Apró érdekességek a matematika világából

Készítette: Berzsenyi Mónika
Veszprémi Szakképzési Centrum Ipari Szakközépiskolája

Először is szeretném megköszönni a szervezőknek és a vendéglátóknak ezt a bajai néhány napot. A vándorgyűlés előadásait hallgatva, ismét élvezhettem a matematika mélységeit is valódi szépségeit: hogyan fogalmazható át, hogyan „nehezíthető” néhány matematikai (geometriai) probléma, hogyan lehet gyakorlatiasabbá tenni a matematikaoktatás anyagát. Kollégákkal beszélgetve megtapasztaltam, hogy a nem „elit” gimnáziumokban, nem matematikára éhes gyerekek között mások is küszködnek az érdektelenséggel.
Mivel szakközépiskolában tanítok, gyakran szembesülök azzal a problémával, hogy a matematika nem tartozik a „ kedvenc” tárgyak közé. Ezért az órákon igyekszem, ha csak néhány perc erejéig is, a tananyaghoz nem feltétlenül szorosan kapcsolódó matematikatörténeti érdekességgel színesíteni a tanórát.
A következőkben ezekből gyűjtöttem össze néhányat:

Érdekességek a számokkal kapcsolatban

Egy: Az egység
Az Isten, a teremtés
Minden számnak osztója, de neki csak önmaga az egyetlen osztója
Nem prím, de nem is összetett
A Napot jelenti
Kettő:
- A legkisebb prím
- Az egyetlen páros prím
- A sík, két dimenzió
- A számítógép mûködése a 2-es számrendszerre épül
- A polaritás száma
- Szimbolizálja az isteni-ördögi kettõsséget, az életet és a halált, a férfit és a nõt
- Yin és Yang
- A Holdat jelképezi

Három:
- Az első páratlan prím
- A Háromkirályok
- A Szentháromság (Apa, Fiú, Szentlélek)
- Brahma, Visnu és Síva analóg a gunával (a teremtés alaperőivel)
- A tér, 3 dimenzió
- A 3 alap szín, melyből az összes többi szín előállítható (kék, sárga, piros)
- A háromszög, mint az „első” sokszög
- 3 a magyar igazság
- A tézis, antitézis és a szintézis
- A 3 az istenség száma (háromszög alakú szemmel ábrázolják)
- A zsidó vallásban 3 fő ünnep van (Purim, Ros HáSáná, Peszách)
- A templomokat is 3 nagyobb egységre bontják

Négy:
- A kereszt 4 végpontja
- A világ 4 alapeleme: Tűz, Víz, Levegő és a Föld
- 2+2=4 és 2*2=4 és 2 a másodikon is 4
- A második négyzetszám
- 4 évszak, 4 égtáj, 4 világkorszak

A kártya négy színe eredetileg a négy bolygó (Szaturnusz, Jupiter, Merkúr, Mars) színeinek felel meg

Öt:

Egy középpontból feszítik ki a kereszt 4 végpontját, ami a világot jelképezi
Néhány kultúrában nem négy (Tűz, Víz, Levegő, Föld) hanem 5 alapelem van, pl. a zsidó vallás szerint pedig az Éter az 5. elem, amely jelentése: mindenen áthatoló
Az emberi élet 5 főbb állomása (gyermekkor, ifjúkor, felnőttkor, időskor, aggkor)
Ez Krisztus száma is, ld.:5 sebből vérzik a kereszten
Az 5 szárú csillag kővel körülépítve a gótika csúcsívét adja
A kéz 5 ujja
5 érzék: látás, hallás, szaglás, ízlés, tapintás

Hat:

A 6 színű szivárvány
A 6 ágú Dávid-csillag
6 napig tartott az isteni teremtés

Hét:

A legmisztikusabb szám
A bibliai 7-es
7 nap alatt teremtette Isten a világot
7 klasszikus bolygó van
7 szabad művészetet ismerünk
7 erény-7 bűn
A bőrünk 7 évente cserélődik
Csak 7-tel nincs oszthatósági szabály (az egyjegyű számokkal való oszthatóságot vizsgálva)
A zsidó templomokban és otthonokban 7 ágú gyertyatartók vannak

Nyolc:

A második köbszám (és pont 2 a harmadikon)
A nyolcas a világmindenség rendjét, és a kozmikus egyensúlyt szimbolizálja.
A hindu Visnunak ennyi karja volt és Sivának ennyi alakja létezett.
Az ókeresztény tanítások szerint Krisztus a nyolcadik napon támadt fel, így ez a szám az újjászületés jelképévé is vált

Kilenc:

A kilences a háromszorosan szent hármas számból vezethető le.
Kilenc hónapig tart a terhesség
A görögöknél 9 múzsa 9 művészetet képvisel
A nap kilencedik órájában fejezte be földi életét Jézus a Golgotán

Tíz:

A legtöbb országban 10-es számrendszerben számolnak
A két kezünkön összesen 10 ujj van
A 10-zel új ciklus kezdődik a számok világában
A 10 bolygó

Tizenegy:

A legtöbb vallás szerint baljós szám
A bűn száma, mert a szent tízesen van bátorsága 1-gyel túl lépni
Pont eggyel kevesebb a tökéletes számnál

Tizenkettő:

A tökéletesség száma
Az év 12 hónapja

A 12 zodiákus jegy
Az óralap 12-es beosztása
Sok mesében is megjelenik ez a szám
A 12 Apostol

Tökéletes számok:

A tökéletes szám, olyan szám, amely egyenlő, a magánál kisebb osztóinak az összegével, ha az 1-et is az osztók közé számítjuk. Fontos megjegyezni, hogy görögök nem sorolták egy szám osztói közé magát a számot, a definícióban tehát magánál a számnál kisebb osztókról van szó.
Eukleidész az Elemek című művének aritmetikai részének legutolsó tétele megmutatja, hogyan találhatunk tökéletes számokat: ,,IX. 36. Tétel Ha az egységtől kezdve kétszeres arányban képzünk egy mértani sorozatot, amíg a sorösszeg prím nem lesz, és az összeggel megszorozzuk az utolsó tagot, akkor a szorzat tökéletes szám lesz.”
A tökéletes szám fogalma, a püthagoreusoktól származik. A tökéletes számoknak vallásos jelentőséget is tulajdonítottak. Isten azért teremtette hat nap alatt a Földet (bár egy pillanat alatt megtehette volna), mert a hat tökéletes szám. A Hold is hasonló okból kerüli meg a Földet éppen 28 nap alatt. Ők négy tökéletes számot ismertek (6, 28,496, 8128). Már a középkorban megtalálták a következő tökéletes számokat (33 550 336 és 8589869056) melyek sora azóta jelentősen bővült.

Barátságos számok

A számelméletben azokat a számpárokat, amelyekre igaz, hogy az egyik szám önmagánál kisebb osztóinak összege a másik számmal egyenlő és fordítva, barátságos számoknak hívjuk.
A pitagoreusok a 220-at ´es a 284-et a barátság szimbólumának tekintették, mivel az egyik szám részeiből összeáll a másik, azaz mindkét szám önmagánál kisebb osztóinak összege a másik számot adja. A 220 a Bibliában is szerepel, amikor a Teremtés Könyvében Jákob ajándékokkal próbálja kiengesztelni Ezsaut, többek között ,,Kétszáz kecskét, ´ és húsz bakot; kétszáz juhot, és húsz kost” ad neki, mely Ezsau iránti szeretetét fejezi ki. A középkorban is fontos szerepet játszott ez a számpár a horoszkópokban és a talizmánokon. Azt gondolták, hogy ha egy talizmánon a 220 vagy a 284 szerepelt, akkor annak tulajdonosa szerencsés lesz a szerelemben. A következő barátságos számpárt (17296, 18416) csak több, mint kétezer év múlva, 1636-ban találta meg Fermat. Descartes-tal együtt felfedeztek egy - az arabok által már a 9. század óta ismert - szabályt, melynek segítségével elő lehet állítani bizonyos típusú barátságos számpárokat, és Descartes ennek segítségével talált egy harmadik párt is (9 363 584, 9 437 056). Ezeket a számpárokat is már régóta ismerték az arabok.
Szábit ibn Kurra (9. század) tétele szerint könnyű barátságos számpárokat találni:

Legyen *n* rögzített, $x = 3\cdot2^{n}-1$, $y = 3\cdot2^{n-1}-1$ és $z = 9\cdot2^{2n-1}-1$. Ha x, y és z prímek, akkor az $a = 2^{n}\cdot x\cdot y$ és a $b = 2^{n}\cdot z$ számok barátságos számpárt alkotnak.

Példa:

n = 2, ekkor x = 11, y = 5, z = 71. Ebből adódik a

a = 4 · 11 · 5 = 220

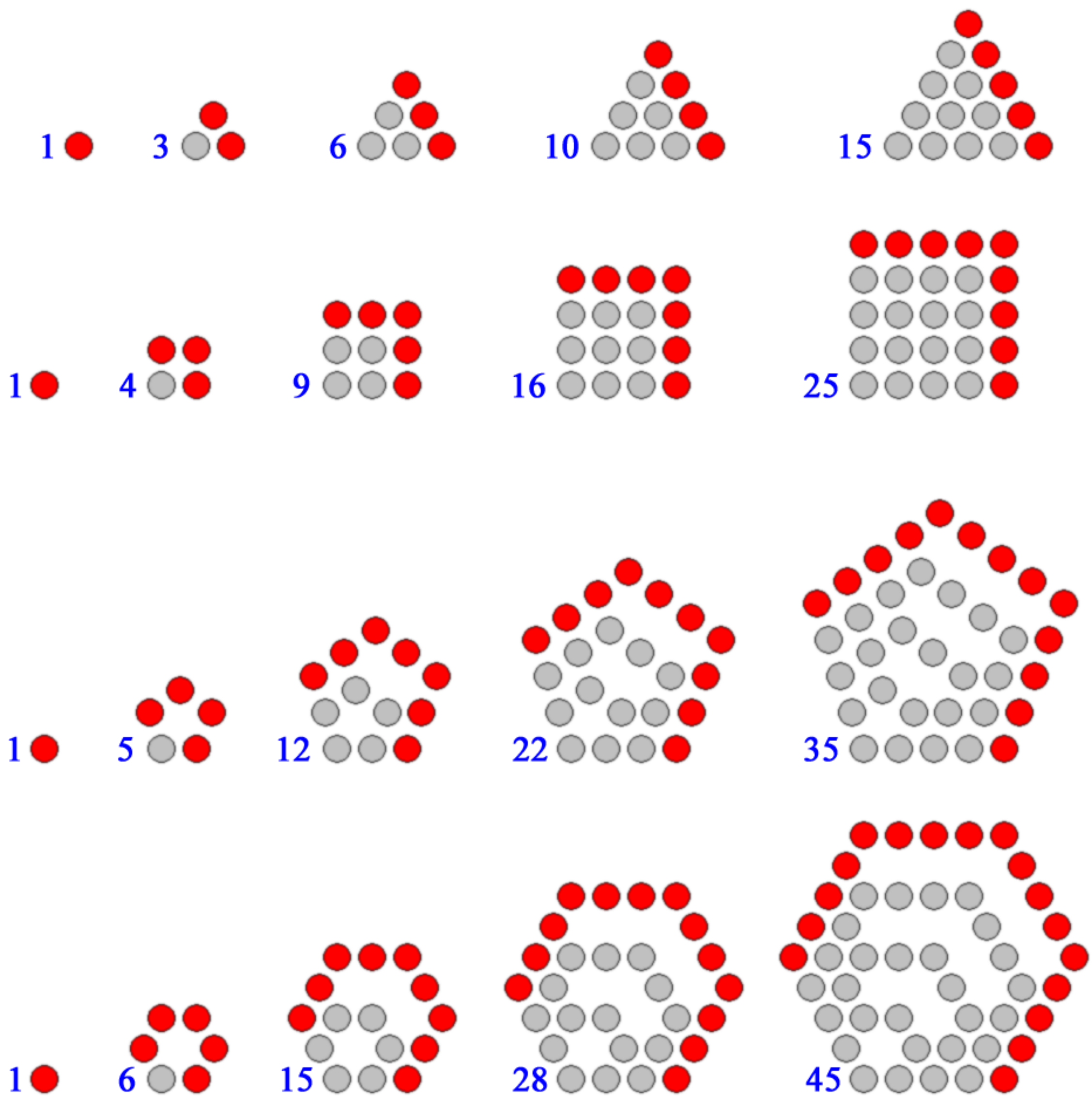
b = 4 · 71 = 284

számpár.

Ma már a barátságos számok keresésénél is számítógépeket használnak.

Sokszög számok

A matematikában sokszögszámnak nevezzük az olyan természetes számokat, mely (kavicsok, pontok stb. segítségével kirakva) szabályos sokszög alakba rendezhető. A Püthagoreusok vették észre, hogy a számokat kavicsokkal vagy magokkal szemléltetve azokat különféle módokon el tudják rendezni.



(Forrás: https://hu.wikipedia.org/wiki/Sokszögszámok)

Boldog számok:

Adjuk össze egy szám számjegyeinek négyzetét, majd az így kapott szám jegyeinek négyzetét is, és ezt folytassuk addig, amíg az összeg egyjegyű nem lesz! Ha az eljárás végén 1-et kapunk eredményül, akkor az eredeti számot boldog számnak nevezzük.

1: $1^2=1$ boldog szám
2: $2^2=4$
$4^2=16$
$1^2+6^2=1+36=37$
$3^2+7^2=9+49=58$
$5^2+8^2=25+64=89$
$8^2+9^2=64+81=145$
$1^2+4^2+5^2=1+16+25=42$
$4^2+2^2=16+4=20$
$2^2+0^2=4+0=4$ nem boldog szám

Minden, ilyen értelemben boldogtalan (= nem boldog) számra a végeredmény 4 lesz.
Boldog számok
pl.:1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94, 97, 100

Prím számok:

Pontosan 2 osztójuk van (1 és önmaga). Minden természetes szám egyértelműen bontható fel prím-hatványok szorzatára (számelmélet alaptétele). Már az ókorban is tudták, és be is bizonyították, hogy végtelen sok prím van. Szomszédos négyzetszámok között mindig van prím (tudomásom szerint még nem bizonyított). Minden 1-nél nagyobb természetes szám és a kétszerese között van prím (Csebisev tétele).

