Néhány valószínűségszámítási feladat

Klasszikus modell

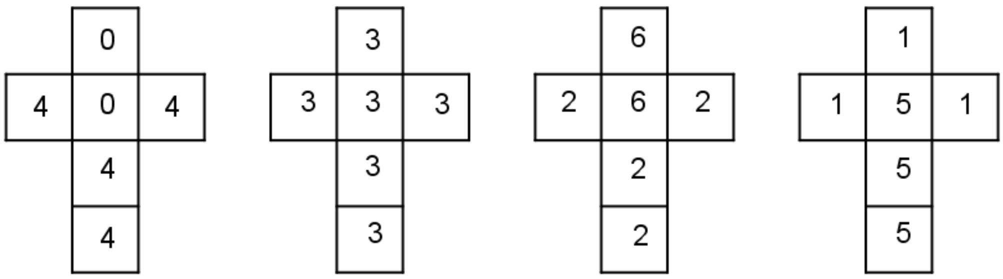
1. Játékkockával háromszor dobunk egymás után.
   a) Mi a valószínűsége, hogy a dobott legkisebb szám k? (k = 1, 2, …, 6)
   b) Ha „nagyon sokszor” elvégezzük az előbbi kísérletet és feljegyezzük a legkisebb dobott számot minden kísérletnél, akkor „várhatóan” mennyi lesz a feljegyzett számok átlaga?

2. Egy dobozban 8 db, 1-től 8-ig számozott cédula van. Bekötött szemmel kihúzunk 3 db cédulát a dobozból.
   a) Mi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott legnagyobb szám k? (k = 3, 4, …, 8)
   b) Az előbbi kísérletet „igen sokszor” elvégezzük és feljegyezzük a kihúzott legnagyobb számot., „Várhatóan” mennyi lesz a feljegyzett számok átlaga?

3. Egy csomag magyar kártyából kihúzunk 4 db lapot. Mi a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között lesz piros is és ász is?

4. A 10-es KENO játékban az első 80 db pozitív egész közül húznak ki sorsoláskor 20 db-ot. A játékosnak a szelvényen az első 80 db pozitív egész közül kell 10 db-ot megjelölni. Mi a valószínűsége, hogy a játékos által megjelölt számok közül éppen k db van a kihúzottak között? (k = 0, 1, 2, …, 10)

5. (Efron kockái)
   Az ábrán látható az A, B, C, D kockák hálója. Anna és Bella a következő játékot játssza: Anna választ egy kockát, majd a maradékból Bella is választ egyet. Ezután mindketten dobnak a kockájukkal. Az nyer, aki nagyobb számot dob. Kinek van nagyobb nyerési esélye?



A B C D

6. Anna és Bella a következő játékot játssza: Megszámoznak 9 db cédulát az 1, 2, …, 9 számokkal. Ezután Anna elhelyezi ezeket 3 db dobozban úgy, hogy mindegyikbe 3–3 cédula kerüljön, majd Bella megnézve a dobozokban lévő cédulákat választ egy dobozt. Miután választott, Anna is választ a maradék két dobozból egyet. Végül bekötött szemmel húznak az általuk választott dobozból egy cédulát. Az nyer, aki nagyobb számot húzott.
   a) Kinek van nagyobb nyerési esélye?
   b) Általánosítsuk a feladatot!

Feltételes valószínűség

1. Egy családról tudjuk, hogy három gyermekük van.
   a) Mi a valószínűsége, hogy van lány a családban, ha az egyik gyermek fiú?
   b) Mi a valószínűsége, hogy van lány a családban, ha a legidősebb gyermek fiú?

   (Feltételezzük, hogy egy gyermek $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lehet fiú vagy lány.)

