Bolyai János Matematikai Társulat

Rátz László Vándorgyűlés

2016. Baja

Záródolgozat

dr. Nagy Piroska Mária, Dunakeszi

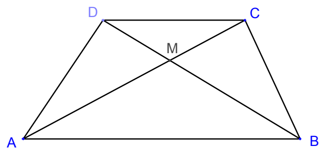
Dunakeszi, 2016.07.11.

A Vándorgyűlésen Erdős Gábor az általános iskolai szekcióban tartott szemináriumot „Valahol már láttam” címmel. Az előadó néhány alap példát és azok versenyfeladatokon való alkalmazását mutatta be.

Dolgozatom ehhez az előadáshoz kapcsolódik.

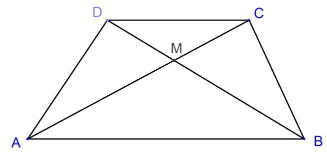
Az előadáson elhangzott egy állítás, melyet részletesen körüljártunk, versenyfeladatokban való előfordulásukat is láttuk, majd az állítás megfordítását is alkalmaztuk egy feladat kapcsán. A megfordítás igazolása nem hangzott el, így dolgozatomben először erre térnék ki.

Az előadáson elhangzott állítás:



Állítás: Az ABCD trapéz alapjai AB és CD, az átlók metszéspontja legyen M. Az AMD és a BMC háromszögek területe megegyezik. (Ezeket a háromszögeket az előadó a trapéz tüdejeinek nevezte.)

Bizonyítás: Az ABD és az ABC háromszögek területe megegyezik, hiszen az egyik oldaluk közös és a hozzá tartozó magasságuk megegyezik a trapéz magasságával. Ezekből a területekből az AMB háromszög területét elvéve nyilván egyenlő területek maradnak, ezek pedig az állításban szereplő háromszögek területei. ♣



Az állítás megfordítása: Az ABCD konvex négyszög átlói az M pontban metszik egymást. Ha az AMD és a BMC háromszögek területe megegyezik, akkor a négyszög AB és CD oldala párhuzamos, azaz a négyszög trapéz.

I. bizonyítás: Az AMD és a BMC szögek megegyeznek, mivel váltószögek, tehát szinuszaik is egyenlők. Így, mivel $t_{AMD} = t_{BMC}$, $MA \cdot MD = MB \cdot MC$ is teljesül. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $\frac{MD}{MC} = \frac{MB}{MA}$. Ami pedig a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt azt jelenti, hogy AB||CD.♣

II. bizonyítás: Ez egy sokkal kevesebb ismeretanyagot feltételező bizonyítás, 8., 9. osztályban is bemutatható:

Az AMD és BMC háromszögeket egészítsük ki az ABM háromszöggel. Mivel M átlók metszéspontjaként keletkezett, a kiegészítésekkel háromszögeket kaptunk. Mivel $t_{AMD} = t_{BMC}$, ezért ha mindkét oldalhoz hozzáadjuk az ABM háromszög területét, továbbra is egyenlő területeket kapunk, azaz $t_{ABD} = t_{ABC}$. Az ABD és ABC háromszögek AB oldal közös, így a területük egyenlőségéből az AB oldalhoz tartozó magasságuk egyenlősége következik. Az ABCD négyszög konvex, így az AB egyenes ugyanazon oldalán, az előzőek miatt az AB egyenestől ugyanakkora távolságra található a négyszög másik két pontja, azaz AB || CD. ♣

A továbbiakban az előadás tematikáját követve egy alapfeladathoz gyűjtöttem további feladatokat, többek között versenyfeladatokat is.

