Megoldások

Klasszikus modell

1. *a)* $P_1 = 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216}$; $P_2 = \frac{5^3-4^3}{6^3} = \frac{61}{216}$; $P_3 = \frac{4^3-3^3}{6^3} = \frac{37}{216}$; stb.

   Megjegyzés: Egymást követő köbszámok különbsége:

   $(a+1)^3 - a^3 = 3a(a+1) + 1 \equiv 1(mod\ 6)$

   $b)\ \bar{x} \approx \frac{91}{216} \cdot 1 + \frac{61}{216} \cdot 2 + \frac{37}{216} \cdot 3 + \frac{19}{216} \cdot 4 + \frac{7}{216} \cdot 5 + \frac{1}{216} \cdot 6$

   $\bar{x} \approx \frac{49}{24} \approx 2{,}0417$

2. a) $P_3 = \frac{1}{\binom{8}{3}}$; $P_4 = \frac{\binom{4}{3}-1}{\binom{8}{3}}$; $P_5 = \frac{\binom{5}{3}-\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$;

   $P_6 = \frac{\binom{6}{3}-\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}}$; $P_7 = \frac{\binom{7}{3}-\binom{6}{3}}{\binom{8}{3}}$; $P_8 = \frac{\binom{8}{3}-\binom{7}{3}}{\binom{8}{3}}$

   Megjegyzés: $P_k = \frac{\binom{k}{3}-\binom{k-1}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{8}{3}}$ (*k* = 4; 5; … ; 8)

   Számértékekkel:

   $P_3 = \frac{1}{56}$; $P_4 = \frac{3}{56}$; $P_5 = \frac{6}{56}$; $P_6 = \frac{10}{56}$; $P_7 = \frac{15}{56}$; $P_8 = \frac{21}{56}$

   $b)\ \bar{x} \approx \frac{1}{56}(1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 10 \cdot 6 + 15 \cdot 7 + 21 \cdot 8) = 6{,}75$

   Megjegyzés: $k \cdot \binom{k-1}{2} = 3 \cdot \binom{k}{3}$ miatt az összeg:

   $\bar{x} \approx \frac{1}{\binom{8}{3}} \cdot 3 \cdot \left[\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \ldots + \binom{8}{3}\right] = \frac{1}{\binom{8}{3}} \cdot 3 \cdot \binom{9}{4} = 6{,}75$

3. $P = 1 - \frac{\binom{24}{4}+\binom{28}{4}-\binom{21}{4}}{\binom{32}{4}} \approx 0{,}3016$

   Megjegyzés: formális tagadás (de Morgan)

   ¬(van piros és van ász)≡ nincs piros vagy nincs ász

4.

I. modell	II. modell
összes eset: $\binom{80}{20}$	összes eset: $\binom{80}{10}$
kedvező: $\binom{10}{k}\binom{70}{20-k}$	kedvező: $\binom{20}{k}\binom{60}{10-k}$

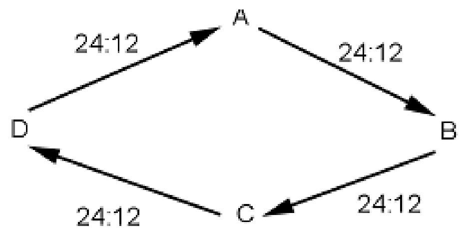
A két modell azonos, hiszen:

$$\frac{\binom{10}{k}\binom{70}{20-k}}{\binom{80}{20}} = \frac{20!\cdot 60!}{80!}\cdot\frac{10!}{k!\cdot(10-k)!}\cdot\frac{70!}{(20-k)!\cdot(50+k)!}$$

$$= \frac{10!\cdot 70!}{80!}\cdot\frac{20!}{k!\cdot(20-k)!}\cdot\frac{60!}{(10-k)!\cdot(50+k)!} = \frac{\binom{20}{k}\cdot\binom{60}{10-k}}{\binom{80}{10}}$$

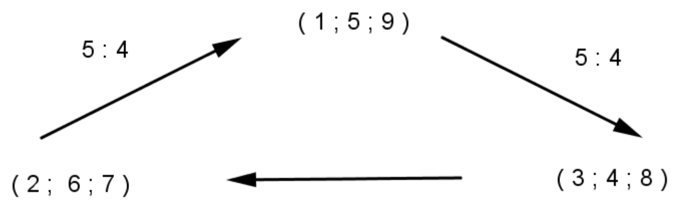
<u>Megjegyzés:</u> Érdekes lehet kiszámítani a KENÓ várható nyereményét → miért <u>nem</u> érdemes játszani