Prímszámok keresésének egyik legegyszerűbb módszere Eratoszthenész görög matematikus nevéhez fűződik, ezért is Eratoszthenészi-szita néven ismert. A módszer lényege, hogy pl. felírjuk a természetes számokat 1-100-ig. A számok listájából kihúzzuk a 2 többszöröseit, azaz minden páros számot. A 2-t azonban meghagyjuk! Ezután a 3, 5, 7 stb. többszöröseit húzzuk ki, és az eljárás így folytatható, mindig az első megmaradt jobboldali szomszéd többszöröseit húzzuk ki. A szita tehát minden lépés után előállítja a következő prímszámot, és így az eljárás végére a szitában a prímszámok sorozata marad.
A prímek jelentősége napjainkban megnőtt, hiszen a titkosításban, kódolásban kulcsszerepet játszanak. A ma ismert legnagyobb prímszám 22 338 618 számjegyből áll, ami 5 millió számjeggyel több, mint a 3 évvel előtte felfedezett legnagyobb prím. Ez a szám a $2^{74207281}-1$. (2016. január)
A prímszámok között több olyat is találunk, amely valamilyen különleges tulajdonsággal rendelkezik. Ilyenek például az ikerprímek.
<u>Ikerprímek:</u> Két olyan prímszám együttese, amelyek 2-vel térnek el egymástól. pl. 3 és az 5, 5 és a 7, 11 és a 13, 17 és a 19. Két prímszám között nem lehet kisebb a különbség 2-nél (kivéve a 2 és a 3), mivel a prímszámok a 2

kivételével páratlan számok. Annak bizonyítása, hogy végtelen sok ikerprím van még nem ismert.

Pí (Ludolph-féle szám):

Az euklideszi geometriában a kör kerületének és ármérőjének hányadosaként definiálják.
Az ókorban már az egyiptomiak és a babiloniak is közelítő értékét használták. (3,16; 3,125) Arkhimédész a körbe és a kör köré írt sokszögekkel pontosította elődei eredményét (3,1428).
Az arab kultúra egyik híres matematikusa, Al-Kashi 1430 körül már megadta a π-t 17 jegy pontossággal. Arkhimédész módszerével 1596-ban Ludolph van Ceulen kiszámította a π értékét 20 számjegynyi, majd később 36 számjegynyi pontossággal. Ezért régebben a π-t elterjedten Ludolph-féle számnak nevezték. Jelölésére a görög π betűt 1739-ben Euler vezette be.
A matematika és a számítástechnika fejlődésével több milliárd tizedesjegy pontossággal tudták meghatározni a π pontos értékét.

Végezetül minden idők egyik legjobb magyar nyelvű Pí verse:

(mnemotechnikai vers: olyan vers, amelynek minden egyes szava betűinek száma szolgáltatja a megjegyzésre szánt számsorozatot.)

Nem a régi s durva közelítés,
Mi szótól szóig így kijön
Betűiket számlálva.
Ludolph eredménye már,
Ha itt végezzük húsz jegyen.
De rendre kijő még tíz pontosan,
Azt is bízvást ígérhetem.
– Szász Pál, matematikus (1952)

(Forrás: http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/mnemonika/pi_vers.html)

Speciális háromszögek tulajdonságai kapcsán kerül elő Pitagorasz-tétele. E tétel kapcsán szoktam beszélni a Fermat-sejtésről.

Fermat-sejtés:

Magát a problémát igazán egyszerű megfogalmazni: Ha x,y,z és n pozitív egész számok, akkor n>2 esetén nem létezik megoldása a

$x^n+y^n=z^n$ egyenletnek.

Pierre de Fermat az 1600-as évek elején élt francia közgazdász és matematikus fogalmazta meg először a problémát, és Diophantosz *Arithmetica* című könyvének latin fordítását tanulmányozva, a kötet margójára a következő megjegyzést fűzte:”Igazán csodálatos bizonyítást találtam erre a tételre, de ez a margó túl keskeny, semhogy ideírhatnám.” Miután Fermat halála után napvilágra került ez a feljegyzés matematikusok hosszú sora próbálkozott megbirkózni a bizonyítással. Néhányuknak sikerült is speciális esetekre bizonyítani a tételt, akadtak, akik egész életüket szentelték a bizonyításnak és olyan is volt, aki végrendeletében óriási díjat ajánlott fel a megoldásért. A tételt 1993-ban egy princetoni professzornak, Andrew Wilesnak sikerült nyolc évnyi magányos és titokban végzett kutatómunka után bizonyítania.

(Forrás: Simon Singh: A nagy Fermat-sejtés)

Veszprém, 2016. 08. 28.