Az alapgondolat a következő:
Az egyenlet vagy egyenlőtlenség megoldásakor a két oldal értékkészletét vizsgáljuk. A vizsgálat során megállapítjuk, hogy az egyik oldal egy konkrét értéknél kisebb, vagy azzal egyenlő, a másik oldal pedig ennél a konkrét értéknél nagyobb, vagy azzal egyenlő. Ezek után egyenlőség csak abban az esetben állhat fenn, ha mindkét oldal a konkrét értékkel egyezik meg. Egyenlőtlenség esetén pedig a relációjel állásától függően vagy mindig igaz az állítás, vagy sosem, vagy csak az egyenlőség állhat fenn.
A feladattípus már 9. osztályban tanítható, alappéldaként a Mozaik Kiadó Színes Matematika 9. osztályos tankönyvéből választottam egy példát:

Az alapfeladat: Oldjuk meg a következő egyenletet: $\sqrt{3x-6}+|x+y|=-z^2+2z-1$ (Sokszínű matematika 9. o., 156/3/f. Mozaik Kiadó)

1. megoldás:
Elsőre ijesztőnek tűnhet az egyenlet a sok ismeretlen, a sok függvény, a másodfokú kifejezés miatt, de épp ez a sokféleség adhat ötletet, hogy ne rendezéssel, esetszétválasztással próbálkozzunk, hanem az értékkészletet vizsgáljuk.
A bal oldalon két nemnegatív kifejezés összege szerepel, a jobb oldalt pedig teljes négyzetté egészíthetjük ki:

$$\sqrt{3x-6}+|x+y|=-(z-1)^2$$

Mindkét oldal értékkészletét vizsgálva az egyenlet bal oldala csak nemnegatív, jobb oldala csak nempozitív lehet. Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha mindkét oldal pontosan 0. Így $z=1$ adódik.
A bal oldal mindkét tagja nemnegatív, összegük csak akkor lehet 0, ha mindkét tag értéke 0. Így $x=2$ és $y=-2$ adódik. Az értékek helyessége behelyettesítéssel ellenőrizhető.

2. megoldás:
Rendezzük 0-ra az egyenletet. Algebrai átalakítások után kapjuk:

$$\sqrt{3x-6}+|x+y|+(z-1)^2=0$$

A bal oldalon mindhárom tag csak nemnegatív értékeket vehet fel, így összegük csak úgy lehet 0, ha a tagok mindegyike 0. Így adódik az $x=2$, $y=-2$ és $z=1$. A megoldás helyessége behelyettesítéssel ellenőrizhető.

1. feladat: Mely x és y valós számokra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$x+y+xy \geq x^2+y^2+1$$

(AD 2014/15 Kezdő I., II. kat. 2. forduló, II. kat. 1. forduló 1. feladat)

1. megoldás: A tagokat egy oldalra rendezve és 2-vel megszorozva az egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy $0 \geq 2\left(x^2+y^2+1-x-y-xy\right)$

A jobb oldalt átalakítva kapjuk: $0 \geq (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2$

A jobb oldal mindhárom tagja nemnegatív, ezért mindhárom értéke csak 0 lehet, tehát: $x = y$, $x = 1$ és $y = 1$. Így az egyenlőtlenség csak az $x = 1$ és $y = 1$ számokra teljesül. Az egyenlőség is ebben az esetben áll fenn.

2. megoldás:

A feladat megoldható a rendezési tétellel is:

Tétel (rendezési tétel): Adott két szám n-es: $\left[x_1; x_2 \ldots x_n\right]$ és $\left[y_1; y_2 \ldots y_n\right]$. Képezzük a következő összegeket: $A=\sum x_i y_i$ az x és y számok minden permutációja esetén. Az így képzett összeg akkor lesz maximális, ha az x és y számok azonosan rendezettek (azaz az egyik szám n-esből a legnygobbat a másik szám n-es legnagyobb elemével szorozzuk, a második legnagyobbat a második legnagyobbal és így tovább, végül a két szám n-es legkisebb elemét szorozzuk egymással), akkor lesz minimális, ha ellentétesen rendezettek (azaz az egyik szám n-es legkisebb elemét a másik szám n-es legnagyobb elemével szorozzuk, stb), egyéb esetekben pedig e két összeg közé esik az értéke. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a szám n-esekben minden szám azonos.

Az egyik és a másik számhármas is legyen $[x; y; 1]$. Az egyenlőtlenség jobb oldalán az azonosan rendezett összeget látjuk $\begin{bmatrix} x; y; 1 \\ x; y; 1 \end{bmatrix}$, a bal oldalon pedig egy átrendezettet $\begin{bmatrix} x; 1; y \\ 1; y; x \end{bmatrix}$. Azaz a rendezési tétel szerint:

$$x+y+xy \leq x^2+y^2+1$$

Ezt a kitűzött feladattal egybevetve látható, hogy csak az egyenlőség teljesülhet, az pedig akkor áll fenn, ha a számhármas tagjai egyenlők, azaz $x = y = 1$.