5. A kockák körbeverik egymást:



Bellának van nagyobb esélye. (Az arány A : B = 1 : 2)

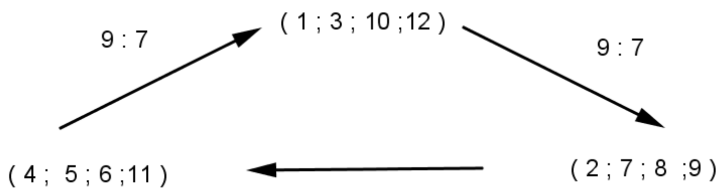
6. a) Az előzőhöz hasonlóan a feladat:



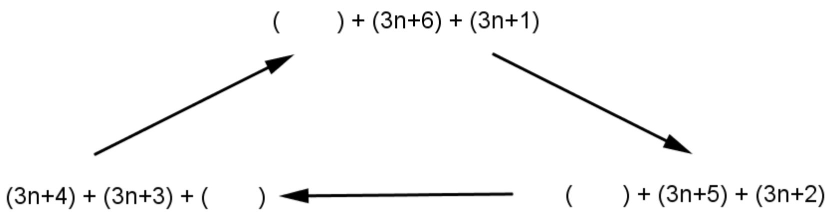
Annának van nagyobb nyerési esélye. (Az arány A : B = 5 : 4)

b) Helyezzünk el 3n db 1-től 3n-ig számozott cédulát 3 db dobozban úgy, hogy a dobozok körbeverjék egymást!

n = 4 esetén egy megfelelő elhelyezés:



Ha valamely n-re megtörtént az elhelyezés, akkor (n +2) - re is megvan:



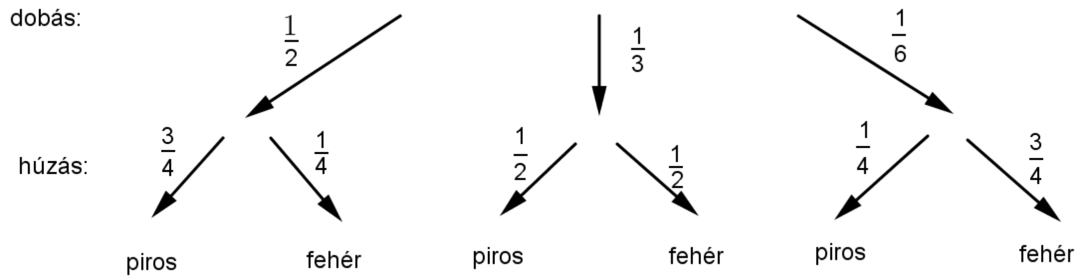
<u>Megjegyzés:</u> Igen szép feladat n = 6 esetre, hiszen ekkor 3 db dobókockára írhatjuk a számokat.

Feltételes valószínűség

1. a) Születésük sorrendjét figyelembe véve 7 olyan lehetőség van, amelyben van fiú, ezek között egy olyan eset van, amikor nincs lány, így a valószínűség értéke: $\frac{6}{7}$

   b) Előzőhöz hasonlóan gondolkodva: $\frac{3}{4}$

2. Alkalmazzunk fa gráfot!



Teljes valószínűség tétele: $P(3.doboz|piros) = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{14}$

3. P (A) = $\frac{1}{2}$; P (B) = $\frac{1}{2}$; P (C) = $\frac{1}{2}$;

   P (AB) = $\frac{1}{4}$; P (AC) = $\frac{1}{8}$; P (BC) = $\frac{1}{4}$;

   Tehát:

   $P(A) \cdot P(B) = P(AB)$; $P(B) \cdot P(C) = P(BC)$; $P(A) \cdot P(C) \neq P(AC)$

   függetlenek: $(A; B)$; $(B; C)$

   nem függetlenek: $(C; A)$ $\Rightarrow$ nincs tranzitív tulajdonság

4. B_j: a legszebb hölgy a j. helyen érkezik

A: Szindbád kiválasztja a legszebb hölgyet

Teljes valószínűség tétele alapján:

$$P(A) = \sum_{j=\prime}^{100} P(A|B_j) \cdot P(B_j)$$

ahol

$P(B_j) = \frac{1}{100}$ (j = 1, 2, …, 100)

$P(A|B_j) = 0$ (j = 1, 2, …36)

