Mátrixok bevezetése

Juhász Péter

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

2017. július 6.

Források

- Erben Péter
- Pataki János
- Berzsenyi: Erben Péter, Kriván Bálint, Nemecskó István
- Youtube
- Néhány saját gondolat

Motiváció

Mi értelme van mátrixokat, lineáris algebrát specmaton tanítani?

Néhány ok:

- Nagyon sok helyen használjuk a matematikában és a természettudományokban.
- Érdekes (bár ez szubjektív).
- Absztrakció, strukturális gondolkodás.
- Kivédeni az egyetemi oktatás hibáit.

Egyetemisták tapasztalata

Problémák

- Nagyon gyors.
- Érthetetlen, hogy miért azok a definíciók, amik (vektortér, mátrixszorzás, determináns).
- ,,Élmény": sok mechanikus számolás.

Kezdés - LER

Lineáris egyenletrendszer

Már kilencedikben felmerül. Alaposabban én tizedikben tárgyalnám.
Versenyt hirdetek LER megoldásra.
Eredmény: Ismeretlenek kiküszöbölése.
Mit lehet csinálni az egyenletekkel, hogy ne változzon a megoldások halmaza? Mit akarunk látni a végén?
Ismét verseny.
Eredmény: Az ismeretleneket nem akarjuk állandóan kiírni. Kapunk egy számtáblázatot és csak azt akarjuk manipulálni.

Kezdés - LER

Lineáris egyenletrendszer

Gauss-elimináció: tisztán algebrai megközelítés. (Heves vita, hogy mi a hatékony megoldás.)
Az ismeretlenek és egyenletek számának kapcsolata a megoldások számával. 9 lehetőség.
,,Városi legenda" tisztázása: ebből csak egy van, ami lehetetlen.

Első nekifutásra én itt megállok.

Egyéb ismeretek

Közben megtanulunk ezt-azt:

- Vektorok
- Koordinátageometria
- Skalárszorzás
- Geometriai transzformációk
- Függvények

Lineáris egyenletrendszer 2.

Nézzük meg, hogy most milyen módszereink vannak a megoldásra.

1. Ismeretlenek kiküszöbölés
2. Egyenlő együtthatók
3. Gauss-elimináció
4. Koordinátageometria

Egy kétismeretlenes lineáris egyenlet egy egyenes egyenlete.
Ha kettő van, akkor ezek egymáshoz képest milyenek lehetnek? Mikor hány megoldás van?

Több ismeretlen

Ha több ismeretlen van, akkor mit jelent egy lineáris egyenlet geometriailag?
Már ez is nehéz.
3 változó esetén ez egy sík.

Mit jelenthet egy egyenletrendszer bal oldala?
Az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontot „elviszi" egy másik pontba.
Gondolhatunk rá egy (elég speciális) geometriai transzformációként is.
Akár úgy is, hogy a tér pontjaira vektorként gondolunk. Mit jelent ebben a kontextusban a teljes egyenletrendszer?
Hogy keressük egy adott pont inverzeit.

Függvény két dimenzióban

Vegyünk egy egyenletrendszert.

$$2x + y = 3$$
$$x - 3y = 5$$

Mi lesz most D_f és R_f ebben a függvényes szemléletben?
Mitől függ? Mikor nem az egész sík az R_f?

Feladat: az egyenlet mátrixában a sorvektorok pontosan akkor párhuzamosak, amikor az oszlopvektorok.

Ha programot kellene írni, akkor mi lenne az IF argumentumában?
Pl. $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.

Geometriai transzformációk

A síkbeli geometriai transzformációk is hasonlóak.
Van itt valami kapcsolat? Próbáljunk az eddig ismert transzformációkhoz ilyen ,,függvényeket" találni.

- Tükrözés a koordinátatengelyekre.
- Középpontos tükrözés
- Tükrözés az $y = x$ egyenesre
- Forgatás
- Középpontos hasonlóság
- Forgatva nyújtás
- Tükrözés tetszőleges egyenesre.
- Eltolás

Műveletek

Hogyan kapom meg két ilyen ,,függvény" összegét, vagy valamelyiknek a 2-szeresét?

Ha a tér (sík) ponjaira vektorokként gondolok, akkor ebből adódik, hogy mi legyen az összeadás és a λ-val való szorzás.

Ezen a ponton elég erőltetett motiváció a mátrixok összeadására és skalárral való szorzására.

Mátrixszorzás

Akár függvényként nézzük a LER-t, akár geometriai transzformációként tekintünk a mátrixokra, felmerül, hogy komponálhatunk ilyeneket. Vagyis megnézhetjük, hogy mikor értelmes két ilyet egymás után elvégezni, és mi lesz az eredő.

$$\begin{pmatrix} 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3x-2y \\ -x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(2x+y)-2(x-3y) \\ -(2x+y)+4(x-3y) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (3\cdot 2+(-2)\cdot 1))x+(3\cdot 1+(-2)\cdot(-3))y \\ ((-1)\cdot 2+4\cdot 1)x+((-1)\cdot 1+4\cdot(-3))y \end{pmatrix}$$

Mátrixszorzás

Ebből a változók ismét elhagyhatók:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1) & 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) \\ (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + 4 \cdot (-3) \end{pmatrix}$$

Még egyszer a két dimenzió

Nézzük a korábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - 3y &= 5 \end{aligned}$$

Nézhetjük ezt úgy is, hogy

$$x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vagyis fel kell bontani a vektort adott irányú komponensek összegére.