2. feladat: Oldjuk meg az egyenletet a valós $(x;y)$ számpárok halmazán!

$$4-x^2-2\sqrt{9-x^2}=-\left|\frac{y+3}{2y-1}-1\right|-6$$

(AD 2014/15 Haladó II. kat. 2. forduló 1. feladat)

1. megoldás: Az egyenlet értelmezési tartománya: $9-x^2\geq 0$, azaz $-3\leq x\leq 3$, másrészt $2y-1\neq 0$, azaz $y\neq\frac{1}{2}$.

Az egyenletet rendezve, majd a bal oldalt alakítva:

$$9-x^2-2\sqrt{9-x^2}+1=-\left|\frac{y+3}{2y-1}-1\right|$$

$$\left(\sqrt{9-x^2}-1\right)^2=-\left|\frac{y+3}{2y-1}-1\right|$$

Az egyenlet bal oldala nemnegatív, jobb oldala nempozitív. Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha mindkét oldal értéke 0 :

$$\left(\sqrt{9-x^2}-1\right)^2=0$$

$$\sqrt{9-x^2}=1$$

$$x^2=8$$

$$|x|=2\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{y+3}{2y-1}-1\right|=0\ \rightarrow\ \frac{y+3}{2y-1}=1$$

$$y+3=2y-1$$

$$4=y$$

Azaz a keresett számpárok: $\left(2\sqrt{2};4\right)$ és $\left(-2\sqrt{2};4\right)$, amelyek a kikötésnek megfelelnek és ellenőrzéssel látható, hogy az egyenletet is kielégítik.

2. megoldás: Ez a feladat is megoldható egy oldalra rendezéssel, mint az előző feladat.

3. feladat: Az a valós paraméter mely értékeire lesz az

$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right|+x^2-2x-1=0$$

egyenletnek pontosan egy valós megoldása?

(OKTV 2013/14 I. kat. 2. forduló 2. feladat)

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \neq 2a$.

Azonos átalakításokat végezve:

$$\left|\frac{(x-2a)^2+1}{x-2a}\right|+x^2-2x+1-2=0$$

$$\left|\frac{(x-2a)^2+1}{x-2a}\right|+(x-1)^2-2=0$$

A bal oldalon szereplő tört számlálója biztosan pozitív, a számlálóban az abszolútérték-jel elhagyható:

$$\frac{(x-2a)^2+1}{|x-2a|}+(x-1)^2-2=0$$

Az egyenletet tovább alakítva:

$$|x-2a|+\frac{1}{|x-2a|}+(x-1)^2=2$$

Egy pozitív számnak és reciprokának az összege legalább 2, tehát az egyenlet bal oldala 2, vagy annál nagyobb lehet, hiszen a bal oldalon álló harmadik tag is nemnegatív. Azaz az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha az első és második tag értéke 1, a harmadiké pedig 0.

Tehát az egyenletnek csak $x=1$ és $|x-2a|=1$ esetén lehet megoldása. Azaz $|1-2a|=1$, így $a=0$ vagy $a=1$. Meg kell még vizsgálni, hogy ezekben az esetekben hány megoldása van az egyenletnek.

$a=0$ esetén az eredeti egyenlet:

$$\left|\frac{x^2+1}{x}\right|+x^2-2x-1=0$$

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|+(x-1)^2=2$$

Az abszolút értékes kifejezés legalább 2, a négyzetes pedig legalább 0, így a bal oldal legalább 2. Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha mindkét tag a minimumát veszi fel. Ez $x=1$ esetén teljesül csak, tehát az egyenletnek tényleg csak 1 megoldása van.