Nyilvánvalóan: $P(A|B_{37}) = 1$

A továbbiakban akkor választja ki Szindbád a j. helyen érkező legszebbet, ha az első (j – 1) hölgy közül a legszebb az első 36 hely valamelyikén érkezett. Ennek valószínűsége: $\frac{36}{j-1}$ (j = 38; 39; . . .;100)

Így a keresett valószínűség: $P(A) = \frac{36}{100}\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{37} + \cdots + \frac{1}{99}\right) \approx 0{,}371$

<u>Megjegyzés:</u>

Általánosan: N hölgy; M-et enged el, ahol N „nagy"

$$P(A) = \frac{M}{N}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M+1} + \cdots + \frac{1}{N-1}\right)$$

Adott N esetén mely M-re lesz $P(A)$ a legnagyobb?

Legyen N „nagy". Ekkor

$P(A) \sim \frac{M}{N}(lnN - lnM) = \frac{M}{N} ln \frac{N}{M}$. Legyen $x = \frac{N}{M} > 1$.

$$P(A) \sim f(x) = \frac{lnx}{x} \quad \Rightarrow \quad f^{\prime}(x) = \frac{1-lnx}{x^2}$$

$$f^{\prime}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad lnx = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{M} \sim e \quad \Rightarrow \quad M \sim \frac{N}{e}$$

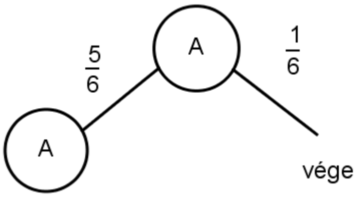
Markov láncok

1. a) $P_n = \frac{5^{n-1} \cdot 1}{6^n} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

b) II: módszer: mértani sor összegzése

$$P(nincs) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 0$$

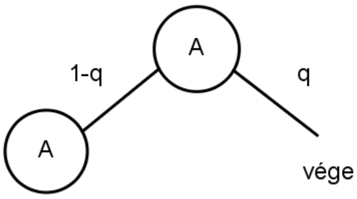
II. módszer: Markov lánc



Legyen p annak valószínűsége, hogy befejeződik.

$$p = \frac{5}{6}p + \frac{1}{6} \Rightarrow p = 1$$

<u>Megjegyzés</u>: Bármely $0 < q < 1$ valószínűség esetén az előző séma alapján:



$$\Rightarrow \quad p = (1-q)p + q \Rightarrow p = 1$$

c) Átlagos dobásszám: k

A séma alapján:

$$k = \frac{5}{6}(k+1) + 1 \cdot \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad k = 6$$

Végtelen sor összegzése:

$$k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot n = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot n$$

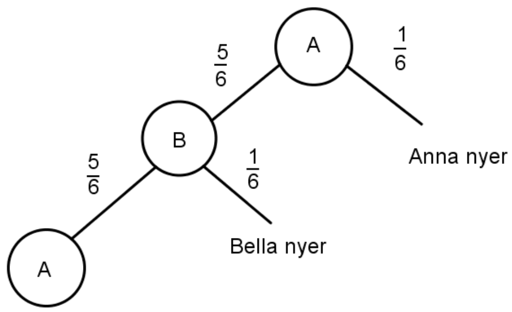
<u>Megjegyzés:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^{)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{)} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2. *P(A)* : Anna nyerési valószínűsége

P(B) : Bella nyerési valószínűsége

Ekkor igazságos játék esetén: $P(A) : P(B) = x : 100$



$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{25}{36} \cdot P(A)$$
$$P(B) = \frac{5}{36} + \frac{25}{36} \cdot P(B) \qquad \Longrightarrow \qquad P(A) = \frac{6}{11} \quad ; \quad P(B) = \frac{5}{11}$$

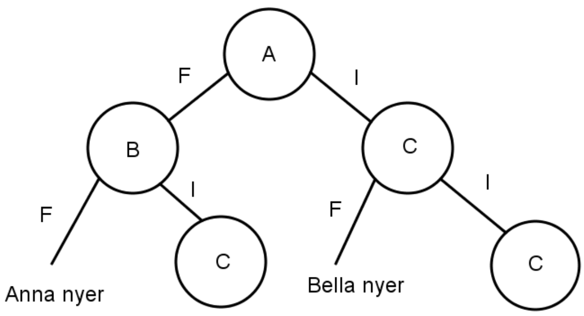
Tehát ezek alapján: $x = 120$

3. a) F és I felcserélhetők (1.) vagy (3.)

