JÁTÉKOS FELADATOK, MATEMATIKAI JÁTÉKOK

Készítette: Rózsáné Motkó Edit
az Ócsai Bolyai János Gimnázium tanára

Bevezetés

Az 57. Rátz László Vándorgyűlésen, Székesfehérváron a szekciók előadásai között nehéz volt választani, hiszen azonos időpontban több olyan téma is szerepelt, ami felkeltette érdeklődésemet. Szívesen meghallgattam volna mindegyiket.

Ezen előadások közül szeretnék most kiemelni kettőt, amelyek különösen nagy hatással voltak rám. *Pósa Lajos: Pillanatképek egy matektábor életéből,* valamint *Benkó Katalin: Egy matek tanár örömei és gondjai.*

Mindkét előadó személyiségéből sugárzott a pálya iránti elhivatottság, és a gyerekek feltétel nélküli szeretete. Példaértékű személyiségek.

Dolgozatom témáját az ő előadásaik motiválták, ahol az algebra és számelmélet területéről válogattam játékokat, illetve játékos feladatokat.

1. feladat

Írjuk fel a három kilencesből álló lehető legnagyobb számot, anélkül, hogy bármilyen matematikai műveleti jelet alkalmaznánk.

Megoldás:

$$9^{9^9}$$

2. feladat

Írjuk fel a három kettesből álló lehető legnagyobb számot, anélkül, hogy bármilyen matematikai műveleti jelet alkalmaznánk.

Megoldás:

A kilencesek „kétemeletes” hatványának felírása után nagy valószínűséggel a ketteseket is így helyeznénk el:

$$2^{2^2}$$

Ezúttal azonban nem a várt eredményt kapjuk. Az így felírt szám nagyon kicsi – még kisebb, mint a közönségesen felírt 222, hiszen csupán azt írtuk fel, hogy 2^4, vagyis 16.
A három kettessel felírható legnagyobb szám nem a 222, sem a 22^2 (azaz: 484), hanem:

$$2^{22} = 4\,194\,304.$$

A példa nagyon tanulságos. Ebből láthatjuk, hogy a matematikában veszélyes csupán az analógiára építeni, mert ez könnyen téves következtetésre vezet.

3. feladat

Írjuk fel a három hármasból álló lehető legnagyobb számot, anélkül, hogy bármilyen matematikai műveleti jelet alkalmaznánk.

Megoldás:

A számjegyek „kétemeletes” elhelyezése itt sem adja a várt eredményt, minthogy

3^{3^3}, azaz 3^{27} kisebb, mint 3^{33}.

Ez utóbbi felírás adja egyben a három hármasból álló legnagyobb számot.

4. feladat

Írjuk fel a három négyesből álló lehető legnagyobb számot, anélkül, hogy bármilyen matematikai műveleti jelet alkalmaznánk.

Megoldás:

Ha az előbbi két feladat mintájára most azt válaszoljuk, hogy

4^{44},

akkor ismét tévedünk, mert ebben az esetben a

4^{4^4}

„kétemeletes” elhelyezés ismét nagyobb számot ad, ugyanis $4^4 = 256$, és 4^{256} nagyobb, mint 4^{44}.

Hogyan lehetséges az, hogy egyes számjegyek „kétemeletes” hatvány formájában olyan elképesztő számóriásokat adnak, mások pedig nem. Vizsgáljuk meg az általános esetet:

<u>*5. feladat*</u>

Írjuk fel a három egyenlő számjegyből álló lehető legnagyobb számot, anélkül, hogy bármilyen matematikai műveleti jelet alkalmaznánk.

Megoldás:

Ha a számjegyeket a-val jelöljük, akkor a

2^{22}, 3^{33}, 4^{44},

hatványmennyiségeket általános alakban így írhatjuk fel:

$a^{10a+a} = a^{11a}$.