2. Van 3 db dobozunk. Az első dobozban 1 db fehér, 3 db piros, a második dobozban 2 db fehér, 2 db piros, a harmadikban 3 db fehér, 1 db piros színű, azonos méretű golyó van. Egy játékkockával dobunk. Ha a dobott szám az 1, 2, 3 valamelyike, akkor az első, ha 4 vagy 5, akkor a második, míg ha 6, akkor a harmadik dobozból húzunk ki egy golyót.
   a) Mi a valószínűsége, hogy a kísérletben piros színű golyót húzunk?
   b) Valaki elvégezte a kísérletet és közli, hogy piros színű lett a kihúzott golyó.
      Mi a valószínűsége, hogy a harmadik dobozból húzott?

3. Egy dobozban 8 db 1-től 8-ig számozott cédula van. Bekötött szemmel kihúzunk egy cédulát a dobozból. Legyenek A, B, C a következő események:

   A : 1, 2, 5, 6 valamelyikét húztuk
   B : 1, 2, 3, 4 valamelyikét húztuk
   C : 3, 4, 6, 8 valamelyikét húztuk

   Vizsgáljuk meg, hogy mely eseménypárok függetlenek!

4. Szindbádnak lehetősége van 100 háremhölgy közül egyet kiválasztani oly módon, hogy az előtte egyenként elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat. (Tegyük fel, hogy a hölgyek között egyértelmű szépségi sorrendet tud megállapítani, és hogy a hölgyek bármely elvonulási sorrendje egyenlő valószínűségű.) Szindbád az első 36 hölgyet elengedi, majd a továbbiak közül kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonulónál. Mi a valószínűsége, hogy így a legszebb hölgyet választja?

Markov-láncok

1. Egy játékkockával addig dobunk, amíg 6-os nem lesz az eredmény.
   a) Mi a valószínűsége, hogy éppen n-szer kell dobni?
   b) Mi a valószínűsége, hogy nincs vége a kísérletnek?
   c) Átlagosan hány dobásra van szükség a kísérletben?

2. Anna és Bella a következő játékot játsszák: Egy játékkockával addig dobnak, míg 6-os nem lesz. Ha ez páratlan sorszámú dobásnál következett be, akkor Bella fizet Annának 100 Ft-ot, ha páros sorszámú dobásnál, akkor Anna fizet Bellának x Ft-ot. Mely x-re igazságos a játék?

3. Fej-írás sorozatok: Anna és Bella választ magának egy-egy dobássorozatot. Ezután egy pénzérmével dobnak és az eredményeket feljegyzik. A játéknak akkor van vége, ha valamelyikük által választott dobássorozat megjelenik. Igazságosnak nevezzük a játékot, ha mindkét játékos ugyanakkora valószínűséggel nyer.
   a) Igazoljuk, hogy a következő választásnál a játék igazságos!
      (1.) Anna: FF Bella: II
      (2.) Anna: IF Bella: II
      (3.) Anna: FI Bella: IF
   b) Igazságos-e a következő választás?
      Anna: FF Bella: IF
   c) Anna választása: FIF Belláé: FFF
      Adjuk meg Anna és Bella nyerési esélyét!
   d) Átlagosan hányszor kell dobni a 3. b) játékban?
   e) Átlagosan hányszor kell dobni a 3. c) játékban?

4. „Ferde foci”
   A játék többféle változata megtalálható pl. Orosz Gyula: Markov-láncok című dolgozatában (Fazekas portál)

Geometriai valószínűség

1. „Véletlenszerűen” rajzolva egy háromszöget, mi a valószínűsége, hogy az tompaszögű?

2. Egy szabályos háromszöglap egyik belső pontját egyenletes eloszlás szerint véletlenszerűen kiválasztjuk. Tekintsük a belső pont
   a) csúcsoktól b) oldalaktól való
   távolságszakaszait!
   Mi a valószínűsége, hogy ezekből a szakaszokból háromszög szerkeszthető?

3. Válasszuk meg a p és q számokat a $]-1;1[$-ból egyenletesen, egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége, hogy az $x^2+px+q=0$ egyenletnek van valós gyöke?

