VÁLOGATÁS TANÍTVÁNYAINK MEGOLDÁSAIBÓL

1. **(B.3663.)** Az x, y, z pozitív egészekről tudjuk, hogy $(x+y)^2+(x+z)^2=(y+z)^2$. Igazoljuk, hogy van közöttük páros szám!

   Megoldásvázlat: (Magda Gábor)
   Legyenek egy háromszög oldalai: x + y, x + z, y + z. A feltétel szerint a háromszög derékszögű és a beírt kör sugara ekkor éppen x.
   Írjuk fel a területét kétféleképpen:
   $$\frac{(x+y)(x+z)}{2}=x(x+y+z)$$
   Ha x, y, z, mind páratlan, akkor a bal oldal páros, míg a jobb oldal páratlan, ami ellentmondás.

2. **(B.4297.)** Igazoljuk, hogy tetszőleges x, y valós számokra:
   $$-\frac{1}{2}\le\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\le\frac{1}{2}$$

   Megoldásvázlat: (Perjési Gábor)

   Legyen $x=tg\alpha$, $y=tg\beta$, ahol α, β ∈ $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

   Ekkor

   $$x+y=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\ \cos\beta};\qquad 1+x^2=1+\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}=\frac{1}{cos^2\alpha}$$

   $$1-xy=1-\frac{\sin\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\qquad 1+y^2=\frac{1}{cos^2\beta}$$

   Ezeket felhasználva:
   $$\left|\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right|=|\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)|=\frac{1}{2}|\sin 2(\alpha+\beta)|\le\frac{1}{2}$$
   Egyenlőség pontosan akkor, ha $|\sin 2(\alpha+\beta)|=1\ \leftrightarrow\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\quad(k\in\boldsymbol{Z})$

3. **(B.4666.)** Legyen n pozitív egész. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]^2$$

ahol $[x]$ az x valós szám egészrésze.

Megoldásvázlat: (Hansel Soma)
Rajzoljunk egy koordinátarendszer első síknegyedébe egy oszlopdiagramot úgy, hogy az x tengely k-adik egységszakaszára $\left[\frac{n}{k}\right]^2$ magas oszlop kerüljön. Ekkor az oszlopok területének összege éppen a jobb oldali összeg. Most tekintsük ezt, mint sordiagramot és vizsgáljuk meg, hogy milyen hosszú a sor a $(k-1)^2$ - ediktől a k^2-edik egységszakaszig terjedő tartományban. Mivel minden eredeti oszlop magassága négyzetszám, ezért ezek a sorok egy téglalapot alkotnak, melynek egyik oldala $k^2-(k-1)^2=2k-1$. A másik oldal pedig az az x hossz, amelyre

$$\left[\frac{n}{x}\right]^2 \geq k^2 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{n}{x}\right)^2 \geq k^2 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{n}{k}\right)^2 \geq x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{n}{k} \geq x$$

Mivel x egész, ezért $\left[\frac{n}{k}\right] \geq x$

Így ennek a téglalapnak a területe $(2k-1)x=(2k-1)\left[\frac{n}{k}\right]$, vagyis a bal oldali összeg is a diagram területét adja.

4. Legyen ABC hegyesszögű háromszög. Az A-ból, B-ből, C-ből induló súlyvonalak egyenesei a körülírt kört másodszor A_1, B_1, C_1 pontokban metszik. Igazoljuk, hogy az $AB_1CA_1BC_1$ hatszög területe legalább kétszerese az ABC háromszög területének!

Megoldásvázlat: (Márton Sándor)
Tudjuk, hogy a magasságpontnak az oldalakra illetve az oldalfelező pontokra vonatkozó tükörképei a körülírt körön vannak. Legyen pl. az M magasságpontnak a BC oldalra, illetve ennek felezőpontjára való tükörképe M_1 illetve M_2. Ekkor az A_1 az M_1M_2 (rövidebb) köríven van, így legalább olyan távol van BC-től, mint M_1 (vagy M_2). Emiatt $T(BCA_1)\geq T(BCM_1)=T(BCM)$
Ugyanezt a többi oldalra alkalmazva és a kapott relációkat összeadva a kívánt állításhoz jutunk.
Megjegyzés: Az állítás bármely háromszögre igaz, egyenlőség pontosan akkor, ha ABC szabályos.