A „kétemeletes” hatványmennyiségeket pedig így írhatjuk fel általános alakban:

a^{a^a}.

Határozzuk meg, hogy a-nak milyen értékénél ad az utóbbi kifejezés nagyobb számot, mint az első. Minthogy mindkét hatványmennyiségnek az alapja: a, tehát a kettő közül az lesz a nagyobb, amelyiknek nagyobb a kitevője. Vagyis ha:

$a^a > 11a$.

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát a-val osztva, a következő feltételt kapjuk:

$a^{a-1} > 11$.

Könnyen belátható, hogy az a^{a-1} csak akkor nagyobb, mint 11, ha az a nagyobb, mint 3, mivel

$4^{4-1} > 11$,

a 3^2 és 2^1 hatványok értéke pedig kisebb, mint 11.

Így válnak érthetővé azok a nem várt eredmények, amelyekkel az előbbi példák megoldása folyamán találkoztunk, azaz, hogy a ketteseket és hármasokat másképpen kellett elhelyezni, mint a négyeseket vagy az ennél nagyobb számjegyeket.

Megjegyzés:

Az előző feladatokat tovább vihetjük, ha most négy egyes vagy négy kettes számjegyre fogalmazzuk meg.

Írjuk fel a négy egyesből álló lehető legnagyobb számot, anélkül, hogy bármilyen matematikai műveleti jelet alkalmaznánk.

Írjuk fel a négy kettesből álló lehető legnagyobb számot, anélkül, hogy bármilyen matematikai műveleti jelet alkalmaznánk.

„Vissza az elejére”

Válasszatok egy háromjegyű számot! Írjátok le még egyszer ugyanazt a számot mellé. Így egy hatjegyű számot kaptok. Például, ha a választott szám 637 volt, az így nyert hatjegyű szám 637 637 lesz. A kapott hatjegyű számot osszátok el először 13-mal, az eredményt 11-gyel, végül a kapott hányadost 7-tel.
Mit tapasztaltok? Próbálkozzatok más háromjegyű számmal is! Indokoljátok a tapasztalt jelenséget!

Megoldás:

Ha a kapott hatjegyű számot 13-mal, az eredményt 11-gyel, végül a kapott hányadost 7-tel elosztjuk, visszakapjuk az eredeti háromjegyű számot.
A jelenség magyarázata a következő. Amikor a háromjegyű számot még egyszer leírjuk, a kapott hatjegyű szám a háromjegyű szám (1000+1)=1001- szerese lesz. A 13-mal, 11-gyel majd 7-tel való osztás pedig éppen a 13•11•7=1001-gyel való osztásnak felel meg.

„A gyerekek kora”

Matek János és Szám Olga régi ismerősök, hosszú idő után összetalálkoznak az utcán. Mindig is jó szokásuk volt, hogy nem egyenesen, hanem rejtvényben, feladványban válaszolgattak egymásnak. Hallgassuk ki őket!
MJ:─Hány gyereked van?
SzO: ─Három.
MJ:─Hány évesek?
SzO:─Az életkoruk szorzata 36.
MJ:─Ebből még nem tudom megállapítani a korukat.
SzO:─Életkoruk összege annyi, amennyi a szemközti házon lévő ablakok száma.
MJ:─Még ebből sem tudom…
SzO:─A legidősebb vörös hajú, szemüveges.
MJ:─Aha, most már tudom!
És mi tudjuk?

Megoldás:

Ha a gyerekek életkorának szorzata 36, akkor a gyerekek életkora a 36 prímtényezői lehetnek variálva:

36|2
18|2
 9|3
 3|3
 1|1
 1|

Tényezők szorzata	Összegek
1•1•36	Összege=38
1•2•18	Összege=21
1•4•9	Összege=14
1•6•6	Összege=13
2•2•9	Összege=13
2•3•6	Összege=11
3•3•4	Összege=10

A szemközti ház ablakait pontosan meg lehet számolni, ezért, csak akkor nem tudhatja a megoldást ebből, ha az összeg 13 (mert ebből két megoldás is fakad). A következő segítségből azonban kiderül, hogy van legidősebb gyerek, így csak 2•2•9 lehet a helyes megoldás, mivel az 1•6•6-os variációban nincs legidősebb, csak legfiatalabb.

