a Fano sík illeszkedési gráfja azonos a Heawood gráffal.
Illeszkedési gráfon azt a páros gráfot értjük, amelynek egyik osztályban a sík pontjai, másikban a sík egyenesei vannak, az élek pedig az illeszkedést jelzik.

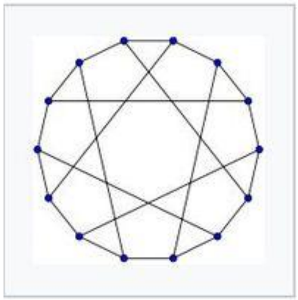
1. megoldás. A definícióból következik, hogy a Fano sík illeszkedési gráfja páros gráf és 3-reguláris (minden pont három egyenesre, minden egyenes három pontra illeszkedik). Nyilván van benne hat hosszú kör. Mivel páros gráf, csak azt kell még belátnunk, hogy nincs benne négy hosszú kör. Ez pedig ekvivalens azzal az állítással, hogy a Fano sík semelyik két pontja nem illeszkedik két egyenesre (hanem pontosan egyre).
A H2. feladatban beláttuk, hogy pontosan egy 14 pontú 3-reguláris gráf van, amelyben a legrövidebb kör hat hosszúságú, és ez a Heawood gráf.

2. megoldás. Ehhez szükségünk van a Heawood gráf egy másik előállítására.

H4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi gráf is a Heawood gráf.

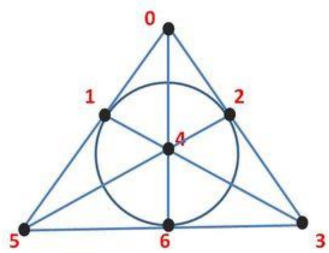


Megoldás. Számozzuk most az eredeti ábrán



a Hamilton kör csúcsait a következőképpen: a legfelső két csúcs közül a jobb oldaliból indulva indulva a másodszomszéd csúcsokat számozzuk negatív irányban sorban nullától hatig, és az *a* számú csúcs negatív irányú szomszédját jelöljük *a*'-vel. Ekkor az *a* számú csúcs éppen az *a*′, az (*a*-1)′ és az (*a*+4)′ jelű csúcsokkal lesz összekötve. (Az összeadást és kivonást mod 7 értjük.) A fenti ábra pontosan ezt mutatja.

A H3. feladat 2. megoldásának befejezése. Azt akarjuk belátni, hogy a Fano sík pontjait és egyeneseit meg tudjuk úgy számozni, hogy éppen a H4. feladat gráfját kapjuk. Ehhez a pontoknak és egyeneseknek egy olyan számozására van szükségünk, amelyben minden *a* = 0,1,...,6 számra az *a* számú egyenesre éppen az *a, a*-1, *a*+4 számú pontok illeszkednek (az összeadást és kivonást ismét mod 7 értve.)
A követelményt még egyszerűsíthetjük is: a csúcsokat úgy kell számoznunk, hogy minden *a* = 0,1,2,...,6-ra legyen egy egyenes, amelyre éppen az *a*-1,*a*,*a*+4 számú pontok illeszkednek. Egy ilyen számozást mutat az alábbi ábra:



Megjegyzés. A számozás megkeresését feladhatjuk külön feladatként is.

Meg akarjuk számolni a Heawood gráf automorfizmusait. Az eddigi előállításokból rögtön látszik, hogy van 28 automorfizmusa (a forgatások és a tükrözések), de ennél sokkal több van.

HGy3 gyakorló feladat. Hány hatszög található a Heawood gráfban?

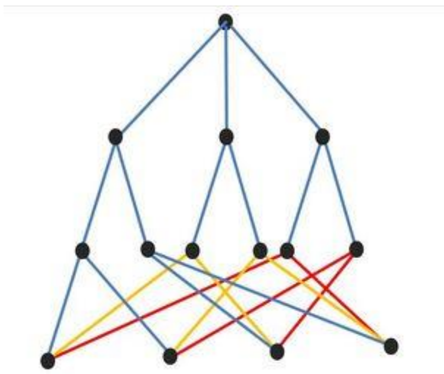
Megoldás. Sokféleképp megszámolhatjuk a hatszögeket. A legegyszerűbb a következő: a Fano sík bármely három csúcsa, amely nem illeszkedik egy egyenesre, meghatároz egy-egy hatszöget az illeszkedési gráfban, vagyis a Heawood gráfban. A hét pontból 35-féleképp választható ki három, ezek közül hét olyan hármas van, amely egy egyenesre illeszkedik. A Heawood gráfban tehát 28 hatszög van.