4. Válasszuk az x és y számokat a $[0;1]$-ból egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége, hogy
   a) $x+y<1$ és $xy<\frac{4}{25}$?
   b) $x^2+y^2+1\le x+2y$?

Vegyes feladatok

1. 3 db fehér és 5 db piros gyöngy felhasználásával elkészítjük az összes nyakláncot, majd véletlenszerűen választunk egyet. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztott láncban nincs két fehér gyöngy egymás mellett?

András megoldása:

Először felfűzzük a három fehéret, majd az általuk meghatározott három ívre a pirosakat. Erre 5 lehetőség van: (0; 0; 5), (0; 1; 4), (0; 2; 3), (1; 1; 3), (1; 2; 2). Közülük kettő olyan, amelyben fehérek nincsenek egymás mellett, így a valószínűség $\frac{2}{5}$.

Béla megoldása:

Ha egy szakaszon kell elhelyezni a gyöngyöket, akkor azt $\binom{8}{3}$ - féleképpen tehetjük meg, de a nyaklánc körbe fordulhat, így 8 helyen lehet szétvágni, hogy egyenes legyen, így az összes eset $\frac{1}{8}\binom{8}{3}$ = 7. Számoljuk meg hányféleképpen lehet két fehér gyöngy egymás mellett! Két fehér gyöngyöt összeragasztva a lehetséges sorrend $\frac{1}{7}\cdot\frac{7!}{5!}-1=5$, hiszen az egy fehér különbözik a két összeragasztott fehértől, kivéve azt az esetet, amikor egymás mellett vannak. Emiatt a keresett valószínűség $\frac{7-5}{7}=\frac{2}{7}$

Melyik megoldás a helyes?

2. Egy valószínűségi kísérlet egyik A eseményének valószínűsége p = P(A) , ahol 0 < p < 1. A kísérletet n - szer elvégezzük (n ∈ $\boldsymbol{Z}^+$). Jelölje q_n annak valószínűségét, hogy páratlan sok kísérletben következett be az A esemény.
   a) Igazoljuk, hogy $q_n+(2p-1)q_{n+1}=p$!
   b) Adjuk meg q_{10} értékét!

3. „Cinkelhető-e” két kocka úgy, hogy lapjaikon az 1; 2; …;6 számok álljanak, és ezekkel dobva a 2; 3; …; 12 összegek mindegyike egyforma valószínűséggel adódjon?

4. A kétjegyű pozitív egészek közül véletlenszerűen választunk 5 db-ot. Mi a valószínűsége, hogy ezekben mind a 10 db számjegy előfordul?

5. Egy dobozban 2 db azonos méretű golyó van: egy piros és egy fehér. A következő kísérletet végezzük el: Bekötött szemmel húzunk a dobozból. Ha a húzott golyó piros, akkor vége a kísérletnek, ha fehér, akkor 2 db fehér golyót rakunk a dobozba és újra húzunk. Mindaddig ismételjük ezt az eljárást, amíg pirosat nem húzunk.
   a) Mi a valószínűsége, hogy n. húzásnál fejeződik be a kísérlet?
   b) Átlagosan hány húzásra van szükség?

Felhasznált irodalom

- Bognárné–Mogyoródi–Prékopa–Rényi–Szász: Valószínűségszámítás feladatgyűjtemény
  Tankönyvkiadó, 1982
- Prékopa: Valószínűségelmélet
  Müszaki Könyvkiadó, 1972
- Székely: Paradoxonok a véletlen matematikájában
  Müszaki Könyvkiadó, 1982
- Kosztolányi – Makay – Pintér K. – Pintér L.: Matematikai problémakalauz I.
  Poligon, 1999
- Nemetz – Wintsche: Valószínűségszámítás és statisztika mindenkinek
  Poligon, 1999
- Solt: Valószínűségszámítás
  Müszaki Könyvkiadó, 1973
- Orosz Gyula: Markov–láncok
  Fazekas portál
- Orosz Gyula: Feltételes valószínűség a középiskolában
  Fazekas portál