„Ki szereti az eperfagyit?"

Egy férfi, hogy elüsse unalmas estéjét, bemegy a bárba, rendel egy italt, és szóba elegyedik a csapossal. Kis idő múlva megtudja, hogy a csaposnak három gyermeke van.
― És mennyi idősek a gyerekeid?
― Hát életkoruk szorzata 72.
― Ennyiből képtelenség kitalálnom.
― Rendben van, ha kimész a bárból, és megnézed a házszámot, megtudod az életkoruk összegét is.
― Még mindig nem tudok rájönni.
― A legfiatalabb nagyon szereti az eperfagyit – mondja mosolyogva a csapos.
A kíváncsi férfinak ekkor felcsillan a tekintete:
― Most már tudom!
Mennyi idősek hát a gyerekek?

Megoldás:

Az első információ alapján (az életkorok szorzata 72) a gyermekek életkora a következő lehet (72 prímtényezői szerint):

Tényezők szorzata	Összegek
1•1•72	Összege=74
1•2•36	Összege=39
1•3•24	Összege=28
1•4•18	Összege=23
2•2•18	Összege=22
1•6•12	Összege=19
2•3•12	Összege=17
2•4•9	Összege=15
1•8•9	Összege=18
3•3•8	Összege=14
2•6•6	Összege=14
3•4•6	Összege=13

Ha a második információ sem elég, hogy a három életkort megtudjuk, akkor az összeg egy olyan szám, ami két permutációnak is összege. Ilyen összeg csak egy van, a 14. A lehetséges életkorok ekkor a 8•3•3 és a 6•2•2. A harmadik információ szerint van legfiatalabb gyermek, ezért a csapos gyermekei tehát csak 6,6 és 2 évesek lehetnek.

Megjegyzés:

A gyerekek számára lehet egy beadható feladat, hogy egy választott szám prímfelbontásához feladatot írjanak az osztálynak, és amit egy feladatbankba mentünk.

„Piros-kék korongok”

Egy asztalra sorban 7 korongot helyeztünk el. A korongok egyik oldala piros, a másik kék, és az asztalon lévő korongok egy része piros oldalával, a többi pedig kék oldalával van felfelé. Ketten játszanak. A soron következő mindig kiválaszt egy piros oldalával felfelé álló korongot; s azt, és az összes tőle jobbra levőt átfordítja a másik oldalára. Az veszít, aki nem tud lépni, azaz mindegyik korongnak a kék oldala van fölül.
A kezdőnek vagy a másodiknak van-e nyerő stratégiája, és mi a nyerő stratégia?

Megoldás:

A piros színével felfelé levő korong helyére írjunk 1-est, a kék helyére 0-át; így kapunk egy kettes számrendszerbeli számot, nevezzük ezt „állapotjelző számnak”. Ha egy piros korongot megfordítunk, akkor az állapotjelző szám értéke csökken. Ez azt jelenti, hogy a játék biztosan véget ér néhány lépés után, hiszen az állapotjelző szám értéke minden lépésben csökken, egyszer csak nulla lesz, azaz mindegyik korong a kék oldalával felfelé lesz.
Nincs nyerő stratégia. Ha az utolsó korong kék oldalával felfelé van, akkor a második játékos nyer; ha az utolsó korong piros, akkor a kezdő játékos. Ugyanis minden lépésben egy korong,

az utolsó biztosan megfordul. Az lépésenként váltakozva lesz piros és kék oldalával felfelé. Ha kezdéskor például a piros oldalával van felfelé. akkor midig a kezdő játékos lépését követően fordul kék oldalára, a játék – mint láttuk – egyszer véget ér, s az utolsó lépés a kezdőé lesz, ő nyer.