I után vége a játéknak (2.)

b) FF II igazságos

IF II igazságos $\overset{?}{\Longrightarrow}$ FF IF igazságos

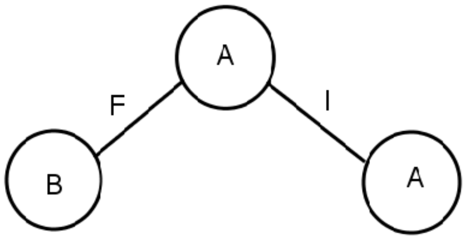


Az 1. b) megjegyzés esetén C-ből 1 valószínűséggel Bella nyer!

$$\Longrightarrow \quad P(Anna) = \frac{1}{4} \quad ; \quad P(Bella) = \frac{3}{4}$$

<u>Megjegyzés:</u> Tehát az „igazságosság” reláció nem tranzitív.

c)



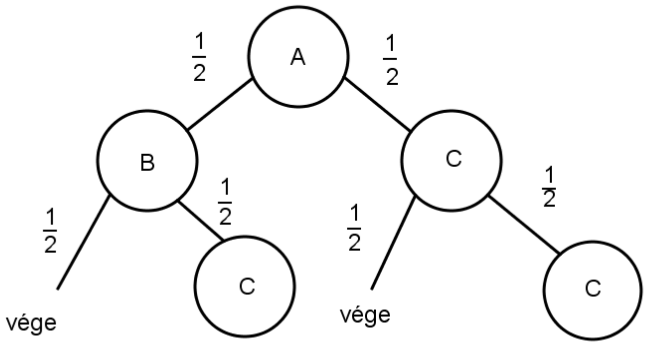
(×)

A $\boxed{B}$ állapotból b) alapján FF $\frac{1}{4}$; IF $\frac{3}{4}$ valószínűséggel nyer ⇒

$$P(Anna) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ P(Anna) \quad \Longrightarrow \quad P(Anna) = \frac{3}{4}$$

$$P(Bella) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ P(Bella) \quad \Rightarrow \quad P(Bella) = \frac{1}{4}$$

d)



$\boxed{A}$ – ból átlagosan k dobás,

$\boxed{C}$ – ből átlagosan l dobás

$$l = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(l + 1) \quad \Rightarrow \quad l = 2$$

Ezzel:

$$k = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2}(2 + 2) = 3$$

e) Legyen az átlagos dobásszám: k ((x) séma)

Ekkor az előző alapján:

$$k = \frac{1}{2} \cdot (3 + 1) + \frac{1}{2}(k + 1)$$

Innen: $k = 5$

Megjegyzés: A 3 hosszú fej-írás sorozatokkal sok érdekesség adható meg, pl.:

FFI kisebb valószínűségű, mint IFF „körbeverés”

IFF kisebb valószínűségű, mint IIF ugyanakkor átlagosan mindegyikre

IIF kisebb valószínűségű, mint FII 8 dobást kell várni

FII kisebb valószínűségű, mint FFI

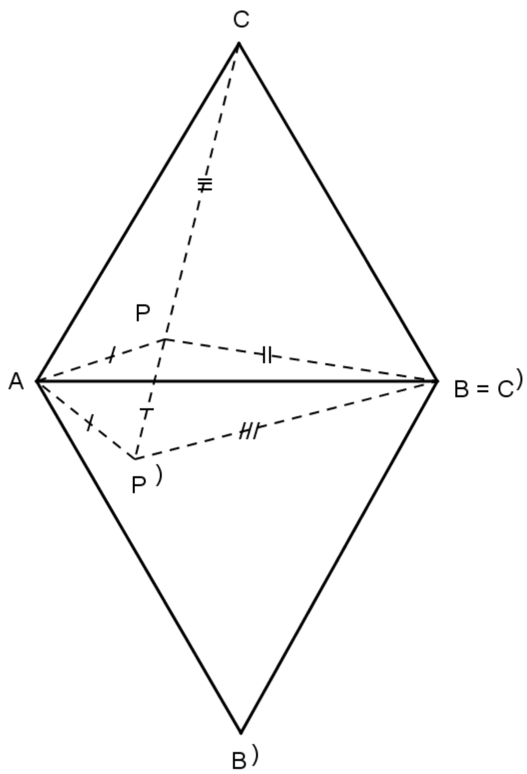
(FIFI átlag 20 dobás

IFII átlag 18 dobás ,de FIFI nagyobb valószínűségű, mint IFII)

Geometriai valószínűség

1. A probléma a véletlenszerű választás sokféle módjáról szól. Ezzel kapcsolatban ötféle megoldást találhatunk Kosztolányi – Makay –Pintér K. – Pitér L. : Matematikai problémakalauz című könyvben.
2.