5. **(A. 230.)** Határozzuk meg azokat az n egész számokat, amelyekre

$$\frac{n^{2000}-1}{n-1} \text{ négyzetszám!}$$

Megoldásvázlat: (Varjú Péter)

Ha $n<-1$, akkor a kifejezés negatív; $n=-1$ és $n=0$ megfelelő; $n=1$ esetén a nevező 0.

Feltehető, hogy $n \geq 2$.

$$\frac{n^{2000}-1}{n-1} = (n^{1000}+1)(n^{500}+1)\,\frac{n^{500}-1}{n-1}$$

Legyen a három tényező rendre A, B, C.

Könnyen belátható, hogy $B\,|A-2$, $C\,|A-2,$ $C\,|B-2,$

így A, B, C közül bármely kettő legnagyobb közös osztója legfeljebb 2.

Három ilyen szám szorzata csak úgy lehet négyzetszám, ha mindegyik négyzetszám vagy négyzetszám kétszerese. Mivel A és B 1-gyel nagyobbak egy pozitív négyzetszámnál, ezért nem négyzetszámok.

Legyen $A=n^{1000}+1=2x^2$, $B=n^{500}+1=2y^2$.

Ekkor

$$n^{250}y=\sqrt{\frac{n^{1000}+n^{500}}{2}}>\sqrt{\frac{n^{1000}+1}{2}}=x$$

Mivel ezek egész számok. ezért

$$\sqrt{\frac{n^{1000}+n^{500}}{2}} \geq \sqrt{\frac{n^{1000}+1}{2}}+1>\frac{n^{500}}{\sqrt{2}}+1$$

Innen négyzetre emelve, rendezve:

$$n^{500}<-\frac{2}{2\sqrt{2}-1}$$

6. **(B.3849.)** Egy szabályos pénzérmével addig dobunk, míg legalább egyszer kapunk fejet is és írást is. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

Megoldásvázlat: (Jankó Zsuzsanna)

Az első dobás után – bármit is dobtunk – az ellenkező kimenetelre várunk. Mivel ennek valószínűsége $\frac{1}{2}$, ezért várhatóan 2 dobás után következik be. Tehát a szükséges dobások várható értéke 3.

7. **(B.3229.)** Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan x, y, z racionális számhármas van, amelyekre

$$\{x^3\} + \{y^3\} = \{z^3\}$$

ahol $\{a\}$ az „a” valós szám törtrésze.

Megoldásvázlat: (Sárkány Lőrinc)

$3^3 + 4^3 = 6^3 - 5^3 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3$ - 1, tehát $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{4}{5}$, $z = \frac{6}{5}$ megoldása az egyenletnek. Adjunk ezekhez egész számokat úgy, hogy a köbük egész számokkal változzon! Ehhez elegendő, ha az egész szám osztható a nevező négyzetével, így $x = \frac{3}{5} + 25k$, $y = \frac{4}{5} + 25k$, $z = \frac{6}{5} + 25k$ is megoldás, ahol k tetszőleges egész szám.

8. Legyenek a, b, c páronként különböző pozitív egész számok. Igazoljuk, hogy

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{b}\right)\left(c - \frac{1}{c}\right) \le abc - (a + b + c)$$

Megoldásvázlat: (Williams Kada)

Ellenőrizhető, hogy $a = x - 1$, $b = x$, $c = x + 1$ esetén egyenlőség teljesül.

Próbáljuk kétváltozóval megadni a rokon relációt!

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{b}\right) \le ab - (valami)$$

Ha $a = x,\ b = x + 1$ esetén akarunk egyenlőséget, akkor a $(valami)$-nek 2-vel kell egyenlőnek lennie.

Igaz-e így?

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{b}\right) \le ab - 2$$

Ekvivalens átalakítások után $1 \le (a - b)^2$ adódik, ami igaz, hiszen a, b különböző pozitív egészek

Igazoljuk a háromváltozós állítást a kétváltozós felhasználásával! Legyen $a < b < c$.

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{b}\right)\left(c - \frac{1}{c}\right) \le (ab - 2)\left(c - \frac{1}{c}\right)$$

Elegendő belátni, hogy

$$(ab - 2)\left(c - \frac{1}{c}\right) \le abc - (a + b + c)$$

Ekvivalens átalakításokkal: $2 \le (c - a)(c - b)$, ami nyilvánvaló.