„Számkitaláló játék”

Írjuk fel öt kartonlapra a következő számokat:

I.	**II.**	**III.**	**IV.**	**V**
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Gondoljatok egy 1 és 31 közé eső egész számra, és nevezzétek meg azokat az oszlopokat, amelyekben a gondolt szám előfordul. Ha valaki erre a III., IV. és V. oszlopot jelöli meg, akkor a gondolt szám a 28. Valóban látjuk, hogy a 28-as mind a három oszlopban szerepel és csak ezekben.

Megoldás:

Magyarázatért a kettes számrendszerhez fordulunk. Az 1 és 31 közé eső egész számok a kettes számrendszerben legfeljebb öt számjegyet tartalmaznak. Az első oszlopba írtuk azokat a számokat, amelyek kettes számrendszerbeli alakjában az egyesek helyén az 1-es számjegy áll (például $17=1\bullet2^4+1$). A II. oszlopba azok kerülnek, ahol a kettesek helyén áll az 1-es számjegy (például $10=1\bullet2^3+1\bullet2$). A III., IV., V. oszlopba hasonlóan azokat a számokat írtuk, amelyeknél a négyesek, nyolcasok, illetve a tizenhatosok helyén áll 1-es számjegy.
Ebből következik, hogy a számot könnyű kitalálni, hiszen csak a táblázatokban szereplő első számokat kell összeadni.
a játék nyilván kiterjeszthető az 1 és 63 közé eső egész számokra is, csak akkor hat oszlopba kell a számokat felírni.

„Fej-írás”

Hogyan lehet egy egész számot azonos típusú fém pénzérmék „fej” és „írás”oldalának felhasználásával kirakni?

Megoldás:

Megállapodás szerint a „fej” 0-t, az „írás” 1-et jelentsen. Ekkor a gondolt számot kettes számrendszerben írva, a pénzdarabokat úgy tesszük egymás mellé, hogy a „fej” és „írás” a megfelelő sorrendben váltakozzék.
Például: $18=1\bullet2^4+0\bullet2^3+0\bullet2^2+1\bullet2^1+0\bullet2^0$. A pénzdarabok sorrendje tehát balról jobbra: írás, fej, fej, írás, fej.

„Súlymérés”

Milyen egész dekagrammos súlyokat mérhetünk az 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 dekagrammos súlydarabokkal? Hogyan mérnénk meg a 39 dekagrammot?

Megoldás:

Az egyes súlyok rendre a kettes számrendszerben felírt számok helyértékének számai. Mivel minden pozitív egész számot felírhatunk kettes számrendszerben, a megadott súlydarabokkal 127 dkg-ig minden súlyt megmérhetünk, ugyanis

$127=1\bullet64+1\bullet32+1\bullet16+1\bullet8+1\bullet4+1\bullet2+1$

A 39 dkg méréséhez írjuk fel kettes számrendszerbeli alakját:
$39=100111_2$. Tehát egy 32 dkg-os, egy 4, egy 2, és egy 1 dkg-os súlyra van szükség.

„A számok kitalálásának művészete”

A számok kitalálásával kapcsolatos „bűvészmutatványoknál”, a bűvész rendszerint műveletek elvégzésére szólít fel: gondoljon egy számot, adjon hozzá kettőt, szorozza meg az eredményt hárommal, vegyen el belőle ötöt, vonja ki belőle a gondolt számot, szorozza meg az eredményt kettővel, vonjon le belőle egyet, azaz mindössze öt, vagy legfeljebb tíz műveletet kell elvégezni. Ezután megkérdezi, hogy milyen eredményhez jutottunk, és ha megkapja a választ, villámgyorsan közli velünk az általunk gondolt számot.