Egyenletrendszer mátrixos alakja

Ha megemésztettük a mátrixok szorzását, akkor az ismeretleneket egy $\vec{x}$, a jobboldalakat egy $\vec{b}$ oszlopvektorba ,,tömörítve'', az együtthatókat a Gauss-eliminációnál használt A mátrix alakba írva röviden az egyenlet:

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Akár úgy is gondolhatunk egy LER-re, hogy keresünk vektorokat,

amiknek meg van adva a skalárszorzata bizonyos vektorokkal. Vagyis meg van adva a merőleges vetületük bizonyos vektorokra.

Gauss-elimináció mátrixokkal

Sorcsere

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Gauss-elimináció mátrixokkal

Skalárral szorzás

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7\lambda & 8\lambda & 9\lambda\end{pmatrix}$$

Gauss-elimináció mátrixokkal

Egyik sor skalárszorosának kivonása egy másikból

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 - 2 \cdot 1 & 5 - 2 \cdot 2 & 6 - 2 \cdot 3 \\ 7\lambda & 8\lambda & 9\lambda \end{pmatrix}$$

Gauss-elimináció mátrixokkal

Inverz és megoldás Ha az eredeti egyenletrendszer mátrixa négyzetes, és az alakja:

$$A\vec{v} = \vec{b},$$

illetve az elimináció során a lépéseket az $E_1, E_2, \ldots, E_n$ mátrixok reprezentálják, akkor

$$E_n \cdot E_{n-1} \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I,$$

vagyis

$$A^{-1} = E_n \cdot E_{n-1} \cdot \ldots \cdot E_1.$$

Paralelogramma területe

Probléma: Számoljuk ki a síkban az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét.
Jelöljük a területet $A(\vec{u},\vec{v})$-vel. Mit tudunk?

1. $A(\mathbf{i},\mathbf{j}) = 1.$
2. $A(\vec{u},\vec{u}) = 0.$
3. $A(\lambda\vec{u},\vec{v}) = A(\vec{u},\lambda\vec{v}) = \lambda A(\vec{u},\vec{v}).$
4. $A(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = A(\vec{u},\vec{v}) + A(\vec{u},\vec{w}).$

Mi jön ki ebből? Ezt akartuk?

Paralelogramma területe

Ha λ negatív, akkor az előzőek miatt A értéke negatív is lehet. Ennél több is igaz:

$$A(\vec{u}, \vec{v}) = -A(\vec{v}, \vec{u}).$$

Hiszen

$$0 = A(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) = A(\vec{u}, \vec{u}) + A(\vec{v}, \vec{v}) + A(\vec{u}, \vec{v}) + A(\vec{v}, \vec{u})$$

Ebből pedig az első két tag 0.

Ezen a ponton vitatható, hogy jó-e valamire a negatív terület.

Paralelogramma területe

Mennyi $A(a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}, a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j})$ értéke?
Az eddigiekből ez már következik, hiszen

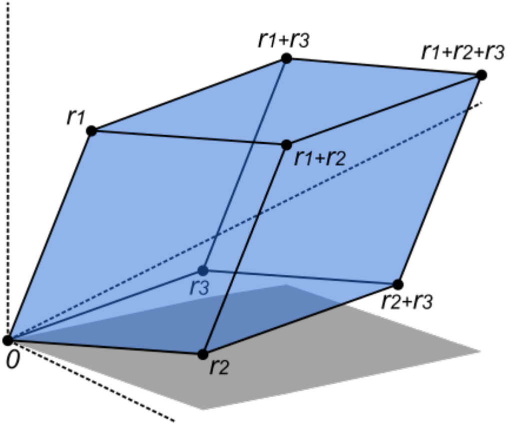
$$A(a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}, a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}) = A(a_1\mathbf{i}, b_1\mathbf{i})+A(a_1\mathbf{i}, b_2\mathbf{j})+A(a_2\mathbf{j}, b_1\mathbf{i})+A(a_2\mathbf{j}, b_2\mathbf{j}).$$

Ebből az első és az utolsó tag 0, vagyis marad

$$A(a_1\mathbf{i}, b_2\mathbf{j}) + A(a_2\mathbf{i}, b_1\mathbf{j}) = a_1 b_2 A(\mathbf{i}, \mathbf{j}) + a_2 b_1 A(\mathbf{j}, \mathbf{i}) = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Paralelepipedon térfogata

Legyen $A(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ három térbeli vektor által meghatározott paralelepipedon térfogata.



Paralelepipedon térfogata

Mit tudunk?

1. $A(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = 1.$
2. $A(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = A(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = A(\vec{v}, \vec{u}, \vec{u}) = 0.$
3. $A(\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = A(\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = A(\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w}) = \lambda A(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$
4. $A(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{z}) = A(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + A(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}).$

Determináns

Mennyi $A(a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}, a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}, a_3\mathbf{i} + b_3\mathbf{j} + c_3\mathbf{k})$ értéke?

Az eddigiekből ez is következik, hiszen ez egy 27 tagú összeg, de ebből 21 értéke 0, mert van benne legalább két egyforma vektor. Marad az a 6, amiben $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ egyaránt megjelennek.

$$A(a_1\mathbf{i}, b_2\mathbf{j}, c_3\mathbf{k}) + A(a_1\mathbf{i}, c_2\mathbf{k}, b_3\mathbf{j}) + \ldots + A(c_1\mathbf{k}, b_2\mathbf{j}, a_3\mathbf{i})$$

Látszik ebből a Sarrus-,,szabály" és a kifejtési tételes számolás is. Sőt, ebből a permutációs definíció is kiolvasható.

Köszönöm a figyelmet.