   a)



Forgassunk pl. A körül (–60°)-kal! Ekkor a $BPP^{)}$ oldalai éppen a csúcsoktól mért távolságszakaszok. ⇒ A háromszög csak akkor nem létezik, ha P valamelyik csúccsal azonos. ⇒ A keresett valószínűség 1.

b) Ismert, hogy szabályos háromszögben bármely belső pont oldalaktól mért távolságösszege a háromszög magasságával egyenlő. ⇒ Pontosan akkor szerkeszthető a szakaszokból háromszög, ha a választott pont a középvonal háromszög belső pontja. ⇒ A keresett valószínűség 0,25.

3 – 4. Ezeket a feladatokat 12. osztályban összefoglaláskor célszerű kitűzni, gyakoroltatva az integrálást és a koordináta-geometriai ismeretek felelevenítését.

Vegyes feladatok

1. Mindkettő helyes

   András megoldásában két nyaklánc azonos, ha forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihetők, míg Béla megoldásában az azonosság csak a forgásszimmetriára vonatkozik. (Természetesen a szerzőnek kell eldönteni, hogy melyiket tekinti az azonosság kritériumának.)

2. Legyen B_n az az esemény, hogy n_0 kísérletre bekövetkezett A.

   Nyilván $P(B_n) = p$

$$\Downarrow$$

$$q_n = (1 - q_{n-1})P(B_n) + q_{n-1}P(\bar{B}_n) = (1 - q_{n-1})p + q_{n-1}(1 - p) = p - q_{n-1}(1 - 2p) \quad (*)$$

Ebből következik az a) állítás.

(A teljes valószínűség tételét használtuk fel.)

b) Nyilván $q_1 = p$

Végigszámolva:

$$q_{10} = \frac{1}{2}(1 - (1 - 2p)^{10})$$

Megjegyzés: $q_n = aq_{n-1} + b \qquad (a \neq 1)$

Keressünk olyan x számot, amelyre a rekurzió

$q_n - x = a(q_{n-1} - x)$ alakra hozható.

Innen az eredetivel összevetve:

$$x = \frac{b}{1-a} \quad \Rightarrow \quad q_n = q_1 a^{n-1} + \frac{b}{1-a} = \left(q_1 - \frac{b}{1-a}\right) a^{n-1} + \frac{b}{1-a}$$

Alkalmazzuk ezt az estünkre:

$$a = 1 - q \quad ; \quad b = p \quad \Rightarrow \quad x = \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}$$

$$q_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)(1-2p)^{n-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}[1 - (1-2p)^n]$$

3.

		1	2	3	4	5	6
		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
1	q_1	2	3	4	5	6	7
2	q_2	3	4	5	6	7	8
3	q_3	4	5	6	7	8	9
4	q_4	5	6	7	8	9	10
5	q_5	6	7	8	9	10	11
6	q_6	7	8	9	10	11	12

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{6} q_i = 1$$

$$p_i\, ;\, q_i > 0$$

$$(i = 1; 2; \ldots; 6)$$

Tegyük fel, hogy létezik ilyen cinkelés!

Ekkor minden összeg $\frac{1}{11}$ valószínűségű.

(1.) 2 összeghez: $p_1 q_1$

(2.) 7 összeghez: $\underline{p_1 q_6} + p_2 q_5 + p_3 q_4 + \cdots + p_5 q_2 + \underline{p_6 q_1}$

(3.) 12 összeghez: $p_6 q_6$

Az (1.) és (2-) összevetéséből: $q_1 > q_6$

A (2.) és (3.) összevetéséből: $q_6 > q_1$

Ellentmondás!

4. Húzzuk ki az 5 db kétjegyű számot egyesével, majd írjuk le ezeket a húzás sorrendjében egymás mellé! Így egy 10-jegyű számot kapunk.

   összes eset: $90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$

   kedvező: minden olyan tízjegyű szám, amely mind a 10 db számjegyet tartalmazza

   A 0 csak páros sorszámú helyen lehet, a többi 9 db jegy sorrendje tetszőleges.

$$\Downarrow$$

$$valószínűség = \frac{5 \cdot 9!}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} \approx 3{,}44 \cdot 10^{-4}$$

5. a)

$$P_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1 \qquad (teleszkópikus\ összeg)$$

   b) átlagos húzásszám ≡ várható érték

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = \infty$$

   <u>Megjegyzés</u>: A hivatali működés modellje