Megjegyzés. A hatszögek fenti, Fano sík segítségével történő leszámolásából az is könnyen kiolvasható, hogy bármely hatszöghöz három olyan hatszög van, amelytől teljesen diszjunkt. Ezek közül bármelyik kettő szimmetrikus differenciája a harmadik.
Tekinthetjük azt a 28 pontú gráfot, amelynek csúcsai a Heawood gráf hatszögei és a diszjunktakat reprezentáló csúcsokat kötjük össze. Ez az ún. Coxeter gráf, részletesebben lásd itt: https://en.wikipedia.org/wiki/Coxeter_graph

H5. feladat. Hány automorfizmusa van a Heawood gráfnak?

Kétféleképp is megszámoljuk őket.

1. megoldás. A H2. feladat ábráját használjuk, amelyről már tudjuk, hogy a Heawood gráf. Most ennek az ábrának az automorfizmusait számoljuk össze annak alapján, amit már tudunk a Heawood gráfról.



- Tudjuk, hogy a Heawood gráf csúcstranzitív, tehát kiinduló pontnak bármely pontot választhatjuk, ez 14 lehetőség.
- Az első emelet pontjait is tetszőleges sorrendben rajzolhatjuk fel, ez minden esetben hat további lehetőség.
- A második emeleten már vigyáznunk kell: az első két pont sorrendjét még szabadon választhatjuk, sőt a második két pont sorrendjét is, de ezzel már teljesen eldőlt, hogy a harmadik emelet pontjait milyen sorrendben kell felrajzolnunk. A második emelet tehát további négy lehetőséget ad minden esetben.

Összesen tehát 336 automorfizmusa van a Heawood gráfnak.

A másik megoldáshoz azt használjuk, hogy a Heawood gráf a Fano sík illeszkedési gráfja. Először tehát a következő feladatot oldjuk meg:

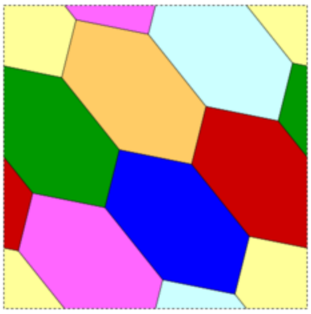
H6. feladat. Hány automorfizmusa van a Fano síknak?

Megoldás. Az első csúcsot bármelyikbe átvihetjük, ez hét lehetőség. Minden esetben a csúcsból indul három egyenes sorrendjét tetszőlegesen választhatjuk, ez minden esetben hat lehetőség. A három egyenesből kettőn egy-egy pontot szabadon választhatunk (a még maradó két-két pontjából). Ez ismét négy-négy lehetőség. Így összesen 168 automorfizmus.

A H5. feladat 2. megoldása. Mint láttuk, a Fano-sík illeszkedés gráfjáról van szó. Elsőre azt gondolhatnánk, hogy ugyanannyi automorfizmusa van a Heawood gráfnak, mint a Fano síknak. Valójában azonban kétszer annyi, hiszen a Fano sík nem érzékeny arra, hogy mit nevezünk "pontnak" és mit "egyenesnek" (dualitás elv). Tehát először megválasztjuk, hogy melyik osztály lesz a csúcsok osztálya, melyik az egyeneseké, és utána mindkét esetben 168 automorfizmust kapunk. Ez összesen 336 automorfizmus.

A Heawood gráf egy további nevezetes tulajdonsága

Az "eredeti" ábrázolásából is látszik, hogy van hét olyan hatszög a gráfban, amelyek közül bármely kettőnek pontosan egy éle közös. Ismeretes, hogy a tóruszra felrajzolható egy olyan térkép, amelyen hét ország van és bármely kettőnek van közös határa. Ezt mutatja az alábbi ábra
(lásd https://en.wikipedia.org/wiki/Heawood_graph#/media/File:7x-torus.svg):



Az ábrázolást "periodikusan" kell érteni: a keretnégyzet felső és az alsó oldalát azonosnak tekintjük, ugyanígy a két függőleges oldalát is. Ezen az ábrán *éppen a Heawood gráfot látjuk*! Ugyanez a rajz bizonyítja egyébként, hogy a tóruszra felrajzolható a teljes hétpontú gráf: az ábrán hét tartomány van, közülük bármely kettő érintkezik élben. Ha minden tartomány közepén kijelölünk egy pontot és a tartomány-határokon át összekötjük őket, akkor egy teljes hétszöget kapunk, amelynek élei nem fogják keresztezni egymást.

A Heawood gráf további érdekes tulajdonságairól itt olvashatunk:
https://en.wikipedia.org/wiki/Heawood_graph