$a=1$ esetén az eredeti egyenlet:

$$\left|\frac{x^2-4x+5}{x-2}\right|+x^2-2x-1=0$$

$$\left|\frac{(x-2)^2+1}{x-2}\right|+(x-1)^2=2$$

$$\left|(x-2)+\frac{1}{x-2}\right|+(x-1)^2=2$$

Az abszolút értékes kifejezés legalább 2, a négyzetes pedig legalább 0, így a bal oldal legalább 2. Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha mindkét tag a minimumát veszi fel. A négyzetes kifejezésnek $x=1$ esetén van minimuma, ekkor az abszolútértékes kifejezés is a minimumát veszi fel, tehát tényleg egy megoldása van az egyenletnek.

Azaz az egyenletnek pontosan 1 megoldása van, ha az *a* paraméter az $a=0$ vagy $a=1$ értéket veszi fel.

4. feladat: Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok (számpárok) halmazán:

a) $-\sqrt{-x}=2|2x+2|$

b) $\sqrt{-x-4}+2=0$

c) $x^2+y^2=4x-6y-15$

(Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten; Műszaki Kiadó)

Megoldás: *a)* Az egyenlet bal oldala 0-nál kisebb, vagy egyenlő, jobb oldala viszont 0-nál nagyobb, vagy egyenlő. Egyenlőség csak akkor állhatna fenn, ha mindkét oldal értéke 0 lenne. A bal oldal $x=0$ esetén veszi fel a 0 értéket, a jobb oldal pedig $x=-1$ esetén. Így az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

b) A bal oldalon álló gyökös kifejezés értéke nemnegatív, ezt kettővel növelve 2-nél nem kisebb értéket kapunk. A jobb oldal viszont kisebb 2-nél, hiszen 0. Így az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

c) Az egyenletet rendezve, majd teljes négyzeteket előállítva:

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9=-2$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=-2$$

Az egyenlet bal oldala 0-nál nem kisebb, a jobb oldala viszont igen, így az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

A trigonometrikus függvények megismerése után ismét sok alkalom adódik az értékkészlet vizsgálatával való egyenletmegoldásra.

5. feladat: Oldjuk meg az egyenletet a valós számpárok halmazán:

$$sin(x+y)+cos(x-2y)=2$$

(Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten; Műszaki Kiadó)

Megoldás: Mivel a $sin\,x$ és a $cos\,x$ függvények értéke legfeljebb 1 lehet, azért az egyenlet bal oldalának értéke legfeljebb 2 lehet. Az egyenlőség tehát csak akkor állhat fenn, ha a bal oldal mindkét tagja az 1 értéket veszi fel. Azaz:

$sin(x+y)=1$ és $cos(x-2y)=1$. Tehát a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x-2y&=2l\pi \end{aligned}\right\} \qquad k,l\in Z$$

A felső egyenletből az alsót kivonva:

$3y=\frac{\pi}{2}+2m\pi$, azaz $y=\frac{\pi}{6}+2m\frac{\pi}{3},\ m\in Z$.

Majd az első egyenlet 2-szereséhez az alsó egyenletet hozzáadva:

$3x=\pi+2n\pi$, azaz $x=\frac{\pi}{3}+2n\frac{\pi}{3},\quad n\in Z$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető a gyökök helyessége.

6. feladat: Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $1-x^2-x^4=4^{sin^2 x}$. (KöMaL próbaérettségi)

Megoldás: Mivel $0\le sin^2 x\le 1$, az egyenlet jobb oldala $1\le 4^{sin^2 x}\le 4$ esik bármit is írunk *x* helyére. $x^2\ge 0$ és $x^4\ge 0$, ezért az egyenlet bal oldala legfeljebb 1 lehet. Tehát egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha mindkét oldal értéke 1. Ez csak *x=0* esetén következik be, azaz az egyenlet megoldása *x=0.*

7. feladat. Mutassuk meg, hogy nincs olyan valós $(x; y)$ számpár, amelyre

$$\left.\begin{array}{l}\left(x^2+5\right)^2=25-|y-3| \\ 21x+63y=188\end{array}\right\}$$

(KöMaL próbaérettségi)

Megoldás: Az első egyenlet bal oldala 25, vagy annál nagyobb, jobb oldala pedig 25 vagy annál kisebb értékeket vehet fel. Tehát egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $x=0$ és $y=3$. Ezeket az értékeket a második egyenletbe helyettesítve: $21\cdot 0+63\cdot 3=189\neq 188$. Azaz az egyenletrendszernek valóban nincs megoldása.