E bűvészmutatvány titka természetesen igen egyszerű, ahhoz, hogy ezt megértsük, elegendő a táblázat jobb oldalára tekinteni, ahol a bűvész utasításai az algebra nyelvén jelennek meg.

gondoljon egy számot	x
adjon hozzá 2	x+2
szorozza meg az eredményt 3-mal	3x+6
vegyen el belőle 5-öt	3x+1
vonja ki a gondolt számot	2x+1
szorozza meg az eredményt 2-vel	4x+2
vonjon le belőle 1-et	4x+1

Ebből az oszlopból kitűnik, hogy ha a gondolt szám x, akkor a műveletek elvégzése után 4x+1 értéket kell kapnunk. Ha ezt tudjuk, könnyű kiszámítanunk a gondolt számot. A végeredményből levonunk egyet, a kapott értéket elosztjuk néggyel és a gondolt számot kapjuk.

Megjegyzés:

Az algebrai műveletek végzésénél, egyenletek megoldásánál színesíthetjük az órát ezekkel a feladatokkal.
Jobban zavarba hozhatjuk a tanulókat azzal, ha arra szólítjuk fel őket, hogy saját maguk, tetszésük szerint, válasszák meg, milyen műveleteket akarnak végezni a gondolt számmal. Kérjünk meg egy gyereket, hogy gondoljon egy számot, és végezze el vele — bármilyen sorrendben — az alábbi műveleteket: adjon hozzá vagy vonjon ki belőle egy adott számot, szorozza meg egy adott számmal, adja hozzá vagy vonja ki belőle a gondolt számot. Valószínűleg a diák, hogy zavarba hozzon bennünket, halmozni fogja a műveleteket.

Például: Gondoltam egy számot, megszoroztam 2-vel, az eredményhez hozzáadtam 3-at, azután hozzáadtam a gondolt számot, majd hozzáadtam 1-et, megszoroztam 2-vel, elvettem a gondolt számot, kivontam 3-at, ismét elvettem a gondolt számot, az eredményből kivontam 2-t, végül megszoroztam 2-vel és hozzáadtam 3-at.

Miután úgy gondolja alaposan összezavart minket, diadalmasan közli velünk: Eredményül 49 jött ki.

Ekkor legnagyobb csodálkozására szinte gondolkodás nélkül rávágjuk, hogy a gondolt szám 5 volt.
Az elmondott műveletek során már kész is az egyenlet 8x+9=49. (49-9):8=5.

Megjegyzés:

* A műveletek között az osztást ne ajánljuk, mert az igen megnehezítheti a „mutatványt”.
* Előfordulhat olyan eset, amikor a mutatvány nem sikerülhet. Ha például: egy sor művelet elvégzése után (magunkban számolva) az x+12 eredményhez jutunk, ebből el kell venni a gondolt számot, ekkor az eredmény 12 és nincs egyenlet.

Ilyenkor a következőképpen járjunk el: mihelyt megkapjuk az eredményt, amelyben nincs x ismeretlen, szakítsuk félbe a diákot: „Állj! Anélkül, hogy kérdeznék valamit, megmondom, hogy milyen számot kaptál. A 12-t!”
Ez aztán alaposan meghökkenti a tanulókat, hiszen még egy szót sem közölt velünk. És, bár nem kaptunk egyenletet, a mutatvány mégis pompásan sikerült.

Felhasznált irodalom

Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből
Typotex Kiadó 2003.

JA. I. Perelman: Szórakoztató algebra
Gondolat Kiadó 1975.

Logikai egypercesek 1
DFT-Hungária Könyvkiadó 2006 (második kiadás)

Logikai egypercesek 2
DFT-Hungária Könyvkiadó 2005 (első kiadás)

Gombos Éva–Somogyi László: Matematika határok nélkül
Scolar Kiadó 1997.

Lukács Ernőné–Rábai Imre: Így könnyű a matematika
Minerva Budapest 1968.