I. A képzetes számok fogalma

1. Végezzük el a következő gyökvonásokat:

   a) $\sqrt{-16}$ b) $\sqrt{-5\frac{1}{16}}$

2. Az x milyen értékeire képzetesek a következő gyökök:

   a) $\sqrt{7-\mathrm{x}}$ b) $\sqrt{2\mathrm{x}+9}$

3. Végezzük el a kijelölt műveleteket:

   a) $\sqrt{-24}$— $54+\sqrt{-6}$ b) 4i·8i

   c) (a+b)i·(a–b)i d) $\frac{-28i}{-2i}$

II. Műveletek

1. Ábrázoljuk a következő komplex számokat a számsíkon:

   a) i; –i b) 1+i c) 1–i d) 1+2i

   e) $\frac{3}{4}-2i$

2. Oldjuk meg a következő másodfokú egyenleteket, és ábrázoljuk a gyököket a számsíkon!

   a) $x^2-2x+10=0$ b) $x^2+25=0$

3. Számítsuk ki és ábrázoljuk a következő műveletek eredményét:

   a) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i\right)+(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}i)$ b) (1+i)·(1–i)

   c) (1+3i)·(2+3i)

4. Mi a feltétele annak, hogy két komplex szám összege valós legyen? Mi e feltétel geometriai jelentése?

5. Szerkesszük meg a tényezők és szorzat ábráit:

   a) 3·i b) 4i·i c) (3+4i)·(4+3i) d) (3+4i)·(3–4i)

6. Írjunk le két olyan komplex számot, amelynek

   a) összege, b) szorzata, c) összege és szorzata is valós szám!

7. Geometriailag mit jelent egy egységnyi abszolút értékű komplex számmal való szorzás?

8. Mutassuk meg, hogy két komplex szám szorzata is csak akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0.

III. Algebrai és trigonometrikus alak

1. Számítsuk ki a komplex számok abszolút értékét és argumentumát:

   a) 3+4i b) –6+8i

2. Fejezzük ki algebrai alakban a következő komplex számokat:

   $a)4(\cos30° + \mathrm{i}\cdot\sin30°)$ $b)\ 6(\cos0° + \mathrm{i}\cdot\sin0°)$

   $c)\cos135° - \mathrm{i}\cdot\sin135°$

3. Fejezzük ki trigonometrikus alakban és ábrázoljuk a következő számokat:

   a)1; b) –1; c) i; d) –i;

   e) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; f) 4+3i

4. Végezzük el a következő műveleteket:

   $a)10(\cos60° + \mathrm{i}\cdot\sin60°)\ +\ 5(\cos45° + \mathrm{i}\cdot\sin45°)$

   $\mathrm{b)}6(\cos50° + \mathrm{i}\cdot\sin50°)\ \cdot 5(\cos40° + \mathrm{i}\cdot\sin40°)$

Prehodáné Nagy Éva prehoda.eva@gmail.com

IV. Hatványozás, gyökvonás

1. Végezzük el a következő műveleteket:

   a) i^{15} b) $(-\mathrm{i})^{10}$ c) $(5-2\mathrm{i})^2$ d) $\left(2+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3$

   e)$[2(\cos 3° + \mathrm{i}\cdot\sin 3°)]^5$ f)$(-2+2\mathrm{i})^8$ g) $\sqrt{3+4\mathrm{i}}$

   h) $\sqrt{4-3\mathrm{i}}$ i) $\sqrt{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$ j) $\sqrt{5-\mathrm{i}\sqrt{11}}$
2. A következő feladatokban számítsuk ki a gyökök összes értékét, és ábrázoljuk ezeket!

   a) $\sqrt[3]{\cos 135° + \mathrm{i}\cdot\sin 135°}$ b)$\sqrt[4]{16(\cos 120° + \mathrm{i}\cdot\sin 120°)}$

3. Ellenőrizzük a következő egyenlőség helyességét!

   $$\sqrt[3]{2+\mathrm{i}\cdot 11}+\sqrt[3]{2-11\cdot\mathrm{i}} = 4$$

4. Bizonyítsuk be, hogy ha n páros szám, akkor az $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{n}}+\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{n}}$ összeg értéke ± 2 vagy 0, ha n páratlan, akkor az összeg értéke $\pm\sqrt{2}$!

V. Egységgyökök

1. Mutassuk meg, hogy $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ harmadik egységgyök!

2. Igazoljuk, hogy ha ε tetszőleges primitív n-edik egységgyök, akkor

   $$\varepsilon\cdot\ \varepsilon^2\cdot\varepsilon^3\ \cdot \ldots\ \cdot\varepsilon^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$
3. Hány 24. primitív egységgyök van? Jellemezzük geometriailag a 24. egységgyökök ábrázolásakor keletkező szabályos 24-szög azon csúcsait, amelyek primitív egységgyököt ábrázolnak!

VI. Versenyfeladatok

1. Oldd meg a következő egyenletet: $(\,tgx + i\,)^n + (\,tgx - i\,)^n = 0$, ahol $i^2 = -1$,
   $n \in \mathbb{Z},\ x \in \mathcal{R}$
2. Oldd meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:
   $z^{n-1} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\cdot\bar{z}$, ahol n≥2 egész. (Dályai Pál)
3. Határozd meg azon komplex z számokat, melyekre $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ nem valós és $1+2|z|^2$ pedig természetes szám! (Bencze Mihály)

4. Legyen z_1, z_2, z_3 páronként különböző nemvalós szám és $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.
   Bizonyítsd be, hogy ha $z_1 + z_2 \cdot z_3$, $z_2 + z_3 \cdot z_1$ $z_3 + z_1 \cdot z_2$ valós számok, akkor $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 1$!

5. Legyen z_1, z_2, z_3 három 0-tól különböző komplex szám és $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.
   Bizonyítsd be, hogy ha $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1$, akkor vagy
   $z_1 = z_2 = z_3$, vagy az adott három komplex szám képei egy szabályos háromszög csúcsai!

Prehodáné Nagy Éva prehoda.eva@gmail.com